ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

PUBLICADOS SOB A DIRECÇÃO

DE

F. Gomes Teixeira

VOLUME III

(Publicação official)

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1908

R. 4822

SURFACES NAUTILOÏDES

PAR

HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Membre de l'Institut
Inspecteur général des Mines
Grand-Officier de la Légion-d'Honneur

INTRODUCTION

On a souvent l'occasion de saisir dans la nature un reflet des formes rigoureuses qu'étudie la géométrie. Sans insister sur la cristallographie qui en est la plus frappante manifestation, mais qui relève uniquement des forces physiques et chimiques, nous en trouvons dans les corps vivants plus d'un exemple.

La botanique nous présente des végétaux dont la frondaison dessine une sphère parfaite. Des cônes de révolution circonscrivent exactement le feuillage de divers arbres, ou en modèlent le tronc avec une grande précision. La loi de l'insertion des feuilles sur la tige accuse l'influence de l'hélice, dont le pandanus nous présente les spirales elles-mêmes dans leur continuité.

Le règne animal de son côté a reçu du créateur certaines empreintes géométriques. On y remarque chez les zoophytes la division pentagonale, la moins simple précisément de celles des études élémentaires. Les zoologistes ont signalé dans le nautile, dans l'ammonite le caractère de l'une des lignes planes les plus remarquables, la spirale logarithmique. Le cérite, l'hélix dessinent des courbes gauches d'une frappante régularité.

Il m'a semblé intéressant d'appliquer les ressources de l'analyse géométrique à l'étude de la plus élégante de ces surfaces, en lui conservant pour plus de simplicité le nom qui lui appartient dans l'histoire naturelle : le *nautile*. Mais il est arrivé qu'au cours de cette étude, elle s'est élargie d'elle-même, et m'a entraîné à des développements plus étendus. Pour l'exposer ici dans son ensemble, il sera plus simple de procéder du général au particulier.

PREMIERE PARTIE

Surfaces à front générateur

§ I

Préliminaires

1. Nous emploierons concurremment les coordonnées rectangulaires : abscisse x, ordonnée y, altitude z ; et les coordonnées *mixtes :* rayon vecteur *horizontal* ([1])

$$R = \sqrt{x^2 + y^2},$$

longitude

$$\omega = \text{arc tang} \frac{y}{x},$$

comptée à partir du premier méridien ZOX, autour de l'axe *zénithal* OZ, enfin la latitude

$$\lambda = \text{arc tang} \frac{z}{R},$$

rapportée au plan de *l'équateur* XOY.

On a d'ailleurs inversement

$$x = R \cos \omega, \quad y = R \sin \omega, \quad z = R \text{ tang } \lambda.$$

([1]) Nous désignerons par ρ le rayon vecteur de l'espace

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2. L'objet essentiel de ces recherches concerne les *surfaces à front générateur*, que nous constituerons de la manière suivante.

Nous nous donnons dans le plan de l'équateur (fig. 1) une courbe *directrice*

$$r = F(\theta).$$

Je désigne par r, θ les coordonnées polaires planes de son point décrivant M, afin de prévenir toute confusion avec celles R, ω, λ des points N de la surface.

Par le point décrivant je méne, perpendiculairement à l'équateur, un plan qui prendra le nom de *front générateur*. Il est indiqué par sa trace FF', autour de laquelle nous le rabattons pour montrer, en trait pointillé, la courbe *génératrice* FNF'. Nous la représenterons par l'équation

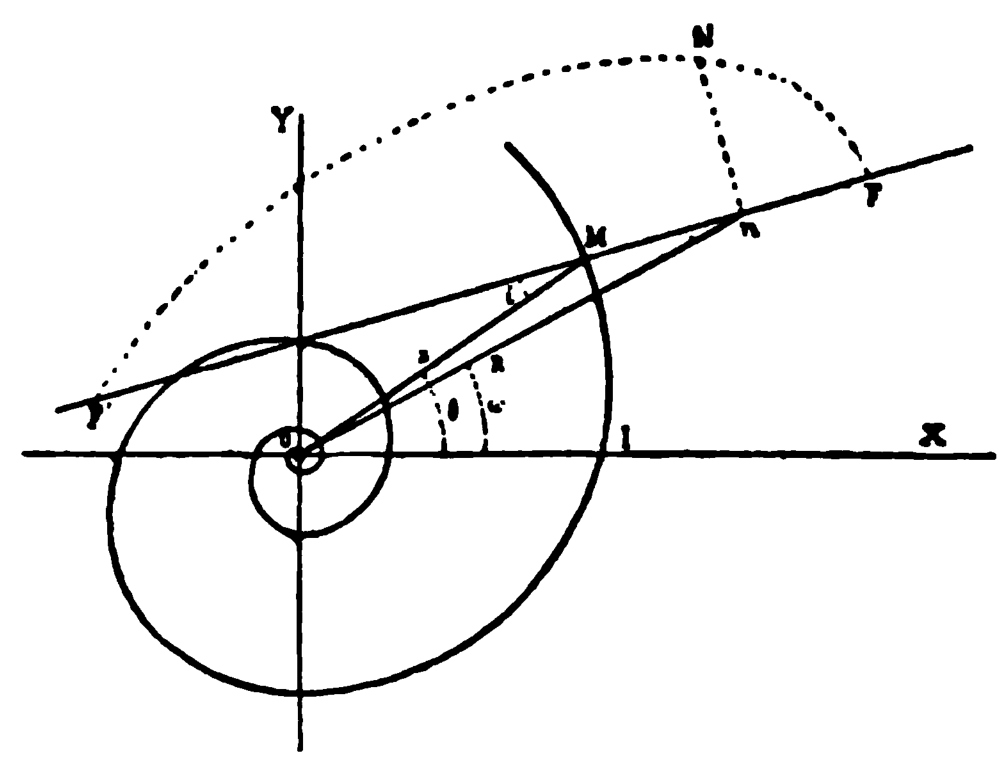


Fig. 1

$$\xi = f(z),$$

entre son abscisse $\xi = \mathrm{M}n$ et son ordonnée $z = \mathrm{N}n$, rapportées au point décrivant comme origine, à l'aide des axes MF dans l'équateur et MZ' parallèle à l'axe zénithal.

La condition fondamentale qui dominera toute cette théorie est que, *pendant le mouvement du plan de front la génératrice reste semblable à elle même par rapport au point décrivant.* Le rapport de similitude, arbitraire comme tous les autres éléments de la question, sera représenté par la fonction

$$\varphi(\theta).$$

L'équation de cette génératrice, à chaque instant de sa déformation progressive, prendra donc la forme

$$\frac{\xi}{\varphi(\theta)} = f\left[\frac{z}{\varphi(\theta)}\right]. \tag{1}$$

Enfin un quatrième élément détermine à tout instant la position de la trace du front par rapport au rayon vecteur de la directrice, à savoir l'angle de ces deux droites

$$i = \psi(\theta).$$

La surface à front générateur se trouve ainsi constituée à l'aide de quatre éléments fonctionnels arbitraires, que nous représenterons d'une manière abrégée par F, f, φ, ψ, en y sous-entendant la variable, lors qu'elle sera suffisamment désignée.

Etablissons d'abord deux formules fondamentales.

3. La première présente ce caractère spécial de rester indépendante de la fonction f, c'est à-dire de la génératrice. C'est l'équation de la trace FF' du plan de front, sur laquelle en effet se projette indifféremment tout ce que renferme ce plan.

Nous avons dans le triangle O Mn

$$\frac{\mathrm{O}n}{\sin \mathrm{OM}n} = \frac{\mathrm{OM}}{\sin . \mathrm{O}n\mathrm{M}}, \qquad \frac{\mathrm{R}}{\sin i} = \frac{r}{\sin[i-(\theta-\omega)]},$$

et enfin

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{R} \sin(\omega - \theta + i) = r \sin i = \mathrm{F} \sin \psi.$$

4. Ce triangle nous donne également

$$\overline{\mathrm{O}n}^2 = \overline{\mathrm{OM}}^2 - 2\mathrm{OM}.\overline{\mathrm{M}n}.\cos \mathrm{OM}n + \overline{\mathrm{M}n}^2,$$

c'est-à-dire (1)

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{R}^2 = \mathrm{F}^2 + 2\mathrm{F}\varphi f\left(\frac{\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\lambda}{\varphi}\right)\cos\psi + \varphi^2 f^2\left(\frac{\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\lambda}{\varphi}\right).$$

Pour obtenir, entre R, ω, λ l'équation de la surface à front générateur, il suffira d'éliminer entre les relations (2) et (3) le paramètre θ, lorsque seront spécifiés dans chaque cas les symboles F, f, φ, ψ.

5. La question posée dans ces termes comporte une grande généralité.

En ce qui concerne en premier lieu le front, on peut supposer : 1° qu'il dépende uniquement de la directrice ; par exemple en faisant avec sa tangente un angle constant (lequel sera

droit pour les *surfaces à front normal*); 2° ou qu'il ne dépende au contraire que du rayon vecteur; en exécutant par exemple autour de M une rotation proportionnelle à celle que ce rayon effectue autour du pôle. Si le coefficient de cette proportionnalité est -1, le front reste parallèle à lui même ([1]); pour la valeur $+1$, il fait avec ce rayon un angle constant (en particulier un angle nul dans les *surfaces à front méridien*); si l'on a le coefficient $+2$, le front et l'axe polaire constituent à chaque instant avec le rayon vecteur un triangle isocèle, etc.; 3° ou enfin le front dépend à la fois du rayon et de la directriee; par exemple en se disposant suivant l'une des bissectrices de leur angle, ou en tournant sur lui-même proportionnellement à la déviation qu'éprouve cette droite, etc.

Quant à la génératrice, son choix reste illimité. L'on peut penser à la vérité que le cercle fournira pour les arts de la décoration la meilleure ressource; soit qu'il ait son centre au point décrivant ou qu'il constitue un excentrique; en lui attribuant une position déterminée ou gyratoire. Toutefois diverses autres courbes peuvent être envisagées, au point de vue de l'art; aussi bien que des facilités du calcul.

Mais c'est assurément le choix de la directrice qui imprimera le caractère le plus accentué aux diverses familles de surfaces ainsi constituées. Supposons la par exemple rectiligne et le front parallèle à lui même, en adoptant comme paramétre de similitude la longueur parcourue par lui suivant cette directrice à partir d'un de ses points; nous aurons ainsi le groupe des cônes, et à la limite celui des cylindres. Mais on pourrait en obtenir de différents avec la ligne droite, en modifiant les autres conditions.

Si on lui substitue le cercle en plaçant son centre au pôle, avec un front normal et une génératrice immuable ($\varphi = 1$), nous retrouvons les surfaces de révolution. Mais le cercle peut aussi fournir d'autres familles avec des lois différentes.

Nous donnerons dans la suite de cette étude une prépondérance toute spéciale comme directrice à la *spirale logarithmique;* et c'est de ce choix que nous ferons sortir le groupe des *surfaces nautiloïdes* qui semblera peut être, par l'importance de ses propriétés, mériter de prendre place dans la science.

([1]) Lorsque le front reste parallèle à lui-même, on peut, en désignant par α la constante $\theta - i$ qui mesure son inclinaison sur l'axe polaire, donner à la relation (3) la forme suivante

$$(F + f + R)(F + f - R)(F - f + R)(-F + f + R) = [2 f R \sin(\omega - \alpha)]^2.$$

§ II

Les quatre types simples

6. Attachons nous tout d'abord à dégager pour chacun des quatre éléments fonctionnels F, f, φ, ψ, l'hypothèse la plus simple qui lui soit propre.

En ce qui concerne en premier lieu l'inclinaison du front sur le rayon vecteur, cette condition sera évidemment

$$\psi = 0,$$

et confondra incessamment ce plan avec celui du méridien, c'est-à-dire sa trace avec le rayon vecteur de la directrice. Nous conservons d'ailleurs une entière généralité pour les trois autres fonctions F, f, φ.

Il est facile d'établir l'équation de ces *surfaces à front méridien*. Les relations (3), (1), (2) deviennent en effet

$$\cos i = 1,$$

$$(4) \qquad R^2 = F^2 + 2F\xi + \xi^2 = (F + \xi)^2,$$

$$R = F + f\left(\frac{z}{\varphi}\right),$$

$$\omega = \theta.$$

La longitude ω d'un point quelconque N (fig. 2) de la génératrice méridienne peut ainsi être substituée, sous les signes fonctionnels, à l'azimut θ du point décrivant M, et il vient pour l'équation cherchée

$$(5) \qquad R = F(\omega) + \varphi(\omega) f\left[\frac{R \tan g\lambda}{\varphi(\omega)}\right].$$

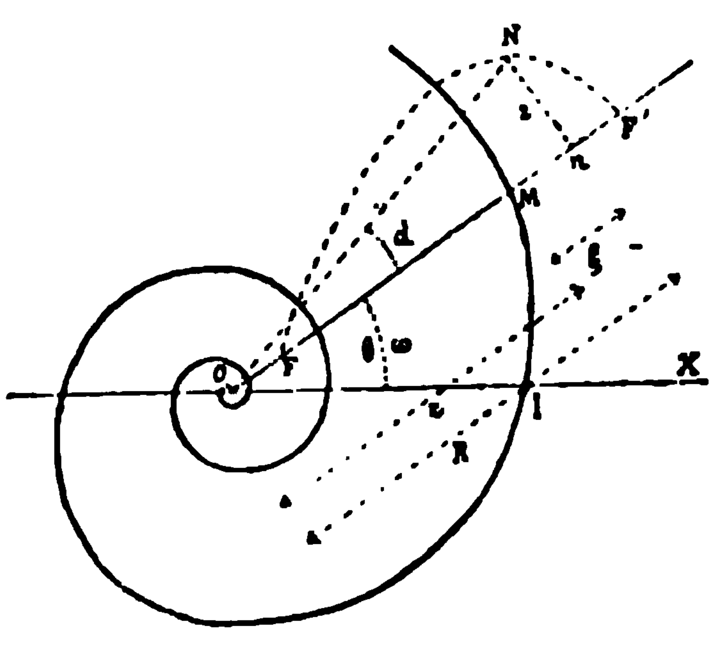


Fig. 2

J'ai préféré la déduire de nos formules fondamentales, afin d'en montrer de suite l'usage, mais il est facile de la lire directement sur la figure 2.

7. En ce qui concerne en second lieu le rapport de similitude, le paramètre de beaucoup le plus utile sera le rayon ve-

cteur lui même

$$\varphi = r = \mathrm{F}.$$

La génératrice variable est alors représentée (1) par l'équation

$$\xi = \mathrm{F}.f\left(\frac{z}{\mathrm{F}}\right). \tag{6}$$

Nous appellerons de telles surfaces *vectorielles*, quelles que soient d'ailleurs les fonctions F, f, ψ.

8. Adjoignons à la condition vectorielle celle de l'inclinaison constante du front sur le rayon vecteur

$$\psi = \text{const.}$$

Les surfaces ainsi constituées, quelles que soient F et f (c'est-à-dire la génératrice et la directrice) jouissent d'une importante propriété.

Le triangle O$\mathrm{M}n$ (fig. 1) conserve en effet pendant le mouvement générateur du point N sur sa trajectoire de l'espace, un angle invariable $\pi - i$ compris entre deux cotés proportionnels r et ξ. Il reste donc semblable à lui-même. Dès lors On sera proportionnel à Mn, et par suite à Nn. En même temps ce rayon vecteur On fait avec OM un angle invariable qui est la différence de i et de MOn. Le point n décrit donc une courbe semblable à la directrice. D'autre part enfin l'angle *vertical* NOn, qui n'est autre que la latitude λ du point N, reste lui même constant durant le mouvement. De là ce théorème:

Si l'on coupe par un *cône de latitude*

$$\lambda = \text{const.},$$

une surface *vectorielle d'inclinaison frontale constante* la courbe gauche d'intersection (N) conserve une projection équatoriale (n) semblable à la directrice (M), quelles que soient cette dernière aussi bien que la génératrice.

Le plan de l'équateur se trouve d'après cela *sillonné* de telles lignes pour les divers points N qui constituent le profil générateur. Imaginons dès lors que l'on fasse varier d'une manière continue le cône de latitude, depuis un angle infinitésimal autour de l'axe zénithal jusqu'à son épanouissement complet dans l'équateur, suivi lui-même d'un repliement en dessous jusqu'à l'axe nadiral. On verra, en suivant par la pensée le déplace-

ment corrélatif de l'intersection (N) sur la surface, la courbe plane (n) *balayer* le plan de l'équateur *en restant semblable à elle-même*, puis qu'elle doit toujours l'être à la directrice.

Bien entendu, selon la composition de la génératrice, sa rencontre avec le cône de latitude peut s'opérer en un nombre multiple de points, dont quelques uns peuvent devenir accidentellement des points de tangence. Il y aura donc en général plusieurs courbes semblables balayant à la fois diverses zônes de l'équateur, en s'éloignant ou se rapprochant les unes des autres, pour arriver à se fondre ensemble à l'instant d'un contact.

9. En ce qui concerne en troisième lieu la génératrice, le choix le plus simple sous le rapport géométrique, en même temps que le plus rapproché des vues qui nous dirigent en histoire naturelle vers le genre *Nautilus*, de la famille des *Nautilidés,* est celui d'un cercle dont le centre parcourrait la directrice quelconque F.

Supposons en même temps la surface vectorielle. L'équation de la circonférence variable devient alors à chaque instant

$$\xi^2+z^2=B^2r^2, \qquad \xi=\sqrt{B^2r^2-z^2},$$

en désignant par B le multiple constant du rayon vecteur de la directrice qui fournit le rayon de courbure de la génératrice circulaire.

Admettons enfin, en ce qui concerne l'inclinaison frontale, la loi du front méridien. L'équation (5) de cette classe de surfaces devient dans ce cas

$$R=r\pm\sqrt{B^2r^2-R^2\operatorname{tang}^2\lambda},$$

entre les coordonnées R, ω, λ, une fois que l'on a remplacé r par $F(\omega)$. Elle subit les transformations suivantes

$$(R-r)^2=B^2r^2-R^2\operatorname{tang}^2\lambda,$$

$$R^2(1+\operatorname{tang}^2\lambda)-2Rr+r^2(1-B^2)=0,$$

$$\left(\frac{R}{\cos\lambda}\right)^2-2r\cos\lambda\left(\frac{R}{\cos\lambda}\right)+r^2(1-B^2)=0,$$

$$\frac{R}{\cos\lambda}=r\cos\lambda\pm\sqrt{r^2\cos^2\lambda+(B^2-1)r^2},$$

$$R=F(\omega)\cos\lambda(\cos\lambda\pm\sqrt{B^2-\sin^2\lambda}). \tag{7}$$

Cette formule vérifie avec évidence le théorème du N° 9 relatif aux surfaces vectorielles d'inclinaison frontale constante, d'après lequel, pour une latitude fixe, la projection horizontale reste semblable à la directrice : $R = F(\omega)$.

10. La surface ainsi constituée est symétrique par rapport à l'équateur, puisque son équation ne dépend que de $\cos\lambda$ et $\sin^2\lambda$. Contentons nous donc de raisonner sur la moitié supérieure, en faisant varier λ seulement do 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Son sinus restant positif, la condition de réalité du radical se réduit à

$$\sin\lambda < B .$$

Si $B > 1$, (le cercle générateur recouvrant alors le pôle comme une voûte), cette inégalité ne limitera en rien la variation de λ dans toute l'étendre de l'angle droit.

Le cas-limite $B = 1$ prendra une grande importance dans la suite de ces recherches. Nous désignerons sous le nom *d'équiradiales* les surfaces qui lui correspondent.

Mais supposons au contraire $B < 1$, (le profil circulaire restant alors entièrement situé d'un même côté du pôle), nous poserons pour simplifier les calculs

$$B = \sin b .$$

Dans ce cas, l'on n'obtiendra d'intersection du cône de révolution avec la surface qu'en dessous de la latitude

$$\sin\lambda_0 = B , \qquad \lambda_0 = b .$$

A cette limite même, l'équation (7) de la surface nons donne

$$R = r\cos^2\lambda_0 = F(\omega)\cos^2 b .$$

Au dessous, l'intersection se développe suivant deux branches distinctes, qui vont en s'écartant l'une de l'autre jusqu'à ce qu'elles forment les deux parties de la trace équatoriale, pour les valeurs

$$\lambda_1 = 0 , \qquad R = r(1 \pm B) = (1 \pm \sin b)\,F(\omega) .$$

11. En ce qui concerne en quatrième lieu la directrice, nous

fixerons notre attention d'une manière toute spéciale sur la spirale logarithmique.

Nous prendrons son équation sous la forme

$$r = e^{A\theta} = e^{\theta \cot a},$$

en désignant par a l'inclinaison constante de sa tangente sur le rayon vecteur, et prenant comme unité la longueur OI interceptée par la courbe sur l'axe polaire, pour l'azimut $\theta = 0$.

Si nous supposons dans ce cas la surface vectorielle et d'inclinaison frontale constante, elle prendra pour nous *sous cette triple condition* le nom de *surface nautiloïde,* quelle que soit sa génératrice f. De là une famille de surfaces bien définie.

La proposition du N° 9 leur convient, et se précise même alors encore plus. En effet les courbes semblables à la spirale logarithmique

$$r = ce^{A\theta} = e^{A(\theta + \log c \tan a)},$$

sont des spirales égales mais déviées de l'angle $\log c \tan a$ autour du pôle (1). Si nous fondons d'ailleurs cette déviation dans la gyration qui a été envisagée au N° 9, c'est alors la directrice *elle-même* que l'on voit entrer en mouvement pour balayer l'équateur sans changer de forme (en se dédoublant au besoin de différentes façons pour des intersections multiples, avec des rotations de divers sens pour ses diverses individualités) au fur et à mesure que le cône de latitude varie du zénith au nadir en passant par l'équateur.

12. Ces lignes de latitude jouissent dans les nautiloïdes d'une propriété très remarquable.

L'ordonnée du point déterminé par cette latitude constante reste par cela seul sa propre homologue sur les génératrices semblables dans toutes leurs situations. Elle sera donc proportionnelle au rayon vecteur du point décrivant de la directrice, ce qui donne

$$z = Cr = Ce^{A\theta}.$$

On a d'après cela tout à la fois

$$dr = Ae^{A\theta}d\theta, \qquad dz = ACe^{A\theta}d\theta,$$

(1) Tous les logarithmes qui figurent dans ce mémoire sont pris dans le système népérien.

et il vient pour l'inclinaison j de cette courbe sur l'horizon :

$$\operatorname{tang} j = \frac{dz}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = \frac{AC}{\sqrt{A^2+1}} = C \cos a ,$$

valeur constante.

D'après la similitude que conserve incessamment la figure formée par la tangente, l'équateur, le cône, sa génératrice et son plan tangent, il en sera de même de l'angle que comprennent entre elles la tangente et la génératrice du cône. Cette ligne gauche serpente donc sur le cône de révolution en traversant sous un même angle toutes ses arêtes.

On reconnait à ce caractère la courbe qui a été étudiée par Tissot (*Nouvelles annales de mathématiques*, 1852), Paul Serret (*Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, 1860, page 101), G. Pirondini (*Journal für Mathematik*, Berlin, tome CXVIII, page 61), F. Gomes Teixeira (*Tratado de las curvas especiales notables*, Madrid, 1905, page 566). Le second de ces géomètres lui a donné le nom d'*hélice cylindroconique*. Cette dénomination serait un peu longue pour le très fréquent usage que nous aurons à en faire. Je lui substituerai pour ce motif l'abréviation : *cônhélice*.

Remarquons avec soin que, si toutes les cônhélices sont des *lignes d'égale pente* du nautiloïde, toutes les lignes d'égale pente de ces surfaces ne sont pas des cônhélices. Il suffit d'en donner cette raison évidente qu'il y a en chaque point une seule de ces dernières, déterminée par son cône de latitude, tandis qu'il part de ce point une infinité de lignes d'égale pente sous toutes sortes d'inclinaisons.

§ III

Nautile à front méridien

13. Réunissons actuellement ensemble les quatre conditions simples qui viennent d'être étudiées distinctement, à savoir : la génératrice circulaire, la directrice spirale, le rapport vectoriel et le front méridien. Nous constituons ainsi un premier type bien déterminé, en vue de l'assimilation que nous cherchons avec la nature vivante. Nous lui donnerons le nom de *nautile à front méridien*.

Son l'équation sera (7)

$$R = e^{A\omega} \cos \lambda (\cos \lambda \pm \sqrt{\sin^2 b - \sin^2 \lambda}) .$$

Elle met bien en évidence la nature des lignes de latitude. Si l'on emploie en effet l'abréviation

$$\delta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \left[\cos\lambda\left(\cos\lambda \pm \sqrt{\sin^2 b - \sin^2\lambda}\right)\right],$$

cette formule devient simplement

$$R = e^{A(\omega+\delta)},$$

et représente en projection équatoriale, pour une latitude constante, une spirale logarithmique égale à la directrice, et déviée de l'angle δ.

Pour la valeur limite $\lambda_0 = b$, le double signe disparait; on obtient alors la projection de la ligne de contact du nautile avec le cône qui lui est circonscrit à partir du pôle. Elle a pour déviation

$$\delta_0 = 2 \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \cos b.$$

Celles des deux traces équatoriales (pour $\lambda_1 = 0$) sont de même

$$\delta_1 = \frac{\operatorname{Log}(1 \pm B)}{A}.$$

14. Nous avons établi (N° 10) une première distinction selon que $B \gtrless 1$, c'est-à-dire que le cercle générateur recouvre ou non le pôle. Une seconde division devient ici nécessaire. En effet cette circonférence peut être, on non, rencontrée par la nouvelle position qu'elle prend à son retour dans le même méridien pour engendrer la spire suivante. Par cela seul, le même cercle initial coupe de même la circonférence de la révolution précédente, en raison de la similitude permanente du groupe formé par deux méridiennes successives.

Si les cercles consécutifs restent nettement séparés par des intervalles vides, la surface se développe en une seule nappe de forme spiraloïde, évasée transversalement en forme de cor comme dans le genre *crioceras*. C'est le cas le plus simple, et il est facile de formuler sa condition d'existence.

Les rayons vecteurs du point décrivant, pour deux révolutions successives de la directrice, sont $e^{A\theta}$ et $e^{A(\theta+2\pi)}$. Leur différence, c'est-à-dire l'intervalle de ces spires, a donc pour valeur

$$e^{A\theta}\left(e^{2\pi A} - 1\right).$$

Quant aux rayons correspondants des cercles générateurs, on les obtient en multipliant par B ces deux rayons vecteurs. Leur somme sera d'après cela

$$\mathrm{B}e^{\mathrm{A}\theta}(e^{2\pi\mathrm{A}}+1).$$

Pour que les spires de la surface restent distinctes sans empiéter l'une sur l'autre, il faut que cette somme n'occupe pas la totalité de l'intervalle ci-dessus, c'est-à-dire que

$$\mathrm{B}<\frac{e^{2\pi\mathrm{A}}-1}{e^{2\pi\mathrm{A}}+1}.$$

C'est donc par l'unité d'une part (N° 10) et par cette fonction que se trouvent séparées, pour une valeur donnée de A, les trois classes distinctes de nautile à front méridien.

15. Mais le cas des intersections présente une tout autre complexité. Etudions le avec quelque détail.

Nous emploierons comme coordonnées de la section méridienne dans son propre plan R et z. Le centre du cercle générateur ayant pour abscisse r, et son rayon étant Br, il aura comme équation

$$(\mathrm{R}-r)^2+z^2=\mathrm{B}^2r^2, \tag{8}$$

$$\mathrm{R}^2-2r\mathrm{R}+z^2=(\mathrm{B}^2-1)r^2,$$

$$2r\mathrm{R}-\mathrm{R}^2-z^2=r^2\cos^2 b.$$

La circonférence qui lui succède, non pas immédiatement mais *à* n *spires de distance*, nous donnerait de même

$$2r'\mathrm{R}-\mathrm{R}^2-z^2=r'^2\cos^2 b.$$

En retranchant ces deux relations, nous trouvons pour l'abscisse R de l'intersection

$$2(r'-r)\mathrm{R}=(r'^2-r^2)\cos^2 b,$$

$$\mathrm{R}=\frac{r+r'}{2}\cos^2 b.$$

Or on a

$$r'=e^{\mathrm{A}(\omega+2n\pi)}=re^{2n\mathrm{A}\pi},$$

et par conséquent

$$(9)\qquad R = \frac{1+e^{2nA\pi}}{2}\cos^2 b \,.\, e^{A\omega}\,.$$

16. Si l'on envisage R et ω comme des coordonnées polaires, on obtient l'équation de la projection équatoriale de la trajectoire du point d'intersection, à savoir

$$R = e^{A(\omega+\Delta)}\,,$$

en posant pour abréger

$$\Delta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log}\left(\frac{e^{2nA\pi}+1}{2}\cos^2 b\right).$$

On y retrouve donc la spirale directrice elle-même déviée de l'angle Δ. Les courbes gauches qui lui correspondent pour les diverses valeurs de n seront certaines cônhélices spéciales du nautile.

Nous les appellerons *gouttières*. Cette dénomination se présente d'elle-même à l'esprit pour celles d'entre elles dont les parois latérales plongent toutes les deux vers le bas, figurant une vallée dont la cônhélice formerait le thalweg.

Si l'on engageait sur cette ligne une bille infinitésimale descendant sous l'action de la pesanteur sans aucune résistance passive, elle obéirait, d'après le théorème des forces vives, à la loi de mouvement connue sous le nom de *plan incliné;* laquelle n'est autre que celle de la chute libre des graves avec réduction de l'accélération d'après le sinus de la pente.

17. Cherchons d'autre part l'ordonnée z du point d'intersection. L'équation (8) nous donne à cet égard

$$\left(\frac{z}{R}\right)^2 = -1 + \frac{r}{R}\left(2 - \frac{r}{R}\cos^2 b\right),$$

c'est-à-dire (9)

$$\operatorname{tang}^2\lambda = -1 + \frac{2}{(1+e^{2nA\pi})\cos^2 b}\left(2 - \frac{2}{1+e^{2nA\pi}}\right),$$

$$1 + \operatorname{tang}^2\lambda = \frac{4e^{2nA\pi}}{(1+e^{2nA\pi})^2\cos^2 b},$$

$$(10)\qquad \cos\lambda = \frac{e^{nA\pi}+e^{-nA\pi}}{2}\cos b.$$

Cette valeur de $\cos\lambda$, bien qu'obtenue par l'extraction d'une racine carrée, ne comporte pas de double signe, attendu que l'angle de latitude ne se compte que de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Mais on voit qu'à chacune des valeurs positives de ce cosinus correspondent, d'après la symétrie de la formule, deux valeurs égales et de signes contraires de n. Il y a donc autant de circonférences à droite qu'à gauche du cercle central, duquel nous sommes partis, qui sont rencontrées par lui. Et en effet, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, il ressort de la similitude permanente que cette circonférence joue par rapport aux cercles moindres qu'elle situés sur sa ganche le même rôle qu'exercent à son égard les cercles plus grands qui se trouvent à sa droite.

On voit en outre que pour chaque valeur positive de $\cos\lambda$, la latitude est susceptible de deux valeurs égales et de signes contraires; conséquence immédiate d'ailleurs de la symétrie de la surface au dessus et au dessous de l'équateur.

18. Toutefois ces valeurs ne seront réelles que sous la condition

$$\cos\lambda < 1,$$

d'où l'on déduit (10)

$$e^{2nA\pi} - \frac{2}{\cos b} e^{nA\pi} + 1 < 0. \tag{11}$$

Pour que ce trinôme soit négatif, il faut que sa variable $e^{nA\pi}$ reste comprise entre les deux racines, qui sont

$$\frac{1 \pm \sin b}{\cos b},$$

ou sous des formes équivalentes

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right), \qquad \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right).$$

Ces valeurs sont réciproques l'une de l'autre. Leurs logarithmes (qui devront comprendre entre eux $nA\pi$) sont donc égaux et de signes contraires. Par conséquent n ne doit pas

excéder les deux limites

$$\pm \frac{1}{A\pi} \operatorname{Log tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right).$$

Il est facile de concevoir a priori qu'il doive y avoir, de part et d'autre, une limite pour les intersections ([1]). Lorsque, en effet, à partir d'une position déterminée, le cercle s'éloigne de plus en plus par des rotations successives, encore bien que son diamètre augmente avec le rayon vecteur de son centre de manière à le recouvrir vers son extrémité sur des longueurs indéfiniment croissantes, il laisse cependant à découvert du côté du pôle un segment qui varie lui-même proportionellement, en arrivant ainsi à dépasser toute limite, et en particulier le rayon de la circonférence fixe sur laquelle portent nos raisonnements. A partir de ce moment, il n'y aura plus rencontre.

19. Appelons N le plus grand nombre entier qui satisfasse à la condition numérique

$$(12) \qquad N < \frac{\operatorname{tang} a}{\pi} \operatorname{Log tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right),$$

le cercle considéré en rencontrera en tout 2N autres, à savoir N plus grands sur sa droite, et N moindres à gauche.

Si l'on voulait accroitre la valeur de ce total, et avec lui la complication de la surface, il suffirait d'augmenter a et b, c'est-à-dire, d'employer des spirales plus lentes et des cercles plus grands par rapport au rayon vecteur de leur centre.

A ces points d'intersection des circonférences méridiennes correspondent 2N gouttières, à savoir N au dessus de l'équateur, et N au dessous. Il existe cependant 4N intersections du eercle central par ses 2N *satellites,* mais elles se trouvent associées deux par deux sur la même droite de latitude, qui coupe nécessairement deux fois chaque cercle. Elles sont dès lors traversées toutes les deux par la même cônhélice. Elle rencontre une première fois le cercle central sur sa gauche en son croisement avec un plus petit que lui, puis une seconde fois, en

([1]) Sauf lorsqu'on arrive à la limite jusqu'au nautile équiradial : $B = 1$, $b = \frac{\pi}{2}$.

raison de la similitude, sur sa droite, lorsqu'il joue lui-même le rôle de petit cercle vis à vis d'un plus grand que lui.

Le nombre des gouttières est donc toujours pair. Il existe cependant à cet égard une exception qu'il faut enregistrer. Supposons en effet que l'expression (12) ait précisément pour valeur un nombre entier. On peut alors attribuer à n cette valeur limite elle-même, en outre de tous les nombres entiers inférieurs. Mais c'est toutefois à la condition d'annuler par ce choix spécial le trinôme (11), au lieu de le rendre négatif. On a donc dans ce cas

$$\cos\lambda = 1\,, \qquad \lambda = 0\,.$$

Le rencontre des cercles se fait par conséquent sur l'axe polaire, et ils y sont tangents l'un à l'autre. Au point de vue algébrique on peut assurément voir là une *solution double*, et maintenir par cet artifice le nombre 2N des gouttières. Mais, dans la réalité physique, on n'en aperçoit plus sur la surface que $2N - 1$ seulement, à savoir $N - 1$ cônhélices au dessus de l'équateur, autant en dessous, et une spirale logarithmique qui serpente dans le plan même de symétrie, où elle forme une ligne de *soudure* des spires consécutives entre elles.

Le cas spécial $N = 1$ marque à cet égard le passage de la seconde catégorie (N° 15) à celle des intersections. La relation (14) devient alors

$$\operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{Log}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right) = \pi\,,$$

$$B = \sin b = \cos\left(2e^{A\pi}\right).$$

On rencontrera donc un tel nautile *soudé* pour une spirale quelconque, en employant un rapport vectoriel approprié, ou pour un rapport arbitraire avec une spirale convenable.

20. Rentrant maintenant dans le cas général, nous voyons que ces diverses cônhélices séparent la surface nautilienne en 2N zones, infinies suivant le sens spiraloïde, mais se cloisonnant mutuellement dans la coupe transversale, à la manière des bulles de savon [1].

---

[1] Le résultat changerait à la vérité, s'il s'agissait d'un objet massif dont on n'aperçoit pas l'intérieur, tel qu'un modèle en plâtre. Il n'y a plus alors, de chaque côté de l'équateur, qu'une seule gouttière accessible, serpentant à la superficie du solide.

Nous pouvons entreprendre d'évaluer le nombre des compartiments distincts suivant lesquels se trouve cloisonnée l'aire du *cercle central* par la traversée des *cercles satellites*, de gauche et de droite, qui le coupent en l'accompagnant comme un *cortège* dans son mouvement générateur.

Nous ne compterons essentiellement que pour une unité dans ce cortège l'ensemble des compartiments disposés en série, dont chaque terme vient, après une révolution pendant laquelle il se dilate, se superposer, à son retour, sur le suivant. Ce que nous évaluerons, en un mot, est le nombre de *tubes spiraloïdes* distincts, qui remplissent par leur ensemble la superficie externe engendrée par le cercle central. La plus élevée (fig. 3) des N droites de latitude situées au dessus de l'équateur traverse un

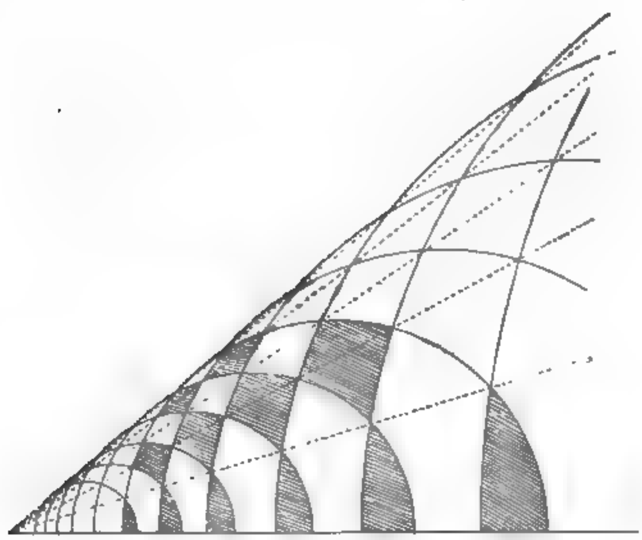


Fig. 3

triangle curviligne unique. Le rayon de rang N — 1 traverse deux *quadrangles curvilignes;* mais ils ne doivent compter que pour une unité se recouvrant elle-même dans la gyration qui lui fait traverser le cercle central. Au rayon N — 2 correspond également un unique quadrangle, qui se recouvre lui même deux fois; et ainsi de suite. Le second rayon à partir de l'équateur fournit encore un dernier quadrangle, qui se recouvre N — 2 fois.

C'est donc, sur le pied d'un seul tube spiraloïde pour chaque rayon de latitude, un total de N — 1 tubes. En vertu de la sy-

métrie, nous en avons tout autant au dessous de l'équateur; soit en tout $2(N-1)$.

Mais il nous reste encore à envisager le premier rayon, aussi bien au dessus qu'en dessous de ce plan. L'une et l'autre de ces deux droites traversent un même *sextangle curviligne*, formé de six arcs de cercle, et se recouvrant lui-même $N-1$ fois dans la gyration. Il ne compte donc ici que pour un seul tube, tant au point de vue des recouvrements successifs que pour les deux côtés de l'équateur.

Il en est de même en ce qui concerne l'axe polaire qui traverse des *biangles curvilignes*, composés chacun de deux arcs de cercle régnant des deux côtés du plan de symétrie. Ce compartiment se recouvre N fois, et l'ensemble ne compte encore que pour une unité. En la joignant à la précédente et aux $2(N-1)$ trouvées ci-dessus, nous obtenons donc un total définitif de 2N tubes.

21. Evaluons de même le nombre des points de croisement de ce réseau.

Nous en trouvons 2 sur le N^c rayon; 3 sur le $(N-1)^c$, 4 sur le $(N-2)^c$, :..., N sur le 2^c, et enfin $N+1$ sur le premier. L'axe polaire ne traverse aucun croisement. Ce total est donc

$$\frac{(N+1)(N+2)}{2}-1=\frac{N(N+3)}{2},$$

mais il en existe autant au dessous de l'équateur, et le chiffre définitif devient

$$N(N+3). \tag{13}$$

22. Enumérons encore les arcs de cercle distincts qui constituent le canevas de ce cloisonnement.

Le premier satellite de gauche présente, à l'intérieur du cercle central, un arc qui tourne sa convexité vers la droite et traverse l'axe polaire; le second, un arc au dessus de cet axe, un au dessous, et un troisième qui le traverse; le troisième satellite donne deux arcs au dessus, deux au dessous, et un cinquième transverse; et ainsi de suite. Le N^c satellite en fournira $2N-1$. On obtient donc la série:

$$1+3+5+7+\ldots.+(2N-1)=N^2.$$

Mais les satellites de droite en présentent un nombre égal qui tournent leur convexité vers la gauche. Et enfin le cercle générateur, pour son propre compte, en possède 4N le long de sa

périphérie complète. Le total est donc

$$N^2 + N^2 + 4N = 2N(N+2).$$

Ce résultat peut servir à controler le précédent (13). En effet en chaque point de croisement se rencontrent deux cercles. Il en part donc quatre *amorces*, à savoir $4N(N+3)$ en tout. Il y a toutefois exception pour les $4N$ points du cercle central, d'où ne partent que trois amorces, puisque nous ne sortons pas à l'extérieur. Le résultat est donc

$$4N(N+3) - 4N = 4N(N+2).$$

Mais chaque arc de cercle soude l'une à l'autre deux amorces. Leur nombre est donc la moitié de ce dernier, c'est-à-dire égal à celui que nous avons trouvé plus haut.

23. Nous pouvons déterminer les différentes valeurs des angles plans que comprennent entre eux les divers de arcs cercle du cloisonnement.

L'angle des deux circonfèrences qui ont pour centres C et C′ (fig. 4) est le même que celui CGC′ de leurs normales. Or son

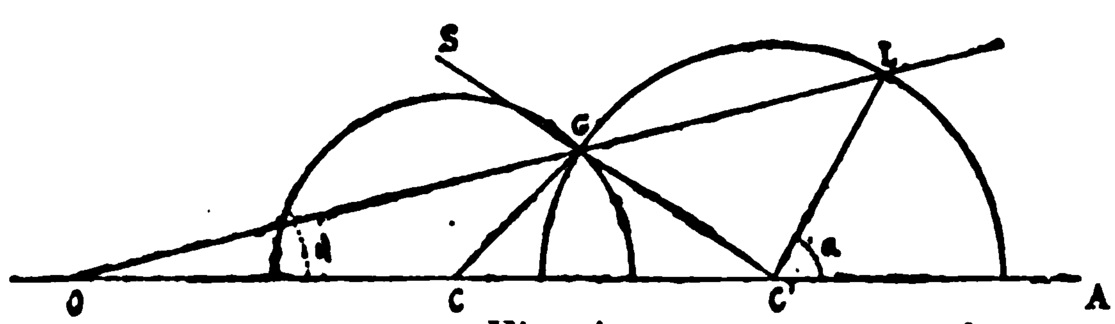


Fig. 4

supplément CGS a pour bissectrice GO d'après la proportion

$$\frac{CG}{CO} = \frac{C'G}{C'O}.$$

On a donc

$$CGC' = \pi - 2\,(CGO),$$

et d'autre part

$$\frac{\sin CGO}{\sin COG} = \frac{CO}{CG},$$

$$\frac{\sin CGO}{\sin \lambda} = \frac{r}{Br},$$

$$\sin CGO = \frac{\sin \lambda}{\sin b}.$$

Il vient d'après cela

$$\sin CGC' = \sin 2\,(CGO) = 2\,\frac{\sin\lambda}{\sin b}\sqrt{1-\frac{\sin^2\lambda}{\sin^2 b}}$$

$$= \frac{2\sqrt{(1-\cos^2\lambda)(\cos^2\lambda-\cos^2 b)}}{\sin^2 b},$$

expression dans laquelle il suffira de substituer successivement les N valeurs (10) de $\cos\lambda$.

24. Nous pouvons également évaluer les longueurs respectives des divers arcs du cloisonnement.

Ce sont en effet les différences consécutives des arcs tels que $\alpha = AL$, interceptés sur le cercle central entre l'axe polaire OA et les diverses lignes de latitude OL. Or nous avons

$$AC'L - AOL = CL'O = CGO\,,$$

et par conséquent, d'après les valeurs précédentes,

$$\sin(\alpha-\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\sin b}\,.$$

§ IV

Mouvement nautiloïde

25. Le nautile que nous venons d'étudier avec détail : vectoriel, à front méridien, directrice spirale, et génératrice circulaire, n'est pas le seul type que cette analyse nous permette de rattacher à l'aspect extérieur du coquillage de ce nom. Nous en rencontrerons encore d'autres qui se rapprocheront de plus en plus exactement de cette ressemblance : nautiles à front normal, à front oblique, sphéro-nautile. Il sera toutefois inutile de reprendre pour chacun d'eux cette description si complexe.

Revenons pour le moment à une plus grande généralité, et tout en conservant le caractère vectoriel et la spirale logarithmique comme directrice, reprenons une génératrice quelconque (et non plus circulaire), avec une inclinaison frontale constante (mais non plus nulle).

Dans ces conditions, le rayon vecteur OM de la spirale (fig. 1), la tangente en son extrémité, la trace du plan de front, ce plan

lui-même, la ligne génératrice qu'il contient, l'ordonnée N*n* d'un de ses points, ainsi que le rayon vecteur O*n* de la projection équatoriale de ce dernier, constituent ce que j'appellerai un *édifice géométrique*, immuable de forme, conservant sans altération chacun de ses angles pendant le mouvement générateur, mais amplifiant homothétiquement toutes ses dimensions par rapport au centre de similitude M, à l'unisson du rayon vecteur OM, c'est-à-dire suivant une progression géométrique, tandis qu'il tourne d'après une progression arithmétique autour de l'axe zénithal O.

Je regarde comme *fondamentale* pour cet ordre de recherches la conception de cet édifice géométrique, dans lequel nous pourrons successivement, à l'occasion de chacune des questions distinctes, *incruster*, pour en faire partie intégrante, les divers éléments de ces questions, *à la condition essentielle qu'ils relèvent eux mêmes de la similitude*, c'est-à-dire conservent les angles et les rapports de dimensions.

C'est d'ailleurs de cette manière que l'on pourrait, même en géométrie plane pour l'étude de la spirale logarithmique, tout faire dépendre de la similitude de la figure élémentaire constituée par deux rayons vecteurs infiniment voisins avec les tangentes menées sous un angle immuable en leurs extrémités. La considération de cet *édifice plan*, auquel on rattacherait chaque fois les éléments des diverses questions qui ont été traitées sur cette belle courbe, me paraît être la *raison profonde* de tant de remarquables propriétés, et de son extraordinaire persistance à se reproduire toujours la même [1], toutes les fois que l'on exécute sur elle des constructions dépendant uniquement de la similitude; au point que cette incessante réapparition finit par devenir en quelque sorte banale, et fatigante par son élégance même.

Il convient, d'après ces vues, de commencer par approfondir les propriétés générales du *mouvement nautiloïde* de cet édifice, c'est-à-dire en définitive d'une figure quelconque. On ne rencontre pas cette étude dans la cinématique classique, par la raison que celle-ci n'envisage que des solides invariables, tandis qu'il s'agit essentiellement ici de figures déformables.

26. Considérons (fig. 5) le déplacement d'une droite quelconque de longueur finie, depuis une position PQ jusqu'à une

---

(1) *Eadem mutata resurgo* (Jacques Bernoulli).

autre P'Q', avec changement d'orientation et de grandeur tout à la fois.

Nous allons reconnaitre qu'une pareille transposition peut toujours être effectuée par un *mouvement nautiloïde,* c'est-à-dire en faisant décrire par P et Q, autour d'un même pôle O, deux angles égaux, en parcourant deux spirales logarithmiques PP', QQ', donées d'un même angle caractéristique a.

L'angle $\alpha = POP'$ dont tournent à la fois les trois côtés du triangle inconnu OPQ pour venir, avec dilatation, occuper l'emplacement OP'Q' nous est immédiatement connu en

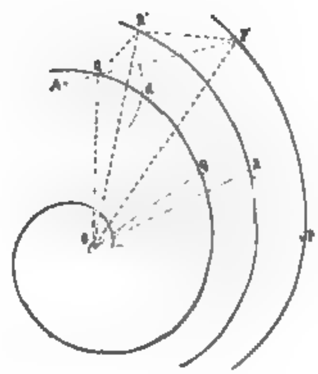


Fig 5

$$\alpha = PAP'.$$

Il doit d'ailleurs satisfaire aux relations

$$e^{\alpha \cot g\, a} = \frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{P'Q'}{PQ},$$

dont le dernier membre nous est également donné. L'angle caractéristique a des spirales se trouve ainsi déterminé.

D'autre part, on voit que le point O appartient nécessairement à deux segments capables de l'angle α, décrits respectivement sur PP' et QQ'. Il se trouve donc lui-même déterminé ([1]).

27. Supposons maintenant qu'une figure quelconque se meuve dans son propre plan d'une manière arbitraire, mais sous la condition de rester semblable à elle même; et analysons les circonstances de son déplacement instantané.

Cette figure, quelle qu'elle soit, se trouvera complètement déterminée par une de ses droites PQ. En effet, appelons R un quelconque de ses points. On peut le rattacher à cette droite par un triangle PQR qui devra rester semblable à lui-même,

---

([1]) C'est d'ailleurs sans aucune ambiguité, bien que deux cercles se coupent en deux points, car on sait que la seconde se rapporte aux segments capables de l'angle supplémentaire $\pi - \alpha$, et non plus α.

et que l'on saura par suite construire en P'Q'R' une fois que l'on counaitra la seconde position P'Q' de PQ.

Or cette droite peut être amenée en P'Q' par un mouvement nautiloïde d'un certain pôle O et d'un angle caractéristique *a*. Dès lors, dans le triangle OPR (fig. 5), qui devient OP'R', le rayon vecteur OR tourne jusqu'en OR', du même angle que OP pour venir en OP', puisque l'angle ROP = R'OP'. De plus le rapport de OR à OR' est le même que celui de OP à OP', d'après la similitude de ces triangles. Le point R parvient donc en R' par une spirale de même pôle et de même angle. De là se dégage la conclusion suivante :

Dans le mouvement instantané d'une figure plane qui se déforme en restant semblable à elle-même, les divers points se déplacent le long de spirales logarithmiques égales et de même pôle.

28. Tous les points s'échappent donc simultanément de leurs positions actuelles avec des vitesses proportionnelles à leurs distances au pôle et sous le même angle par rapport à ces rayons vecteurs.

On peut dès lors décomposer ces vitesses suivant le rayon et sa perpendiculaire à l'aide de triangles rectangles semblables entre eux, dont les composantes respectives seront dès lors toutes proportionnelles. En d'autres termes, un mouvement élémentaire de similitude peut toujours être décomposé en deux autres : 1° une rotation sans déformation autour d'un pôle instantané; 2° une déformation homothétique par rapport à ce pôle sans rotation [1].

Si l'on fait connaitre la direction des vitesses de deux points, ainsi que le rapport de leurs deux composantes, la valeur de ce dernier fait connaitre l'angle caractéristique des spirales. Si alors on trace deux rayons formant cet angle avec les directions des vitesses, ils détermineront par leur intersection le pôle instantané.

Une fois celui-ci connu, l'on en déduira pour tout autre point la direction de sa vitesse, en menant son rayon vecteur et faisant avec lui l'angle en question. Si l'une des deux vitesses est en outre donnée en grandeur, on obtiendra par proportion toutes les autres.

---

[1] Lorsque la figure reste indéformable, la seconde composante disparait, et l'on retrouve le théorème du centre instantané de rotation de la cinématique classique.

29. Après ce déplacement des points, envisageons celui des droites liées à la figure qui est animée d'un mouvement nautiloïde.

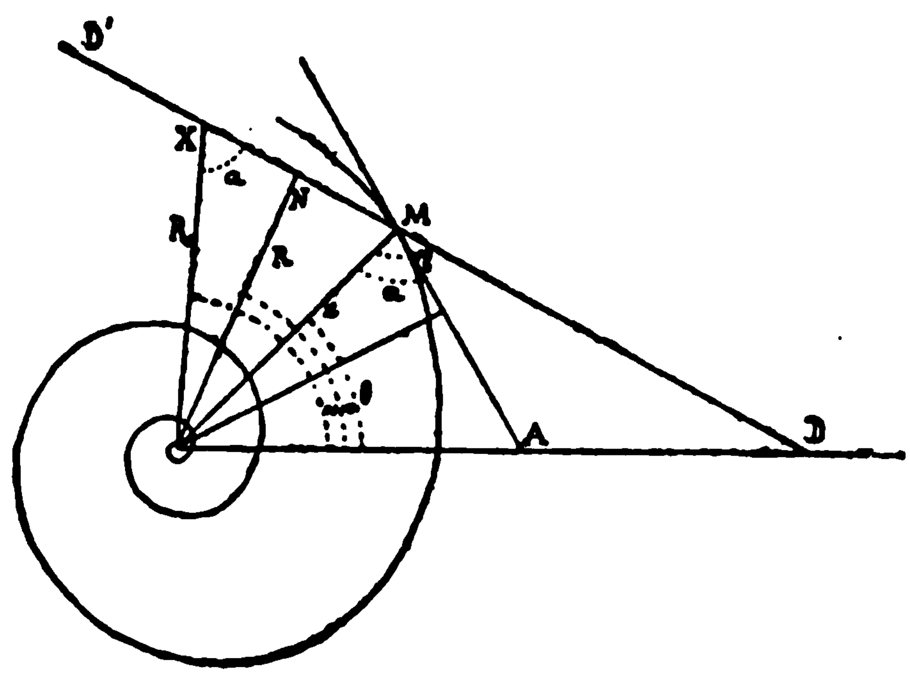


Fig. 6

Traçons une quelconque des spirales décrites par les points de l'édifice géométrique (fig. 6). La droite considérée DD' la rencontre en M sous un certain angle b. Soient r, θ les coordonnées de ce point, et R, ω celles d'un point quelconque N de la droite. Abaissons la perpendiculaire OP. Pour établir l'équation de DD' nous écrivons

$$\text{NO} \,.\, \cos \text{NOP} = \text{OP} = \text{MO} \,.\, \cos \text{MOP}\,,$$

$$\text{NOP} = \omega - \left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - b\right)\right] = \frac{\pi}{2} - (\theta - \omega + b),$$

$$\text{MO} \,.\, \cos \text{MOP} = r \sin \text{OMP}\,,$$

et finalement

$$\text{(14)} \qquad \text{R} \sin (\theta - \omega + b) = e^{\text{A}\theta} \sin b\,.$$

La recherche de l'enveloppe de cette droite se fera en éliminant le paramètre θ entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à lui

$$\text{(15)} \qquad \text{R} \cos (\theta - \omega + b) = \text{A} e^{\text{A}\theta} \sin b\,.$$

On en déduit

$$\operatorname{tang} (\theta - \omega + b) = \frac{1}{\text{A}} = \operatorname{tang} a\,,$$

$$\theta = \omega + a - b\,,$$

d'où, en reportant cette valeur dans l'équation (14)

$$\text{R} = \frac{\sin b}{\sin a} e^{\text{A}(a-b)} \,.\, e^{\text{A}\omega}\,.$$

On y reconnait une spirale identique à toutes les trajectoires, mais déviée par rapport à celle du point M de l'angle

$$\Delta = \text{tang}\, a \,.\, \text{Log}\left[\frac{\sin b}{\sin a} e^{A(a-b)}\right].$$

30. Quant au point de contact X de la droite avec son enveloppe, il est fourni par l'intersection de cette ligne avec sa position infiniment voisine. Ses coordonnées seront donc données par les deux équations (14) et (15). Or nous avons déja trouvé par leur élimination

$$\omega_0 = \theta + a - b,$$

et il en résulte

$$R_0 = r\,\frac{\sin b}{\sin a}.$$

On peut même se dispenser de ce calcul en remarquant qu'il suffit de mener par le pôle une droite OX faisant avec DD′ l'angle a, puisque cette droite jouera en X le rôle de rayon vecteur, et DD′ celui de tangente de la spirale logarithmique.

31. Imaginons maintenant une figure à trois dimensions dont la trace équatoriale se trouve animée dans son plan d'un mouvement nautiloïde. Le déplacement dans l'espace restera gouverné par les propriétés précédentes.

La seule modification dans les énoncés (mais elle est essentielle) consiste en ce que les trajectoires des points qui restent homologues, au lieu d'être comme ci-dessus des spirales logarithmiques, deviennent des cônhélices. En effet, pour chacune d'eux l'altitude z s'amplifie dans le même rapport que R, puisque tout l'édifice géométrique conserve sans altération ses divers rapports de dimensions. Il en sera dès lors de même de l'angle que fait cette droite avec l'horizon, à la surface du cône de latitude sur lequel elle se trouve tracée.

§ V

Equation des surfaces nautiloïdes

32. On peut, d'une manière générale, ramener au type du nautiloïde à front méridien la surface engendrée par le mouve-

ment nautiloïde d'une ligne quelconque S, plane ou gauche, liée comme édifice géométrique au rayon vecteur d'une spirale logarithmique.

En effet chacun de ses points parcourt dans l'espace une cônhélice, et la surface engendrée se trouve entièrement sillonnée du système de ces trajectoires. Coupons la par un plan méridien, et soit s la section. Lions cette ligne plane au rayon OM et à la courbe S; puis recommençons le mouvement nautiloïde de cet édifice ainsi complété. Les divers points de s devront pour cela décrire des cônhélices qui sont complètement déterminées par la spirale directrice, et ne sauraient par suite différer de l'ensemble précédent. La surface nautiloïde sera donc susceptible de ce nouveau mode de génération (s), aussi bien que du premier (S).

33. Or, sous cette forme simplifiée, il nous est facile de former l'équation générale de cette famille de surfaces.

Nous avons en effet trouvé pour une surface *quelconque* à front méridien (5)

$$R = F(\omega) + \varphi(\omega) f\left[\frac{z}{\varphi(\omega)}\right].$$

Si la directrice est une spirale logarithmique, il vient

$$R = e^{A\omega} + \varphi(\omega) f\left[\frac{z}{\varphi(\omega)}\right].$$

Si de plus la surface est vectorielle, nous remplaçons φ par le rayon vecteur

$$R = e^{A\omega}[1 + f(ze^{-A\omega})].$$

Mais il devient dès lors inutile de conserver en évidence la trace de la fonction f, et nous pouvons remplacer par ϕ le symbole $1 + f$ de fonction arbitraire, ce qui donne plus simplement

$$R = e^{A\omega} \phi(ze^{-A\omega}). \tag{16}$$

Telle est l'équation d'un nautiloïde quelconque ayant pour génératrice, dans le premier méridien ($\omega = 0$), le profil

$$R = \phi(z).$$

On peut également lui donner une seconde forme, en désignant par Ψ la fonction inverse de ϕ. La méridienne initiale

devient alors

$$z = \Psi(R),$$

et l'équation de la surface

$$z = e^{A\omega}\,\Psi\left(Re^{-A\omega}\right). \tag{17}$$

34. On sait que les familles classiques de surfaces dont l'équation générale renferme une fonction arbitraire peuvent être caractérisées chacune par une équation différentielle partielle unique du premier ordre. Il nous est aisé de formuler celle des nautiloïdes.

La relation (17) donne, en la différentiant par rapport à R

$$ze^{-A\omega} = \Psi\left(Re^{-A\omega}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial R}e^{-A\omega} = e^{-A\omega}\,.\,\Psi'\left(Re^{-A\omega}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial R} = \Psi'\left(Re^{-A\omega}\right);$$

et d'autre part, en différentiant relativement à ω

$$e^{-A\omega}\frac{\partial z}{\partial \omega} - Aze^{-A\omega} = \left(-ARe^{-A\omega}\right)\Psi'\left(Re^{-A\omega}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} - Az = -AR\,\Psi'\left(Re^{-A\omega}\right),$$

d'où l'on déduit

$$R\frac{\partial z}{\partial R} + \frac{\partial z}{\partial \omega}\operatorname{tang} a = z. \tag{18}$$

Telle est l'équation cherchée ([1]).

35. Il est facile, au moyen du changement de variables, de

([1]) Il ne saurait être question d'élever l'objection qu'un changement de coordonnées relevant le plan horizontal, aurait pour effet de modifier le second membre sans changer le premier. Cette analyse suppose en effet essentiellement que le plan de l'équateur passe par les centres de similitude, et se trouve ainsi absolument déterminé.

la transcrire dans le système rectangulaire

$$(x \cos a - y \sin a)\frac{\partial z}{\partial x} + (x \sin a + y \cos a)\frac{\partial z}{\partial y} = z \cos a .$$

On peut également écrire, en introduisant la longitude ω

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos(\omega + a) + \frac{\partial z}{\partial y}\sin(\omega + a) = \frac{z}{R}\cos a .$$

D'ailleurs les quantités $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}$ représentent les inverses $\frac{1}{S_x}$, $\frac{1}{S_y}$ des sous-tangentes des sections faites par des plans parallèles aux plans verticaux de coordonnées. Nous écrirons donc

$$\frac{\cos(\omega + a)}{S_x} + \frac{\sin(\omega + a)}{S_y} = \frac{\cos a}{R} .$$

Associons (fig. 7) au plan méridien ZOn du point N de la surface, la seconde face ZOA d'un dièdre *immuable* a, et prenons sa trace équatoriale OA comme axe de projections. Cette dernière relation s'interprète alors de la manière suivante:

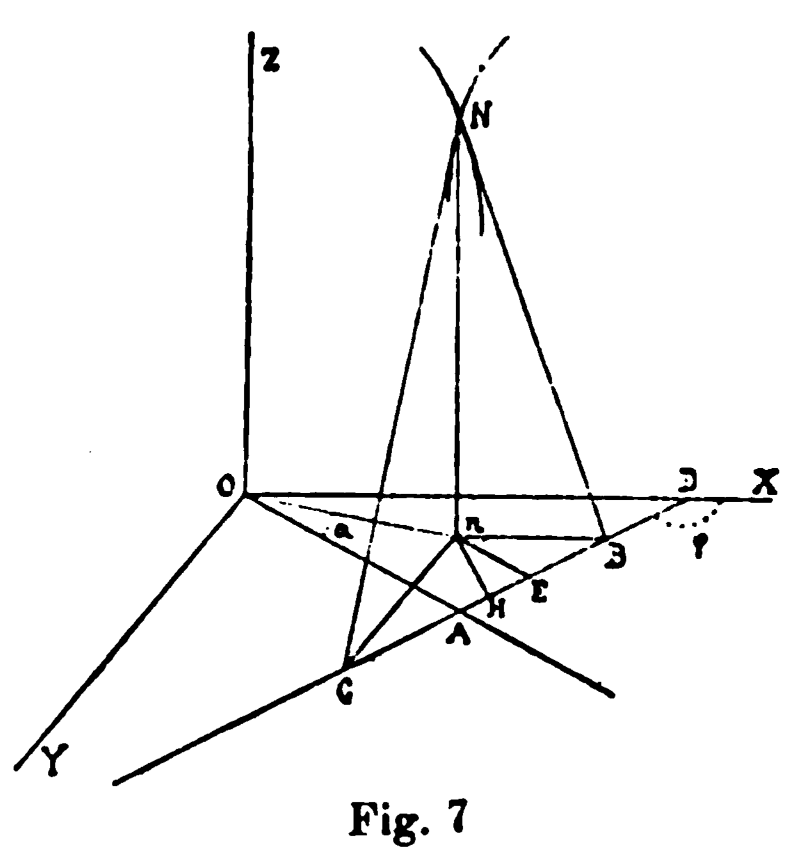


Fig. 7

Dans toute surface nautiloïde, la projection sur l'axe ainsi défini de l'inverse du rayon vecteur On est la somme des projections des inverses des sous-tangentes des sections faites par deux plans méridiens rectangulaires quelconques ([1]).

Mentionnons encore une autre interprétation de l'équation différentielle partielle. La droite BC qui joint les extrémités des sous-tangentes nB, nC n'est autre que la trace du plan tangent en N, qui doit contenir toutes les tangentes à la surface. En

([1]) Car on peut toujours adopter des plans coordonnés qui leur soient parallèles.

appelant φ l'angle que fait cette droite avec la partie positive de l'axe des abscisses, et h la hanteur nH du triangle nBC, nous aurons

$$S_x = \frac{h}{\sin\varphi}, \qquad S_y = -\frac{h}{\cos\varphi},$$

d'où par conséquent

$$\cos(\omega + a)\sin\varphi - \sin(\omega + a)\cos\varphi = \frac{h}{R}\cos a,$$

$$\frac{R}{\cos a} = \frac{h}{\sin[\varphi - (\omega + a)]} = \frac{h}{\sin(\text{ADX} - \text{AOX})} = \frac{h}{\sin \text{OAD}}.$$

Menons par n la parallèle nE à l'axe OA, il nous viendra

$$\frac{On}{\cos nOA} = \frac{nH}{\sin nEA},$$

ou enfin, en élevant en n la perpendiculaire nF au rayon vecteur

$$OF = nE.$$

De là cet énoncé:

La portion de l'axe OA qui se projette orthogonalement sur le rayon vecteur On est égale à la distance de ce point n à la trace du plan tangent en N comptée parallèlement à cet axe OA.

36. On envisage d'ordinaire, pour les familles de surfaces, deux problèmes généraux, qui consistent à faire passer une surface de cette catégorie par une courbe donnée ou à en circonscrire une à une surface assignée. Nous pouvons tracer la marche propre à résoudre ces questions en ce qui concerne les nautiloïdes.

Pour la première, nous commencerons par ramener les équations de la courbe donnée à la forme

$$z = F_1(R), \qquad R = F_2(\omega).$$

La première est celle de la surface de révolution qu'elle décrirait en tournant autour de l'axe zénithal; la seconde celle du cylindre qui la projette sur le plan équatorial.

En substituant ces valeurs dans l'équation générale des nautiloïdes (16), il vient

$$F_2(\omega) = e^{A\omega}\,\phi\left\{e^{-A\omega} . F_1[F_2(\omega)]\right\}.$$

Envisageons comme une variable auxiliaire μ la quantité subordonné à la fonction inconnue φ

$$\mu = e^{-A\omega} F_1 [F_2 (\omega)] ,$$

et résolvons cette relation sous la forme

$$\omega = F_3 (\mu) ,$$

il viendra

$$\varphi (\mu) = e^{-AF_3(\mu)} . F_2 [F_3 (\mu)] ,$$

ce qui détermine la fonction qui permettra d'écrire l'équation du nautiloïde.

37. Proposons nous en second lieu de circonscrire un nautiloïde à la surface

(19) $$F_4 (R, \omega, z) = 0 .$$

En leurs divers points de contact, les coefficients différentiels $\frac{\partial z}{\partial R}$, $\frac{\partial z}{\partial \omega}$ seront les mêmes pour toutes les deux. Or, sur la proposée, ils prennent les valeurs

$$\frac{\partial z}{\partial R} = -\frac{\frac{\partial F_4}{\partial R}}{\frac{\partial F_4}{\partial z}} , \qquad \frac{\partial z}{\partial \omega} = -\frac{\frac{\partial F_4}{\partial \omega}}{\frac{\partial F_4}{\partial z}} .$$

Pour le nautiloïde, ils doivent satisfaire à l'équation différentielle partielle (18), qui deviendra par cette substitution

$$R \frac{\partial F_4}{\partial R} + \text{tang}\, a \frac{\partial F_4}{\partial \omega} + z \frac{\partial F_4}{\partial z} = 0 .$$

Nous obtiendrons ainsi, en joignant cette égalité à la formule (19), les deux équations de la courbe de contact.

Il suffit dès lors de la prendre comme directrice pour rentrer dans les conditions du problème précédent (N° 36).

§ VI

Plan tangent

38. Revenons maintenant aux surfaces à front générateur de directrice et de génératrice quelconques, en les supposant encore vectorielles et d'inclinaison frontale constante, pour nous proposer la recherche de leur plan tangent. Nous le considérerons comme déterminé par la tangente de la ligne de latitude constante, et par celle de la génératrice. Envisageons successivement ces deux droites.

Je rappelle (N° 8) que, dans ces conditions, la ligne de latitude a pour projection équatoriale une courbe semblable à la directrice. Le rayon vecteur $R = On$ de cette projection (fig. 8) reste donc proportionnel à $r = OM$, et la tangente nt fait avec lui un angle $Ont = OMT$. Nous savons d'après cela construire en nt la projection de la tangente de la ligne de latitude.

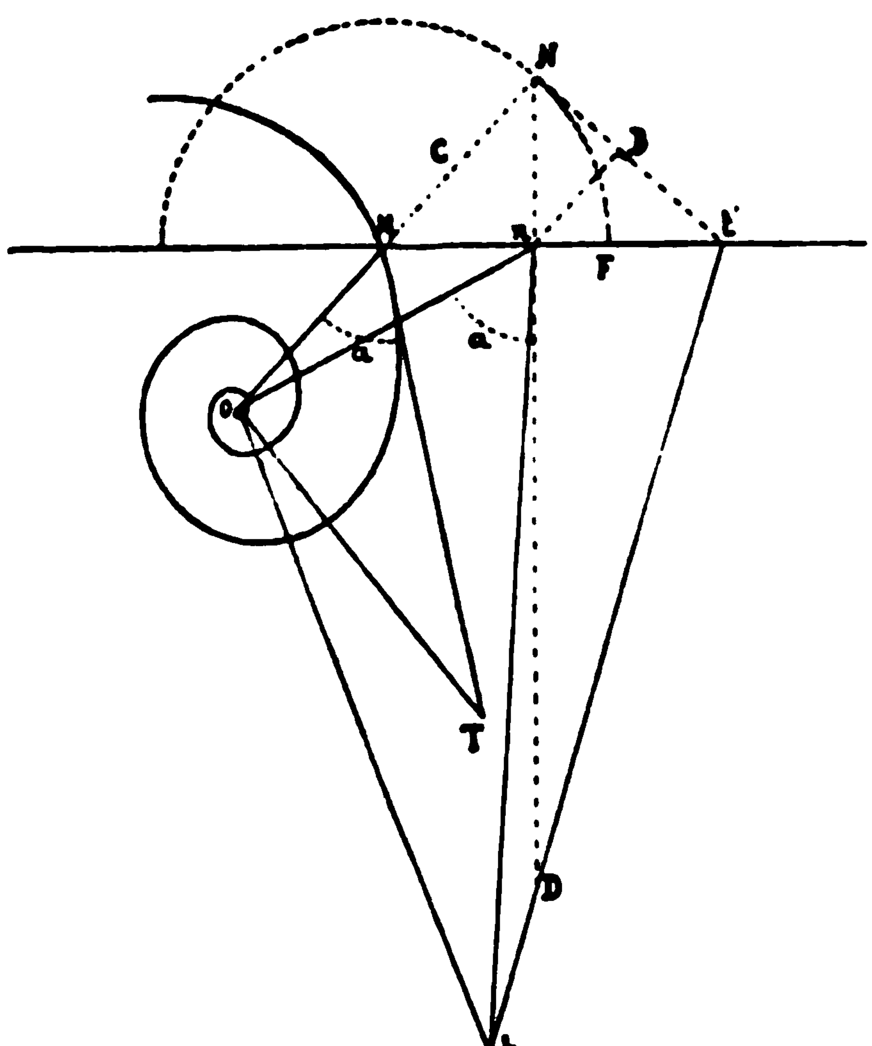


Fig. 8

Nous en pouvons également déterminer la trace t, c'est-à-dire la sous-tangente $S = nt$. En effet l'altitude z de N devient $z + dz$ par un mouvement élémentaire amenant ce point en N'. En même temps r et R acquièrent les valeurs $r + dr$, $R + dR$. Pour assurer la similitude d'ensemble, ces divers accroissements doivent se régler conformément aux proportions

$$\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} = \frac{dR}{R}.$$

Or la sous-tangente S est donnée par la relation

$$\frac{S}{z} = \frac{nn'}{dz}.$$

Mais on a d'un autre côté

$$\frac{nn'}{MM'} = \frac{R}{r}, \qquad \frac{dz}{dr} = \frac{z}{r},$$

et par conséquent

$$(20) \qquad S = R \cdot \frac{MM'}{dr} = \frac{R}{r}\left(r \frac{MM'}{dr}\right).$$

Si l'on appelle T la longueur MT interceptée sur la tangente de la directrice par la perpendiculaire élevée à partir du pôle sur son rayon vecteur OM, elle sera fournie par la proportion

$$\frac{T}{r} = \frac{MM'}{dr}.$$

Il vient donc

$$S = \frac{R}{r} T.$$

Or il nous suffit d'élever en O la perpendiculaire Ot sur le rayon vecteur On de la projection n pour constituer en Ont un triangle semblable à OMT. C'est par conséquent la longueur nt ainsi interceptée sur la tangente qui mesurera la sous-tangente S, et fournira en t la trace de la tangente à la trajectoire de N dans l'espace ([1]).

Indépendamment de cette construction géométrique, nous possédons également (20) l'expression analytique de cette sous tangente sous la forme

$$(21) \qquad S = R\sqrt{1 + \frac{r^2 d\theta^2}{dr^2}} = R\sqrt{1 + \frac{F^2}{F'^2}}.$$

39. Si l'on veut déterminer le lieu géométrique de ces traces t pour une cônhélice, il suffit de remarquer que le rayon vecteur Ot reste proportionnel à R, et par suite à z; qu'en outre il est séparé de ce dernier par l'angle constant MOn

---

([1]) Remarquons à cette occasion que cette construction des angles OMT, Ont, tous égaux entre eux pour les divers points n du front FF' est bien conforme à la loi trouvée ci-dessus (N° 29) pour le mouvement instantané d'une figure qui reste semblable à elle-même.

augmenté d'un quadrant. Ce lieu est donc semblable à la directrice.

On peut exprimer autrement ce résultat. Concevons en effet les surfaces développables qui ont pour arêtes de rebroussement les diverses lignes de latitude et sont formées par l'ensemble des tangentes de chacune d'elles. Ces surfaces auront toutes, d'après ce qui précède, leur trace équatoriale semblable à la directrice.

40. Envisageons en second lieu la tangente Nt' de la génératrice. Elle doit, au point de vue graphique, être considérée comme directement connue.

Nous en possédons en outre le détermination analytique, d'après le valeur S' de la sous-tangente nt' qu'elle intercepte sur la trace du plan de front. Elle est fournie par la proportion

$$\frac{S'}{z} = \frac{d\xi}{dz}.$$

Si donc nous différentions l'équation (1) de la génératrice entre ξ et z, en considérant θ et r comme des paramètres constants, l'on pourra écrire

$$S' = zf'\left(\frac{z}{r}\right). \tag{22}$$

41. La trace du plan tangent s'obtient en joignant celles des deux tangentes précédentes, c'ast-à-dire en tirant tt'. La figure (8) devient ainsi, à proprement parler, une épure, très élémentaire, de géométrie descriptive, ayant pour ligne de terre la trace du front FF'. Le plan tangent s'y trouve représenté, suivant le mode ordinaire, par ses deux traces $t't$ et $t'N$.

La normale le sera de son coté par les perpendiculaires nB, NC abaissées des projections N, n du point de contact sur les traces du plan.

Nous pouvons exprimer analytiquement les angles h, v compris entre les traces horizontale et verticale du plan tangent et celle du front; ainsi que les dièdres H, V que forme ce dernier avec les plans de l'équateur et du front.

On a en premier lieu dans le triangle Nnt'

$$\operatorname{tang} v = \frac{z}{S'}.$$

Il vient ensuite dans le triangle ntt'

$$\frac{\sin nt't}{nt} = \frac{\sin ntt'}{nt'},$$

c'est-à-dire

$$\sin h = \frac{S}{S'} \sin (Mnt - h).$$

Or on peut écrire

$$Mnt = \left(\frac{\pi}{2} - i\right) + [i - (\theta - \omega)] = \frac{\pi}{2} - (\theta - \omega),$$

et par conséquent

$$\sin h = \frac{S}{S'} \cos (\theta - \omega + h),$$

$$\frac{S'}{S} \sin h = \cos (\theta - \omega) \cos h - \sin (\theta - \omega) \sin h.$$

Mais d'ailleurs

$$\frac{\sin (\theta - \omega)}{Mn} = \frac{\sin OMn}{On},$$

$$\sin (\theta - \omega) = \frac{\xi}{R} \sin i.$$

Nous avons donc en définitive

$$\tang h = \frac{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R^2} \sin^2 i}}{\frac{S'}{S} + \frac{\xi}{R} \sin i} = \frac{S\sqrt{R^2 - \xi^2 \sin^2 i}}{S'R + S\xi \sin i}.$$

Quant aux angles dièdres, il nous vient par les formules de la trigonométrie sphérique appliquées au trièdre rectangle $t'nNt$

$$\tang H = \frac{\tang v}{\sin h}, \qquad \tang V = \frac{\tang h}{\sin v}.$$

On peut d'ailleurs obtenir cette même détermination d'après les triangles rectangles *de l'espace* DnE, NnB.

42. Ces diverses formules étant homogènes par rapport a des quantités qui restent elles-mêmes proportionnelles le long d'une même trajectoire de latitude constante, on voit que les quatre angles ainsi déterminés restent de leur côté invariables sur ce parcours.

Remarquons notamment que le plan tangent conservant une inclinaison constante sur l'horizon, enveloppe le long de cette trajectoire une *surface-talus*, telle que les contreforts géologiques que dessinent les anciens éboulis sur le flanc des montagnes.

43. Si l'on se donne directement les uns ou les autres des quatre angles h, v, H, V, on pourra constituer ainsi différents modes de détermination du plan tangent d'après ces diverses données. Nous possédons leurs valeurs en fonction de S, S', ξ, R. z. Mais nous avons d'ailleurs en fonction de θ celles (21), (22), de S, S', ainsi que (1) de ξ.

Or nous pouvons déterminer, pour un point N (R, ω, λ) de la surface, le point M (r, θ) de la directrice par lequel passe le plan de front de N. En d'autres termes, nous avons à évaluer θ en fonction de R, ω, λ.

Le triangle MOn nous donne à cet effet

$$\frac{\sin \mathrm{MO}n}{\mathrm{M}n} = \frac{\sin \mathrm{OM}n}{\mathrm{O}n},$$

$$\sin(\theta - \omega) = \xi \frac{\sin i}{\mathrm{R}} = \frac{\sin i}{\mathrm{R}} . rf\left(\frac{z}{r}\right),$$

et par conséquent:

$$\mathrm{R} \sin(\theta - \omega) = \sin i . \mathrm{F}(\theta) f\left[\frac{z}{\mathrm{F}(\theta)}\right],$$

équation à résoudre dans chaque cas par rapport à θ, lorsque seront spécifiées les fonctions F et f.

44. Nous pouvons finalement représenter le plan tangent par son équation en coordonnées rectangulaires X, Y, Z. Nous le considérerons à cet effet comme déterminé par les trois points N, t, t'.

J'appelle x_1, y_1; x_2, y_2 les coordonnées de ces deux traces dans le plan équatorial. La droite tt' aura pour équation

$$(\mathrm{Y} - y_1)(x_2 - x_1) = (\mathrm{X} - x_1)(y_2 - y_1).$$

Celle du plan lui-même sera donc de la forme

$$(Y - y_1)(x_2 - x_1) - (X - x_1)(y_2 - y_1) = mZ,$$

et le coefficient inconnu m se déterminera en obligeant ce plan à passer par N, ce qui donne

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (X - x_1)(y_2 - y_1) = mz.$$

En divisant membre à membre, nous obtiendrons donc l'équation du plan tangent. Il suffit par conséquent de connaitre les quatre coordonnées x_1, y_1; x_2, y_2.

On a pour le point t

$$x_1 = Ot \cos tOA = On \operatorname{tang} Ont \sin nOA,$$

$$y_1 = Ot \sin tOA = On \operatorname{tang} Ont \cos nOA.$$

Mais l'angle Ont que comprennent la tangente et le rayon vecteur est le même pour les deux courbes semblables (n) et (M) (N° 8). Il vient donc

$$\operatorname{tang} Ont = \frac{F}{F'},$$

et par conséquent

$$x_1 = R\frac{F}{F'}\sin\omega = \frac{F}{F'}y, \qquad y_1 = R\frac{F}{F'}\cos\omega = \frac{F}{F'}x.$$

Nous avons d'autre part en ce qui concerne le point t'

$$x_2 = R\cos\omega + S'\cos(\theta - i) = x + zf'\left(\frac{z}{F}\right)\cos(\theta - i),$$

$$y_2 = R\sin\omega + S'\sin(\theta - i) = y + zf'\left(\frac{z}{F}\right)\sin(\theta - i).$$

On remplacera θ ainsi qu'il vient d'être dit (N° 43), et l'on aura, entre les coordonnées X, Y, Z, l'équation du plan tangent au point (x, y, z).

45. Cette théorie convient en particulier à la famille des nautiloïdes de génératrice quelconque. Il s'opère alors quelques simplifications.

Les projections des trajectoires, que nous savons être tou-

jours semblables à la directrice, lui deviennent maintenant égales, avec des déviations variées. La sous-tangente de cette cônhélice est alors égale à l'arc de la spirale logarithmique qui en est la projection, compté à partir du pôle. Les traces des surfaces-talus circonscrites au nautiloïde suivant ses cônhélices sont elles-mêmes des spirales logarithmiques égales mais déviées.

§ VII

Nautile à front normal

46. Le nautile que nous avons étudié en détail (§ III), présente sa section circulaire dans le plan méridien. Pour obtenir un type convenablement rapproché du genre *Nautilus*, tel que nous l'offre la conchyliologie, cette solution peut avoir quelque intérêt si l'angle a est suffisamment voisin du quadrant, c'est-à-dire la spirale logarithmique assez *lente*. Mais à coup sûr l'assimilation échouerait avec une directrice *rapide*. Cette première solution reste donc entachée d'une certaine insuffisance.

Pour nous en affranchir nettement, nous substituerons à la condition du front méridien ($i = 0$) celle du front normal

$$i = \frac{\pi}{2} - a.$$

Dans ce but, nous commencerons par reprendre, avec cette nouvelle détermination de i, une entière généralité, c'est-à-dire une directrice F, une génératrice f, et une loi de similitude φ arbitraires.

47. La position normale nous donne

$$\tan i = \cot a = \frac{F'}{F}.$$

L'équation (2) de la trace du front devient donc

$$R\left[\sin(\omega - \theta)\cos i + \cos(\omega - \theta)\sin i\right] = F \sin i,$$

ou, en remplaçant $\sin i$ et $\cos i$ par les quantités proportionnelles F' et F

$$(23)\qquad R\left[F\sin(\omega - \theta) + F'\cos(\omega - \theta)\right] = FF'.$$

D'autre part la relation (3) prend la forme

$$(24)\quad R^2 = F^2 + \frac{2F^2\varphi}{\sqrt{F^2+F'^2}} f\left(\frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi}\right) + \varphi^2 f^2 \left(\frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi}\right).$$

Il n'y aura dès lors, pour obtenir en R, ω, λ, l'équation de la surface qu'a éliminer entre ces deux formules le paramètre θ compris sous les symboles F et φ.

48. Considérons comme application l'*anneau variable* engendré par une *génératrice quelconque* f avec une *loi de similitude également arbitraire* φ lorsque la directrice est un cercle passant par le pôle

$$r = \cos\theta .$$

La relation (23) nous donne alors

$$R[\sin(\omega-\theta)\cos\theta - \cos(\omega-\theta)\sin\theta] = -\sin\theta\cos\theta ,$$

$$R\sin(\omega-2\theta) = -\frac{1}{2}\sin 2\theta ,$$

$$R(\sin\omega\cos 2\theta - \cos\omega\sin 2\theta) + \frac{1}{2}\sin 2\theta = 0 ,$$

$$\left(R\cos\omega - \frac{1}{2}\right)\operatorname{tang} 2\theta = R\sin\omega ,$$

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2R\sin\omega}{2R\cos\omega - 1}\right).$$

D'autre part la formule (24) devient

$$R^2 = \cos^2\theta \left\{1 + 2\varphi(\theta) f\left[\frac{R\operatorname{tang}\lambda}{\varphi(\theta)}\right]\right\} + \varphi^2(\theta) f^2\left[\frac{R\operatorname{tang}\lambda}{\varphi(\theta)}\right].$$

L'élimination se trouve donc faite une fois pour toutes, dans ces conditions de complète généralité, par la substitution de la valeur précédente de θ [1].

[1] Il est essentiel de ne pas confondre cet anneau variable à front *normal* avec l'anneau variable à front *méridien* que nous obtiendrions en remplaçant, dans l'équation générale (S), le symbole F (ω) par cos ω.

49. Arrivons, comme seconde application, au *nautile à section normale circulaire*, en supposant a constant.

L'équation (23) de la trace du front devient alors

$$(25)\qquad R\cos(\theta-\omega+a)=e^{A\theta}\cos a\,.$$

La génératrice devenue un cercle de rayon Br sera représentée par la formule

$$(26)\qquad \xi=\sqrt{B^2r^2-z^2}=\sqrt{B^2e^{2A\theta}-R^2\operatorname{tang}^2\lambda}\,.$$

La relation (24) nous donne d'après cela

$$R^2=e^{2A\theta}+(B^2e^{2A\theta}-R^2\operatorname{tang}^2\lambda)+2e^{A\theta}\sin a\sqrt{B^2e^{2A\theta}-R^2\operatorname{tang}^2\lambda}\,,$$

$$R^2(1+\operatorname{tang}^2\lambda)-(B^2+1)e^{2A\theta}=2e^{A\theta}\sin a\sqrt{B^2e^{2A\theta}-R^2\operatorname{tang}^2\lambda}\,,$$

$$\left[\frac{R^2}{\cos^2\lambda}-(B^2+1)e^{2A\theta}\right]^2=4e^{2A\theta}\sin^2 a\,(B^2e^{2A\theta}-R^2\operatorname{tang}^2\lambda)\,,$$

ou en développant

$$[(B^2+1)^2-4B^2\sin^2 a]\,e^{4A\theta}$$
$$-\left[\frac{2(B^2+1)R^2}{\cos^2\lambda}-4R^2\sin^2 a\operatorname{tang}^2\lambda\right]e^{2A\theta}+\frac{R^4}{\cos^4\lambda}=0\,,$$

c'est-à-dire

$$(B^4+2B^2\cos 2a+1)\left(\frac{e^{A\theta}\cos\lambda}{R}\right)^4$$
$$-2\,[B^2+1-(1-\cos 2a)\sin^2\lambda]\left(\frac{e^{A\theta}\cos\lambda}{R}\right)^2+1=0\,.$$

Pour simplifier, représentons par c^2 la constante

$$(27)\qquad c^2=B^4+2B^2\cos 2a+1\,,$$

qui ne dépend que de A et B, c'est-à-dire a et b. Employons de même l'abréviation Λ pour désigner la fonction de la latitude λ qui forme le second coefficient de l'équation bicarrée

$$(28)\qquad \Lambda=\sin^2\lambda\cos 2a+\cos^2\lambda+\sin^2 b\,;$$

cette dernière prend alors la forme très simple

$$c^2\left(\frac{e^{A\theta}\cos\lambda}{R}\right)^4 - 2\Lambda\left(\frac{e^{A\theta}\cos\lambda}{R}\right)^2 + 1 = 0,$$

et donne par sa résolution

$$\left(\frac{e^{A\theta}\cos\lambda}{R}\right)^2 = \frac{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 - c^2}}{c^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{ce^{A\theta}\cos\lambda}{R} = \sqrt{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 - c^2}}.$$

Or il arrive précisément que ces radicaux superposés remplissent la condition qui rend possible leur décomposition en radicaux simples

$$c\sqrt{2}\cos\lambda\frac{e^{A\theta}}{R} = \sqrt{\Lambda + c} \pm \sqrt{\Lambda - c}.$$

On en déduit pour exprimer, soit r, soit θ, les deux formules

$$\frac{e^{A\theta}}{R} = \frac{\sqrt{\Lambda + c} \pm \sqrt{\Lambda - c}}{\sqrt{2}\,c\cos\lambda},$$

$$(29) \qquad \theta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log}\left[\frac{R}{\sqrt{2}\,c\cos\lambda}\left(\sqrt{\Lambda + c} \pm \sqrt{\Lambda - c}\right)\right].$$

Il suffit maintenant de les substituer dans la relation (25), en restituant en même temps aux abréviations Λ et c leurs significations respectives (28) et (27), pour obtenir, entre R, ω, λ, l'équation du *nautile à front normal circulaire.*

50. En y faisant $\omega = 0$, on obtiendra entre R et λ, ou R et z, l'équation de la courbe capable d'engendrer ce même nautile comme surface nautiloïde *à front méridien* (N° 32).

Si l'on coupe au contraire par un cône de latitude, λ devient constante, ainsi que Λ. L'exponentielle est alors proportionnelle à R, qui disparait de l'équation (25); mais il reparait par la substitution de la valeur (29) de θ. La formule exprime alors que ω est, sauf une constante, égal à Log R, ce qui est l'équation de la spirale logarithmique. Nous savons en effet que telle est la projection de la cônhélice.

Nous obtenons de plus les conditions de la réalité de cette intersection. Il nous faut en effet poser, pour assurer celle du second radical

$$\Lambda > c\,,$$

c'est-à-dire

$$\sin^2\lambda\cos 2a + \cos^2\lambda + B^2 - c > 0\,.$$

Si le cône de latitude commence par être très ouvert dans le voisinage de l'équateur, λ s'écarte peu de 90 degrés, et cette expression de

$$\cos 2a + B^2 - c\,,$$

quantité négative. On a en effet

$$(\cos 2a + B^2)^2 = B^4 + 2B^2\cos 2a + \cos^2 2a\,,$$

$$c^2 = B^4 + 2B^2\cos 2a + 1\,,$$

et ce dernier résultat est supérieur au précédent. Il faut donc que λ reste inférieure à la latitude limite λ_0 capable d'annuler l'expression ci-dessus

$$\sin^2\lambda_0\cos 2a + \cos^2\lambda_0 + B^2 - c = 0\,,$$

$$\tang\lambda_0 = \sqrt{\frac{1 + B^2 - c}{c - B^2 - \cos 2a}}\,.$$

Cette valeur fournira l'équation de la cônhélice de contact avec le cône limite; laquelle se dédouble ensuite en deux autres pour des latitudes moindres.

51. Si l'on remplaçait z par mz dans l'équation (26) du cercle générateur et dans la suite du calcul, on obtiendrait de même l'équation de la surface nautiloïde *à front normal elliptique;* type dont se rapprochent dans la nature fossile certaines ammonites.

(A suivre.)

MOLLUSQUES TERRESTRES DU PORTUGAL

PAR

AUGUSTO NOBRE

I

MONOGRAPHIE DES FAMILLES *PUPIDÆ* ET *STENOGYRIDÆ* (1)

FAM. IV — PUPIDÆ

Les animaux de cette famille ont, à peu près, la forme de la famille précédente, l'*Helicidæ*. Le corps est plus ou moins long, toujours pointu à l'extrémité caudale et plus ou moins tronqué à l'avant. La mâchoire est lisse ou finement striée et la radule constituée par une dent centrale tricuspidée, identique aux dents latérales; dents marginales transverses très courtes et denticulées. La coquille a une forme allongée ou courte, cylindrique ou plus ou moins conique, avec nombreux tours de spire et à ouverture arrondie ou subquadrangulaire parfois, portant des dents ou plis.

La famille des Pupidæ qui vivent en Portugal se compose de cinq genres:

Coquille oblongue conique, dextre perforée, à péristome réfléchi, tranchant, ouverture ovale-allongée, sans dents ni plis ... **G. Buliminus.**

---

(1) L'introduction à ce mémoire sera publiée avec la dernière monographie.

Coquille peu allongée, conique ou courte, cylindracée, dextre, perforée, avec une ou plusieurs dents à l'ouverture. Animal avec deux tentacules supérieurs et deux inférieurs **G. Pupa.**

Coquille cylindracée, petite, peu conique, perforée, dextre, sans dents ou avec plusieurs dents à l'ouverture. Animal seulement avec deux tentacules supérieurs **G. Vertigo.**

Coquille allongée, fusiforme, sénestre, perforée, fragile, faiblement striée, péristome tranchant, ouverture sans dents ni plis **G. Balea.**

Coquille assez allongée, fusiforme, sénestre, perforée, épaisse, fortement striée, péristome bordé, ouverture petite avec des plis, et un *clausilium*, plaque mobile qui obture l'intérieur du dernier tour **G. Clausilia.**

G. Buliminus Ehrenberg

Ce genre comprend une seule espèce.

Buliminus obscurus, Müller

Pl. I — Fig. 1 et 2

Helix obscura, Müller. — Linné, Syst. Nat., éd. Gmelin, 9.e, p. 208 (1794).

Bulimus obscurus, Müller. — Drap., Hist. Moll., p. 74, pl. 4, f. 23 (1805) — Rossmässler, Iconogr., 5e, p. 46, pl. 28, f. 386 (1887) — Morelet, Moll. Portugal, p. 73 (1845) — Graells, Cat. Mol. España, p. 7 (1846) — Gassies, Moll. Agenais, p. 112 (1849) — Dupuy, Hist. Moll., p, 318, pl. 15, f. 6 (1849) — Reeve. Conch. icon., V. pl. 87, f. 647 (1849) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2e, p. 291, pl. 21, f. 5-10 (1855) — Hidalgo, Cat. iconogr., p. 183 (1875) — Nobre, Moll. Coimbra, p. 10 (1886) — Locard, Conchyl. port., p. 136 (1899).

Animal assez petit, d'un brun roussâtre ou presque noir, sur le cou et la tête, plus clair sur les flancs et le pied et pigmenté de noir; pied sillonné par des lignes verticales; tronqué à la partie antérieure, large et terminé postérieurement en pointe; tentacules supérieurs longs, rugueux, avec le globe oculaire un peu dilaté; tentacules inférieurs d'un quart de la longueur totale des supérieurs, mamelonnés; haut. 5 à 6 m.m.: diam. 2 m.m. L'animal marche avec la coquille assez haute et un peu inclinée sur le côté droit.

Coquille turriculée, oblongue, conique, peu solide, comme veloutée et à peine luisante au sommet; spire composée de six tours un peu convexes, décroissant rapidement en diamètre de la région moyenne vers le sommet; surface de la coquille ornée

de stries très fines, nombreuses et très obliques; suture assez profonde; ouverture ovale allongée, parfois presque subquadrangulaire; un peu oblique; péristome interrompu à la partie supérieure, réfléchi et assez mince; cavité ombilicale assez étroite et recouverte par le bord columellaire; couleur brunâtre uniforme; labre blanchâtre. Long. 9-11 m.m.; diam. 2-3 m.m.

Hab. *Traz-os-Montes*. Environs de Bragança, rare (Morelet). Bragança, près des murailles du chateau; Macedo de Cavalleiros (Nobre).

Douro. Coïmbra (Aguiar. Rosa de Carvalho, Nobre, Castro). Condeixa, Fonte dos Amores (Coll. Mus. Lisbonne).

Extremadura. Thomar (Nobre).

Algarve. Serra de Monchique (Coll. Mus. Porto); assez commum.

Vit sous les pierres et les détritus végétaux et sur les mousses humides.

G. Pupa, Draparnaud

Ce genre comprend quatre espèces.

Coquille cylindracée-ovalaire, trapue, péristome plus ou moins épaissi, avec une seule dent à l'ouverture	Sec. Torquilla	Plus longue que 6 m.m., stries épaisses, deux dents à la partie supérieure de l'ouverture, quatre dans la face interne dont la supérieure très réduite	**P. avenacea,** Brug., var. *Lusitanica*, Ross.
		Plus courte que 6 m.m., stries fines, une dent à la partie supérieure de l'ouverture, trois ou quatre à la face interne	**P. granum,** Drap.
Coquille conique, fusiforme, allongée, avec plusieurs dents à l'ouverture	Sec. Pupilla	Coquille ovale cylindracée, sommet acuminé, ouverture allongée, une dent, recourbée, à la base du dernier tour et à l'insertion du péristome qui est très réfléchi	**P. umbilicata,** Drap.
		Coquille ovale-cylindracée, sommet obtus, ouverture petite, arrondie, une dent conique et petite au milieu de la base du dernier tour, péristome peu réfléchi	**P. muscorum,** Lin.

Sec. **Torquilla**, Studer

Pupa avenacea, Bruguière

Var. *Luzitanica*, Rossmässler

Pl. I — Fig. 3, 4

Pupa avenacea, Brug., Encycl. méth., XI, 2e, p. 355 (1792).
Pupa avena, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 59 (1801), Hist. moll., p, 64, pl. 3, f. 47-48 (1805).
Pupa secale, Draparnaud. — Morelet, Moll. de Portugal, p. 74 (1845) — Révision, Moll. Portugal, p. 247 (1877) — Hidalgo, Cat. icon., p. 216 (1875) — Luso, Moll. Portugal, p. 63 (1872) — Nobre, Moll. de Coïmbra, p. 11 (1886).
Pupa Luzitanica. — Rossmässler, Iconogr., 3e, p. 105, pl. 84, f. 935 (1859) — Hidalgo, Cat. icon., p. 245 (1875) — Locard, Conchyl. port., p. 147 (1899).
Pupa avenacea, var. *Luzitanica*. — Albers, Die Helic., p. 288 (1854) *fide* Locard.

Animal assez petit, d'une couleur d'ardoise foncée sur la tête et le cou, plus clair sur les flancs; tentacules supérieurs un peu longs, à globes oculaires assez dilatés; inférieurs assez courts mamelonnés; pied étroit et conique à l'extremité postérieure.

Coquille conique fusiforme, allongée, assez épaissie; spire composée de sept tours un peu bombés, le dernier d'un tiers au plus de la longueur totale; surface ornée de stries assez fortes, inclinées et parfois flexueuses; suture profonde; ouverture ovale-allongée, subquadrangulaire, portant deux dents à la partie supérieure, dont l'une plus superficielle touchant le bord du labre et l'autre plus petite et placée plus à l'intérieur; deux plis à la columelle, le supérieur plus long que l'inférieur et trois autres, longs, placés dans l'intérieur du côté inférieur et droit du labre et un autre plus petit, à l'extremité supérieure; péristome interrompu sur la partie inférieure du dernier tour, épaissi et un peu réfléchi, tranchant; cavité ombilicale étroite et oblique; couleur brun foncé, uniforme, à l'exception de la base, près de l'ouverture qui est blanchâtre avec deux ou trois zones étroites et foncées; péristome et plis blanchâtres; long. 8 m.m., diam. 2 1/2 a 3 m.m.

Hab. *Douro*. Condeixa (Luso, A. Giraldes, A. Moller, Coll. Mus. Lisbonne). Coïmbra (Castro).

Extremadura. Lisbonne, Cintra, Serra d'Arrabida, sur les

rochers (Morelet); Loures, Serra de Monsanto (Castro); Campolide, contre les murs de l'aqueduc das Aguas Livres (Nobre). Serra d'Arrabida.. (Welwitsch, Coll. Mus. Lisbonne). Cintra (Coll. Mus. Lisbonne). Alcobaça, rochers en face du Poço do Suão (Coll. Mus. Lisbonne).

Assez commune à Condeixa et Campolide.

La diagnose de cette espèce est faite d'après les exemplaires que j'ai recueillis à Campolide, près Lisbonne.

Morelet a indiqué d'abord cette espèce sous le nom de *secale* et plus tard, dans la révision de son travail (Journal de Conchyliologie, 1877) il a écrit «sous le nom de *secale*, j'ai mentionné moi-même, une espèce qui participe à la fois de l'*avenacea* et du *secale*, sans répondre exactement ni à l'un ni à l'autre, mais qui est certainement le *lusitanica*, de Rossmässler».

Albers a considéré cette forme comme une simples variété de l'*avenacea*, et Moquin-Tandon donne pour l'*avenacea* une longueur totale de 6-8 m.m., qui est aussi le plus grand développement que nous avons trouvé chez les exemplaires portugais.

Pour toutes ces raisons je considère, comme Albers, la forme portugaise comme une variété méridionale de l'*avenacea*, dont elle ne diffère que par des caractères différentiels peu importants: les plis et les dents plus développées, les stries plus fortes et les dimensions un peu plus grandes.

On doit remarquer toutefois que, dans le pli que l'on trouve à l'insertion du péristome, on observe, chez quelques exemplaires, un commencement de bipartition comme celle que l'on voit sur la fig. 5 de la planche I et que par ce caractère ils s'approchent de la *secale*, qui, du reste, est bien prochaine de l'espèce en question, premièrement décrite par Bruguière.

En comparant les exemplaires portugais avec d'autres provenant de la France, de la Suisse, de l'Allemagne et de la Suède, les différences ci-dessus indiquées sont toujours constantes.

Pour ce qui se rapporte aux dents du bord droit leur nombre est de quatre, bien que chez l'*avenacea* on trouve parfois des exemplaires avec trois seulement. Le quatrième est généralement réduit à un petit mamelon.

Locard cite mon nom à propos des *Pupa Farinesi*, des Moulins et *P. pyreneraria*, Baubée, recueillies à Setubal. J'ai fait cette citation ([1]) d'après le mémoire de M. Hidalgo, *Hojas malacologicas*, où l'on trouve le résultat des récoltes de Paz y

([1]) Moll. bassin Tage et Sado, p. 128 (1886).

Membiella faites en Portugal. Je n'ai pu trouver à Setubal aucune de ces espèces et je ne sais si elles se trouvent en Portugal.

Locard indique aussi les *Pupa Brauni*, recueillie à Leiria, comme l'avait fait Hidalgo auparavant (loc. cit.), et encore le *Pupa ringens*, Caillaud, d'après Jeffreys et Morelet. Je me borne à enregister ces citations, sans discuter la valeur de quelques unes de ces espèces, dans le but d'appeler l'attention des naturalistes pour des recherches minucieuses.

Pupa granum, Draparnaud

Pl. I — Fig. 6

Pupa granum, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 150 (1801) — Hist. Moll., p. 63, pl. 3, f. 45-46 (1805) — Rossmässler, Iconogr., 5e, p. 14, pl. 23, f. 322 (1837) — Morelet, Moll. Portugal, p. 74 (1845) — Dupuy, Hist. Moll., p. 396, pl. 19, f. 10 (1850) — Moquin-Tandon, Moll. France. 2e, p. 370, pl. 26, p. 34-38 (1855) — Bourguignat, Malac. Algérie; p. 84, pl. 6, f. 1-3 (1864) — Hidalgo, Cat. iconogr., p. 215 (1875) — Luso, Moll. Portugal, p. 63 (1872) — Nobre, Moll. Coïmbra, p. 11 (1886).

Pupa graniformis, Locard (non Drap.), Conchyl. port., p. 150 (1899).

Animal assez petit, d'un gris ou brun foncé plus clair aux flancs et au pied, qui est tronqué antérieurement et pointu en arrière, tentacules supérieurs presque cylindriques, assez longs; tentacules inférieurs très petits et coniques.

Coquille conique-fusiforme, allongée, fragile, un peu transparente, cornée, spire ornée de stries très fines, obliques et légèrement arquées; suture profonde; ouverture ovale-allongée avec une dent lamelliforme à la partie supérieure; deux à la columelle, dont l'inférieur très à l'intérieur, et trois assez longs et profonds; péristome simples peu réfléchi, interrompu sur la base du dernier tour; columelle presque droite; cavité ombilicale étroite; couleur légèrement cornée, brunâtre, hauteur 4 m.m., diam. 1 1/2 a 1 3/4 m.m.

Hab. *Douro*. Covello, pr. Porto (Luso).

Extremadura. Leiria (Luso). Coimbra (Rosa de Carvalho). Serra d'Arrabida (Nobre).

Algarve. Collines au nord de Tavira (Morelet); Faro, Estoy (Castro).

Cette espèce n'est pas rare aux environs de Setubal, près du château de S. Philippe, parmi les plantes et sous les pier-

res. Elle se distingue par sa forme fusiforme et par ses dimensions inférieures à celles de l'*avenacea*.

Chez les exemplaires que nous avons recueillis nous n'avons trouvé généralement que trois plis à l'intérieur de l'ouverture et, parfois, un quatrième réduit à un petit mamelon. Le pli inférieur de la columelle ne se distingue facilement qu'en faisant tourner la coquille de façon à laisser apercevoir bien la face interne de la columelle. La diagnose de Draparnaud mentionne deux dents supérieures, mais la gravure n'en montre qu'une seule et deux à la face interne de l'ouverture, où Moquin-Tandon en fait ressortir quatre. Chez plusieurs exemplaires provenant de l'Allemagne nous n'en avons trouvé que trois.

Sec. Pupilla, Beck

Pupa umbilicata, Draparnaud

Pl. I — Fig. 7, 8 et 9

Pupa umbilicata, Drap., Tabl. Moll., p. 58 (1801); Hist. Moll., p. 62, est. 3, f. 39-40 (1805) — Rossmässler, Iconogr., II, p. 15, est. 23, f. 327 (1837) — Morelet, Moll. Portugal, p. 74 (1845) — Dupuy, Hist. Moll., p. 420, pl. 20, f. 7 (1850) — Bourguignat, Malac. Algérie, p. 91, pl. 6, f. 8-16 (1864) — Hidalgo, Hojas malac., p. 18 (1870); Cat. icon., p. 217 (1875) — Luso, Moll. Portugal, p. 64 (1872) — Nobre, Moll. Coïmbra, p. 11 (1886); Notas malac., III, p. 603 (1888).

Pupa cylindracea, Da Costa. — Moquin-Tandon, Moll, France, 2e, p. 390, pl. 27, f. 42-43; pl. 28, f. 1-4 (1852).

Pupilla umbilicata, Drap. — Locard, Conchyl. port. p. 151 (1899).

Animal très petit, à corps étroit; pied court et elliptique; tentacules supérieurs un peu courts, cylindriques et gros, dilatés à l'extremité oculaire; inférieurs très petits; couleur d'ardoise plus ou moins foncée à la région dorsale. L'animal marche avec la coquille haute et un peu inclinée à droite.

Coquille ovoïde-cylindracée, un peu fragile, spire composée de six tours arrondis; surface presque lisse avec des stries assez faibles et obliques; suture assez profonde, ouverture ovale-allongée, anguleuse à la base et à la partie supérieure du côté droit, où elle forme un petit sinus avec la dent insérée à la base du dernier tour; péristome épaissi, un peu dilaté et réfléchi, interrompu sur la base du dernier tour; columelle un peu arrondie; cavité ombilicale profonde et oblique; couleur marron uniforme, à l'exception du péristome qui est blanc ou légère-

ment rosé et de la dent qui est blanche; haut. 3-4 m.m., diam. 1 $^1/_2$ à 2 m.m.

Habt. Tout le pays, extrêmement multiplié (Morelet).

Minho. Valença, Monsão, Vianna do Castello, Darque, Guimarães (Nobre). Famalicão (Castro, Nobre).

Traz-os-Montes. Bragança, Chaves, Vinhaes (Nobre).

Douro. Porto et environs (Luso, Nobre). Leça, sur les rochers au bord de la mer. Ermezinde, Paço de Souza, Serra do Pilar, Granja, Aveiro, Coïmbra, Figueira da Foz, Luso. Bussaco (Nobre). Coimbra (Giraldes, Paz, Aguiar, Moller). Vallongo (Reis Junior). Granja (Castro). Bussaco (Paz).

Beira Alta. Mangualde, Tondella (Nobre).

Extremadura. Thomar, Azambuja, Cintra, Lisboa, Serra da Arrabida, Setubal (Nobre). Cintra, Arrabida (Paz). Monsanto (A. Furtado). Alcobaça, sur les rochers, en face du Poço de Suão; Pombal (Coll. Mus. Lisbonne).

Alemtejo. Elvas (Nobre). Portalegre, Castello de Vide (Coll. Mus. Lisbonne). Beja (Nobre, Barahona, Coll. Mus. Lisbonne).

Algarve. Portimão (Coll. Mus. Porto).

Vit sur les mousses, sous les feuilles en décomposition et les pierres. Elle est, comme l'a déjà dit Morelet, une des espèces les plus répandues au pays.

Pupa muscorum (Linné)

Pl. I — Fig. 10 et 11

Turbo muscorum, Linné, Syst. Nat. éd. Gmelin, 9^e, p. 142 (1794) — Rossmässler, p. 83, pl. 2, f. 37 (1853) — Dupuy, Hist. Moll., p. 407, pl. 20, f. 10 (1850) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 392, pl. 28, f. 5-15 (1855) — Bourguignat, Malac. Algérie, p. 98, pl. 6, f. 20-24 (1846) — Luso, Moll. Portugal, p. 63 (1872).

Pupa marginata, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 58 (1801) — Hist. Moll., p. 61, pl. 3, f. 36-38 (1805).

Pupilla muscorum, Linné. — Locard, Conchyl. port., p. 152 (1899).

Animal très petit, elliptique, à pied arrondi antérieurement et pointu à l'arrière, tentacules supérieurs peu longs, cylindriques; inférieurs assez courts, cylindriques; couleur d'ardoise foncée sur le dos et la tête, plus claire aux flancs et au pied.

Coquille cylindracée, à sommet acuminé et base arrondie, un peu solide, spire composée de six à sept tours arrondis; suture assez profonde; surface presque lisse, à peine on remarque quelques rares stries obliques, fines et irrégulières;

ouverture arrondie à la base avec le bord supérieur presque droit et ayant inséré à son milieu une petite dent conique; péristome interrompu sur la base du dernier tour, peu réfléchi et presque tranchant; cavité ombilicale étroite; couleur marron plus ou moins clair; dent d'un blanc laiteux et péristome blanchâtre; haut. 3 $^1/_2$ m.m., diam. 1 $^1/_2$ m.m.

Hab. *Algarve* (Luso, Castro).

Locard cite mon nom à propos de cette espèce, mais je ne l'ai indiquée nulle part ni ne l'ai pu trouver jusqu'à pré sent en Portugal. D'après Locard cette espèce avait été précèdemment indiquée par Schranck, et Luso da Silva, sans affirmer l'existence de cette espèce en Portugal, dit avoir trouvé, dans sa collection, plusieurs exemplaires qui lui avaient été offerts comme provenant de notre pays.

Cette espèce, par ses dimentions et sa forme générale peut, au premier abord, se confondre avec des exemplaires peu développés de *P. umbilicata,* mais celle-ci est plus conique, son ouverture plus allongée, et la dent recurvée est placée contre l'insertion du péristome. Je la cite à l'attention des naturalistes.

G. Vertigo, Müller

Le genre *Vertigo* comprend cinq espèces:

Plusieurs dents à l'ouverture	Vertigo	Coquille ovalaire, épaisse, labre gros et réfléchi, deux plis et trois dents à l'ouverture	**V. anglica** (Férussac)
		Coquille très petite, ovalaire, ventrue, péristome épais, huit dents à l'ouverture	**V. antivertigo** (Drap.)
		Coquille très petite, ovalaire, moins ventrue, péristome moins épais, ou simples, cinq dents à l'ouverture	**V. pygmæa** (Drap.)
Dents nulles	Isthmia, s. g.	Coquille très petite, cylindrique, péristome épais, stries assez fortes et espacées	**V. muscorum** (Drap.)
		Coquille plus grande, un peu ovalaire, fragile, péristome simples, stries très fines et nombreuses, peu apparentes	**V. edentula** (Drap.)

Vertigo anglica (Férussac)

Pl. I — Fig. 12 et 13

Pupa anglica, Férussac, Tabl. syst., p. 68 (1822) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2e, p. 404, pl. 28, f. 34-36 (1855) — Luso, Moll. Portugal, p. 64 (1872) — Locard, Conchyl. port., p. 155 (1899).

Vertigo anglica, Férussac. — Potiez et Michaud, Cat. Moll. Mus. Douai, I, p. 195, pl. 20, f. 1-2 (1838) — Morelet, Moll. Portugal, p. 75 (1845) — Dupuy, Hist. Moll., p. 414, pl. 20, f. 9 (1850) — Hidalgo, Cat. icon., p. 273 (1875) — Nobre, Faune Tage et Sado, p. 129 (1886); Moll. Coimbra, p. 11 (1886).

Animal petit, à pied terminé en pointe émoussée, d'une couleur presque transparente, à l'exception des tentacules, de la tête et du cou qui sont d'un gris d'ardoise; tentacules supérieurs longs et cylindriques, les inférieurs réduits à des petits tubercules.

Coquille ovoïde, cylindrique, à sommet légèrement acuminé; spire composée de sept tours un peu arrondis, suture peu profonde, surface ornée de stries obliques très fines et régulières chez les individus jeunes, irrégulières et grossières chez les adultes; ouverture auriculaire; péristome interrompu sur la base du dernier tour, épais et réfléchi, ayant une dilatation sur le bord droit; un pli dentiforme à la partie supérieure, long et recourbé vers le côté droit, originant un canal arrondi avec le péristome, avec le quel il se relie à la base de celui-ci; à gauche de ce pli on en trouve un autre épais et prolongé vers l'intérieur; au bord columellaire un pli assez saillant et profond et deux autres à la base du péristome, dont celui de la droite est plus long et profond, peu apparent parfois chez quelques exemplaires; cavité ombilicale assez profonde; couleur marron rougeâtre avec une zone plus claire à la base du dernier tour; haut. 3-3 $^1/_2$ m.m., diam. 1 $^1/_2$ m.m.

Hab. *Douro*. Environs do Porto (Morelet). S. Felix da Marinha, S. Pedro da Cova, Covello (Luso); Alfena et Travagem, pr. Ermezinde, Villa Nova de Gaya, Serra do Pilar, Granja (Nobre), Bussaco (Heyden, Nobre).

Extremadura. Cintra (Morelet, Coll. Mus. Lisbonne); Jardin Botanique de Lisbonne (Nobre).

Algarve. Faro (Castro).

Vit sous les feuilles en décomposition, sous les pierres et sur les mousses humides. Cette espèce n'est pas commune.

Vertigo antivertigo (Draparnaud)

Pl. I — Fig. 14

Pupa antivertigo, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 57 (1801); Hist. Moll., p. 60, pl. 3, f. 32-33 (1805) — Morelet, Moll. Portugal, p. 74 (1845) — Dupuy, Hist. Moll., p. 417, pl. 20, f. 15 (1850) — Hidalgo, Cat. icon., p. 213 (1875).

Vertigo antivertigo, Draparnaud. — Graells, Cat. Mol. España, p. 7 (1846) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2e, p. 407, pl. 29, f. 4 (1855) — Locard, Conch. port., p. 154 (1899) — Rossmässler, Iconogr., f. 647 et 1541 (1899).

Animal très petit et court; pied étroit et oblong; tentacules peu longs et gros; couleur d'ardoise foncée.

Coquille très petite ovoïde, trapue, fragile, cornée translucide; spire composée de quatre tours très arrondis; surface ornée de stries très fines, obliques, très serrées et peu apparentes; suture profonde; ouverture ovalaire, dilatée vers le côté droit et pourvue de huits dents, dont trois supérieures, deux plus longues et coniques, deux columellaires grosses et obtuses, trois basilaires, dont deux très longues et obtuses; péristome continu; tranchant et peu réfléchi; columelle légèrement courbe; cavité ombilicale étroite; haut. 1 1/2 m.m., diam. 1 m.m.

Hab. *Douro*. Foz do Douro (Castro).

Alemtejo. Prairies humides de l'Alemtejo (Morelet).

Je n'ai pu encore trouver cette petite espèce.

Vertigo pygmæa (Draparnaud)

Pl. I — Fig. 15

Pupa pygmæa, Draparnand, Tabl. Moll., p. 57 (1801); Hist. Moll., p. 60, pl. 3, f. 30-31 (1805) — Rossmässler, Iconogr., pl. 49, f. 468 (1837) — Dupuy, Hist. Moll., p. 416, pl. 20, f. 12 (1850) — Luso, Moll. Portugal, p. 64 (1872).

Vertigo pygmæa, Drap. — Graells, Cat. Mol. España, p. 7 (1846) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2e, p. 405, pl. 28, f. 37-42 (1855) — Locard, Conch. port., p 155 (1899).

Animal à corps finement rugueux, d'une couleur d'ardoise plus ou moins foncée; tentacules filiformes, noirâtres; deux tâches noires remplaçant les tentacules inférieurs.

Coquille ovoïde, très petite, fragile, un peu translucide; spire composée de cinq tours arrondis; suture profonde; surface ornée de stries très fines et peu apparentes; ouverture ova-

laire, un peu dilatée du côté droit; cinq dents dont trois à la base du péristome, un sur la columelle et l'autre au milieu de la base du dernier tour; péristome interrompu et un peu réfléchi et tranchant; cavité ombilicale étroite; couleur marron jaunâtre; péristome blanchâtre; haut. 1-1 1/2 m.m.: diam. 1 m.m.

Hab. *Minho*. Vianna do Castello (Nobre).

Douro. Environs de Porto, S. Felix da Marinha (Luso); Alfena et Travagem, prox. Ermezinde, Granja (Nobre); S. Felix da Marinha (Coll. Mus. Lisbonne).

D'après Luso da Silva cette espèce n'est pas rare aux environs de Porto, mais je n'ai pu me procurer q'un petit nombre d'exemplaires.

Vit sur la mousse, les pierres et le gason.

S. g. **Isthmia**, Gray

Vertigo muscorum (Draparnaud)

Pl. I — Fig. 16

Pupa muscorum, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 56 (1801), non Linné; Hist. Moll., p. 59, pl. 3, f. 26, 27 (1805).

Pupa minutissima, Hartman. — Hidalgo, Cat. icon., p. 215 (1875).

Vertigo minutissima, Graells, Cat. Mol. España, p. 7 (1864) Dupuy, Hist. Moll., p. 422, pl. 20, f. 13 (1850).

Vertigo muscorum, Drap. — Moquin-Tandon, Moll. France, 2e, p. 399. pl. 28, f. 20-24 (1855) — Bourguignat, Malac. Algérie, 2e, p. 98, pl. 6, f. 18-32 (1864) — Nobre, Moll. Coimbra, p. 11 (1886).

Isthmia muscorum, Drap. — Locard, Conchyl. port., p. 153 (1899).

Animal très petit, un peu rugueux, d'une couleur d'ardoise, pigmenté de noir; tentacules supérieurs assez longs et coniques.

Coquille très petite, fragile, translucide ou brunâtre, cylindrique, à sommet obtus; spire composée de six ou sept tours plus ou moins arrondis, ornée de stries assez régulièrement disposées obliquement, de gauche à droite; suture profonde; ouverture arrondie, un peu allongée vers le côté droit, dents et plis nuls; péristome interrompu sur la base du dernier tour, un peu épaissi et réfléchi; columelle réfléchie, sur la cavité ombilicale qui est étroite; haut. 1 1/2 a 2 m.m.; diam. 3-4 m.m.

Hab. *Traz-os-Montes* (Morelet); Macedo de Cavalleiros (Nobre).

Douro. Figueira da Foz (Nobre); Coimbra, à Baleia (Rosa de Carvalho); Coïmbra, à Mont'Arroyo (J. J. Rodrigues, Coll. Mus. Lisbonne).

Extremadura. Thomar, Abrantes, Lumiar, Cruz Quebrada, Queluz, Collares, Cintra, Setubal (Nobre); Monsanto, au nord de Rabicha (A. Furtado, Coll. Mus. Lisbonne).

Alemtejo. Beja, Villa Nova de Mil Fontes (Nobre).

Algarve. (Morelet); Faro (Castro).

Très commune à Mil Fontes. Vit sous les feuilles sèches, dans les détritus végétaux et sous les pierres.

Cette espèce est variable dans sa fôrme. Il y a des exemplaires assez courts, à tours très arrondis, et d'autres cylindriques et plus allongés. Elle se distingue facilement par sa petitesse et par sa forme cylindrique. C'est l'espèce la plus petite des *Pupa* portugaises.

Vertigo edentula (Draparnaud)

Pl. I — Fig. 17

Pupa edentula, Draparnaud, Hist. Moll., p. 59, pl. 3, f. 28-29 (1805); Dupuy, Hist. Moll., p. 422, pl. 20, f. 17 (1850); Moquin-Tandon, Moll. France, 2°, p. 402, pl. 28, f. 28-30 (1855); Rossmässler, Iconogr., pl. 49, f. 646 (1839); Hidalgo, Cat. icon., p. 214 (1875).

Pupa (Columella) *edentula*, Drap. — Rossmässler, Iconogr., p. 96, pl. 236, f. 4542 1543 (1899).

Isthmia edentula, Drap.—Locard, Conchyl. port., p. 153 (1899).

Animal faiblement rugueux, cendré, plus foncé à la tète et au cou, plus clair sur les flancs et au pied; tentacules longs et cylindriques; pied étroit et oblong.

Coquille ovoïde, dilatée vers la base, fragile, assez petite; spire composée de cinq à six tours très arqués; surface ornée de nombreuses stries bien marquées; ouverture petite et arrondie, sans dents ni plis, péristome simple, peu réfléchi; tranchant, interrompu sur la base du dernier tour; columelle un peu arquée, réfléchie sur la cavité ombilicale assez étroite; couleur marron clair à l'exception du péristome qui est d'une teinte jaunâtre; haut. 2 m.m.; diam. 1 $^1/_2$ m.m.

Hab. Portugal (Gyssez, *fide* Locard).

Douro. Alfena, Travagem et Ermezinde, pr. Porto (Nobre).

Algarve. Faro (Castro).

Vit sous les pierres.

Il semble que cette espèce doit être rare en Portugal.

G. Clausilia, Draparnaud

Ce genre comprend deux espèces, comme il suit:

Coquille senestre, longue, fusiforme, épaisse, péristome réfléchi, ayant un pli à la partie supérieure, accolé à l'insertion du labre; rides nombreuses flexueses et assez irrégulières	C. rugosa, Drap.
Coquille senestre, longue, ovale-fusiforme, épaisse, péristome réfléchi, ayant un pli à la partie supérieure accolé à l'insertion du labre et quatre plis et deux petits tubercules à la columelle; rides nombreuses flexueuses et régulièrement parallèles	C. plicata (Drap.)

Clausilia rugosa, Draparnaud

Pl. II — Fig. 1 à 5

Clausilia rugosa, Draparnaud, Hist. Moll., p. 73, pl. 4, f. 19-20 (1805) — Morelet, Moll. Portugal, p. 75 (1845) — Graells, Mol. España, p. 8 (1846) — Gassies, Moll. de l'Agenais, p. 129 (1849) — Hidalgo, Hojas malac., p. 18 (1870); Cat. icon., p. 186 (1875) — Luso da Silva, Moll. de Portugal, p. 259 (1872) — Nobre, Moll. Coimbra, p. 12 (1886): Faune Tage et Sado, p. 129 (1886).

Clausilia perversa, Moquin-Tandon, Moll. France, 2e, p. 332, pl. 24, f. 21-27 (1855).

Animal à corps rugueux, court en relation à la longueur de la coquille, étroit, d'une couleur brun verdâtre sale, dos plus foncé, tentacules supérieurs peu longs, rugueux, dilatés à l'extrémité; les inférieurs très courts, réduits à des petits tubercules; pied d'une teinte ardoisée, à bord noirâtre.

Pendant la marche la coquille, qui repose sur le corps de l'animal, avance par saccades.

Coquille fusiforme, allongée, légèrement ventrue à la région moyenne, mamelonnée, spire senestre, composée de 12 à 13 tours de spire, un peu arrondis, et ornée de rides fortes, nombreuses, obliques, serrées, irrégulières, flexueuses ou presque droites, et de stries transversales parmi les rides, assez serrées parfois comme des ponctuations; suture assez profonde; ouverture ovale allongée, inclinée, de gauche à droite, rétrécie à la partie supérieure: péristome continu, un peu épais, dilaté et d'un blanc jaunâtre; deux lamelles au bord droit de l'ouverture, dont l'une à la partie supérieure, étroite, presque verticale et produisant un étranglement de l'ouverture; et l'autre

placée au milieu du labre, plus épaisse et déprimée. Parmi ces deux plis on observe parfois deux petites dents; couleur brun foncé et d'un aspect satiné; haut. 12-15 m.m.; diam. 1 $^{1}/_{2}$ m.m.

Hab. *Minho*. Valença, Monsão, commune, Azurara (Nobre).

Traz-os-Montes. França, pr. Serra de Montesinho (Nobre).

Douro. Porto et environs (Morelet, Luso, Castro, Nobre). Leça da Palmeira, dans les fentes des falaises du rivage, près de la mer, à Boa Nova; Foz do Douro, S.ª da Hora, Serra do Pilar, Granja, Espinho, Paço de Souza, Aveiro, Bussaco, Coimbra, Figueira da Foz (Nobre). Porto, Coimbra, Bussaco (Paz). Coimbra (Moller, Heyden, Aguiar).

Extremadura. Leiria, Thomar, Collares, environs de Lisbonne (Nobre). Cintra (Morelet). Cintra, Caldas da Rainha (Hidalgo). Serra d'Arrabida (Paz).

Vit dans les lieux sombres et humides, contre les murs, sur les mousses, le tronc des arbres et sous les pierres. Vulgaire dans quelques localités.

Cette espèce est peu variable dans la forme générale; plus allongée ou raccourcie, ses caractères externes sont assez constants. Dans l'intérieur de l'ouverture on remarque à peine quelques petites différences dans le développement des lamelles et la présence ou l'absence des deux petits tubercules placés entre l'espace qui les sépare. Parfois on n'en observe qu'un seul et, généralement, ils font défaut. Chez quelques exemplaires la lamelle inférieure est bifide à l'extrémité. Par dessous cette lamelle on en observe parfois une autre et, rarement, chez quelques exemplaires existe une petite dent et, à la base de l'ouverture, un autre pli correspondant à la dépression externe de la base du dernier tour. Les différences entre cette espèce et le *C. nigricans*, sont assez faibles. Le *C. rugosa* est, peut être, plus long et étroit et les rides plus fines et serrées, en donnant à la coquille un aspect moins rugueux.

Moquin-Tandon mentionne cette espèce comme synonime du *Turbo perversus*, Müller (v. Linné, Syst. Nat., éd. Gmelin, 9^{e}, p. 141, n° 88).

Clausilia plicata (Draparnaud)

Pl. II — Fig. 6 et 7

Pupa plicata, Drap., Tabl. Moll., p, 63 (1801).

Clausilia plicata, Drap., Hist. Moll., p. 72, pl. 4, f. 15, 16 (1805) — Graells, Mol. España, p. 8 (1846) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2°, p. 338, pl. 24, f. 13-16 (1855).

Clausilia portensis, Luso da Silva, Moll. de Portugal, p. 260 (1872) — Locard, Conchyl. port., p. 144 (1899).

Animal à corps rugueux, assez petit, étroit, d'un brun noirâtre en dessus, flancs et pied d'une couleur d'ardoise plus ou moins foncée, tentacules supérieurs peu longs, un peu coniques et assez dilatés à l'extrémité, les inférieurs très courts, coniques et gros.

Coquille fusiforme, allongée, ventrue à son milieu, un peu transparente et moins solide que l'espèce précédente; spire senestre, onze tours arrondis; ornée de rides flexueuses, paralèlles et assez serrées; suture profonde; ouverture subquadrangulaire, légèrement inclinée de gauche à droite; péristome continu, épais, avec une goutière à la base; une lamelle sur le bord de l'ouverture, vérticale; quatre lamelles ou plis implantés sur le bord droit, dont le supérieur est le plus petit; tout près de celui-ci et à sa base on observe deux petits tubercules; couleur marron jaunâtre, péristome plus clair; haut. 18 m.m.; diam. 4 mm.

Hab. *Douro*. Porto, Lordello, S. Felix da Marinha (Luso, Coll. Mus. Lisbonne).

Extremadura. Thomar (Nobre).

Je n'ai pu encore trouver cette espèce aux environs de Porto. L'examen des exemplaires de la collection du Muséum de Lisbonne, recueillis et offerts par Luso da Silva, m'a permis de vérifier que l'espèce établie par ce naturaliste est de *Cl. plicata* (Drap.)

G. Balea, Leach

Ce genre ne comprend qu'une seule espèce.

Balea perversa (Linné)

Pl. II — Fig. 8 et 9

Turbo perversus, Linné, Syst. Nat. éd Gmelin, 9^e^, p. 180 (1794).

Bulimus perversus, L. — Poiret, Coquilles de l'Aisne, p. 57 (1801).

Pupa fragilis, Draparnaud, Tabl. Moll., p. 64 (1801) — Hist. Moll., p. 68, pl. 4, f. 4 (1805) — Morelet, Moll. Portugal, p. 74 (1845) — Luso, Moll. Portugal, p. 62 (1872).

Balea fragilis, Drap. — Dupuy, Hist. Moll., p. 269, pl. 18, f. 5-6 (1849).

Pupa perversa, Linné — Moquin-Tandon, Moll. de France, 2^e^, p. 349, pl. 25, f. 6-14 (1855).

Balea perversa, Linné — Hidalgo, Hojas malac., p. 18 (1870); Cat. iconog., p. 182 (1875) — Nobre, Moll. de Coimbra, p. 12 (1886); Faune Tage et Sado, p. 130 (1886).

Balea perversa, Linné — Locard, Conch. port., p. 146 (1899).

Animal assez grand, d'une couleur brun brunâtre à la tète et au dos, ardoisée plus ou moins foncée aux flancs et au pied, qui est terminé en pointe à l'extremité postérieure; tentacules supérieurs assez courts et gros et un peu coniques; inférieurs très courts et coniques.

Coquille senestre, fragile, fusiforme, allongée, cornée, un peu translucide et luisante, spire à huit tours arrondis, finement striée; sommet mamelonné; suture profonde; stries légèrement inclinées de droite à gauche; ouverture ovale-allongée, labre un peu réfléchi à la partie supérieure; péristome simple, tranchant, relié sur la base du dernier tour par une faible callosité; columelle réfléchie sur la cavité ombilicale qui est circulaire et oblique. Couleur cornée-jaunâtre; columelle blanchâtre; haut. 8 m.m; diam. 2 $^1/_2$ m.m.

Hab. Provinces du nord du Portugal (Morelet).

Minho. Valença (Nobre).

Traz-os-Montes. França, prox. Serra de Montesinho (Nobre).

Douro. Porto et environs (Luso, Nobre). Granja (Nobre). Coimbra (Paz, Aguiar, Nobre). Bussaco (Paz, Nobre). Anadia (A. Giraldes).

Beira Alta. Vizeu (A. Giraldes).

Extremadura. Collares (Nobre). Cintra (Morelet, Paz, Nobre, coll. Mus. Lisbonne). Caldas da Rainha (coll. Mus. Lisbonne). Environs de Lisbonne (Duc de Palmella, coll. Mus. Lisbonne).

Vit sur les mousses et l'écorce des arbres, dans les fentes des rochers et des arbres. Elle est fréquente dans quelques lieux des environs de Porto, dans les fermes, les murs et les arbres des chemins.

Fam. v — STENOGYRIDÆ

Animal à corps plus ou moins long, arrondi ou tronqué à la partie antérieure, éfilé à l'extremité caudale; mâchoire mince, plissée verticalement et à plis très nombreux et bords crénelés, radule à dent centrale très petite, latérales triscuspidées, cuspide centrale longue et étroite; latérales subégales; marginales très courtes, transverses et tricuspidées.

Coquille plus ou moins longue, tronquée ou conique à l'état

adulte, plus ou moins luisante, conique, péristome simples, columelle plus ou moins arquée, généralement simples et parfois tronquée.

La famille *Stenogyridae* comprend trois genres et deux sous genres :

Coquille conique cylindracée, longue, à tours peu arqués, péristome simples trânchant, columelle tronquée à l'état adulte	s. g. Rumina, Risso.
Coquille conique ovoïde, assez petite, très brillante, cornée, polie, péristome simples, columelle arquée et pourvue d'une dent émoussée, pied muni d'une pore muqueux	Ferussacia, Risso.
Coquille plus petite, brillante, cornée, péristome épaissi, columelle presque simples ; pied sans pore muqueux	s. g. Cionella, Jeffreys.
Coquille assez petite, étroite, subulée, fragile, blanche, transparente, à sommet arrondi, péristome simples, columelle tronquéé à la base	Cœcilianella, Fér.

Stenogyra, Shuttleworth

S. g. Rumina, Risso

Le s. g. Rumina comprend une seule espèce :

Rumina decollata (Linné)

Pl. II — Fig. 10 et 11

Helix decollata, Linné, Syst. Nat., éd. X, p. 733 (1758) — Müller, Hist. Verm., 2e, p. 114, n.° 314 (1774) — Linné, Syst. Nat. éd. Gmelin, 9e, p. 196, n° 115 (1794).

Bulimus decollatus, Linné. — Draparnaud, Hist. Moll., p. 76, pl. 4, f. 27-28 (1805) — Rossmässler, Iconogr., 5, p. 45, pl. 28, f. 1 (1837) — Morelet, Moll. Portugal, p. 73 (1845) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2e, p. 311, pl. 22, f. 35-40 (1855) — Bourguignat, Malac. Algérie, 2e, p. 3, pl. 1, f. 1-23 (1864) — Cantraine, Malac. medit., p. 135 (1865) — Luso, Moll. Portugal, p. 258 (1871) — Hidalgo, Hojas malac., p. 18 (1870) ; Cat. icon., p. 183 (1875).

Stenogyra decollata, Lin. — Nobre, Moll. Coïmbra, p. 12 (1886) ; Faune Tage et Sado, p. 129 (1886) ; Notas malac., 3, p. 603 (1888).

Rumina decollata, Linné. — Locard, Conch. port., p. 135 (1899).

Animal assez court, n'excedant pas, pendant la marche, l'extrêmité de la coquille, d'une couleur noir d'ardoise verdâtre; tentacules supérieurs longs, les inférieurs très courts. La coquille reste appuyée sur le pied ou sur le terrain sur lequel l'animal marche.

Coquille longue, turriculée, imperforée, tronquée à l'état adulte, un peu solide, glabre et luisante; spire à quatre ou six tours peu convexes, le dernier arrondi à la base; suture peu profonde; surface de la coquille ornée de rides ou stries très fines, irrégulières et obliques; ouverture ovalaire; péristome tranchant et simple; columelle épaisse, légèrement arquée et réfléchie; couleur jaunâtre, brunâtre claire et parfois avec des reflets violacés; haut. 35 m.m.; diam. 14 m.m.

Hab. Région méridionale au voisignage de la mer (Morelet).

Douro. Coïmbra (Luso, Moller, Nobre, Rosa de Carvalho, Aguiar, Paulino d'Oliveira, Castro). Figueira, Buarcos, Cap Mondego (Nobre).

Beira Alta. Barca d'Alva (Reis Junior, Nobre).

Beira Baixa. Sernache (Castro).

Extremadura. Leiria (Luso, Nobre). Caldas da Rainha, Thomar, Cintra, Lumiar, Sacavem, Cruz Quebrada, Belem, Algés, Cascaes (Nobre). Lisboa (Luso, Nobre, Castro). Setubal, Serra d'Arrabida (Nobre).

Alemtejo. Evora, Beja, Elvas, Odemira (Nobre). Villa Nova de Mil Fontes (G. Sampaio, Nobre).

Algarve, Faro (Castro, Nobre). Lagos, Portimão, Tavira, Villa Real de Santo Antonio (Nobre).

Comme on le voit, cette espèce ne vit pas seulement près de la mer, comme le pensait Morelet, mais on la trouve dans tout l'Alemtejo et la Beira Alta, à Barca d'Alva, frontière hispano portugaise, la région la plus septentrionale du pays où cette forme est connue jusqu'à présent. Barca d'Alva est une région très chaude pendant l'été; on y trouve diverses espèces zoologiques du sud du pays. Mr. Hidalgo indique cette espèce comme étant rencontrée par Paz, à Porto. Nous ne l'avons jamais rencontrée, et nous pensons que les exemplaires trouvés par Paz seraient carriés de Barca d'Alva par le Douro, pendant les crues.

Cette espece qui a une large distribution géographique se trouve au nord de l'Afrique et aux iles de Cap Vert; les exemplaires de cette provenance sont toujours plus petits que ceux du Portugal.

Vit sous les pierres et parmi les plantes, dans les lieux sombres.

Les jeunes, comme l'on sait, sont turriculés, plus coniques

et à spire mamelonnée. Avec l'âge cette partie terminale se detache et l'adulte ne vit que dans la coquille tronquée.

G. Ferussacia, Risso

Le genre *Ferussacia* ne comprend qu'une seule espèce.

Ferussacia folliculus (Gronovius)

Pl. II — Fig. 12 à 14

Helix folliculus, Gronovius. — Linné, Syst. Nat., éd. Gmelin, 9^e, p. 200, n° 199 (1794).

Physa scaturiginum, Drap., Hist. Moll., p. 56, pl. 3, f. 14-15 jeunes (1805).

Bulimus folliculus, Gronov. — Morelet, Moll. Portugal, p. 73 (1845) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 306, pl. 22, f. 20-30 (1855).

Achatina folliculus, Gronov. — Cantraine, Malac. medit., p. 138 (1865).

Polyphemus folliculus, Gronov. — Graells, Mol. España, p. 7 (1846).

Ferussacia folliculus, Gronov. — Bourguignat, Malac. Algérie, p. 38, pl. 22, f. 20-31 (1864) — Nobre, Moll. Coïmbra, p. 12 (1886); Faune Tage et Sado, p. 130 (1886) — Locard, Conch. port., p. 137 (1899).

Animal long et étroit, à corps rugueux, d'une couleur vert jaunâtre, ou d'un jaune assez vif, plus ou moins noiratre au cou et à la tête qui est assez longue; tentacules supérieurs assez courts et gros, rugueux; les inférieurs réduits à des tubercules assez petits; pied se terminant en pointe aiguë. L'animal est assez agile et irritable. Pendant la marche la coquille s'appuye sur le long du corps.

Coquille cylindroïde, acuminée, glabre, peu solide, cornée et très luisante. Spire composée de cinq à six tours, dont le dernier, vu par sa face ventrale, est plus grand que moitié de la coquille; les autres très petits et légèrement arrondis; suture peu profonde, mais ayant un étranglement au dernier tour du côté dorsal; ouverture presque droite, ovale-allongée, anguleuse à la partie supérieure; péristome tranchant et un peu élargi au milieu, interrompu et se reliant à la columelle, qui est épaisse, par une callosité de la partie supérieure de l'ouverture. Couleur jaunâtre, cornée brillante; péristome et columelle blanchâtre; haut. 6-8 m.m.; diam. 2-3 m.m.

Hab. *Douro.* Bussaco (Paulino d'Oliveira). Environs de Coïmbra (Rosa, Nobre, Paulino, Castro).

Extremadura. Environs de Lisbonne (Mengo, coll. Mus. Lisbonne, Morelet, Servain, Luso, Nobre, Castro). Setubal (Luso, Paz, Nobre). Arrabida (Paz, Nobre, Mus. Lisbonne).

Alemtejo. Extremoz (Paz, coll. Mus. Lisbonne). Evora, Elvas, Beja (Nobre).

Algarve. Monchique, Faro, Tavira, Castro Marim (Nobre). Estoy, Faro (Castro).

Assez commun. Vit sur les plantes, sous les pierres et les feuilles en décomposition.

S. g. **Cionella**, Jeffreys

Ce s. g. ne comprend qu'une seule espèce.

Cionella subcylindrica (Linné)

Pl. II — Fig. 15 et 16

Helix subcylindrica, Linné, Syst. Nat., éd. XII, p. 1248 (1767); éd. Gmelin, 9e, p. 197, n° 118 (1794).

Bulimus subcylindricus, Lin. — Poiret, Coq. de l'Aisne, p. 45 (1801) — Moquin-Tandon, Hist. Moll., 2e p. 304, pl. 22, f. 15-19 (1855).

Bulimus lubricus, Draparnaud, Hist. Moll., p. 75, pl. 4, f. 24 (1805) — Gassies, Moll. Agenais, p. 122 (1849) — (Achatina, Lamk) Morelet, Moll. Portugal, p. 73 (1845).

Columna lubrica, Brug. — Graells, Mol. España, p. 7 (1846).

Ferussacia lubrica, Müller — Hidalgo, Cat. iconogr., p. 187 (1875) — Nobre, Moll. Coïmbra, p. 13 (1886).

Zua subcylindrica, Lin.—Locard, Conchyl. port., p. 136 (1899).

Animal à corps rugueux, assez grand, un peu large, terminé en pointe efilée, d'une couleur d'ardoise plus ou moins foncée; tentacules supérieurs peu longs, cylindriques efilés; tentacules inférieurs très courts, gros et coniques.

Coquille petite, bulimoïde, luisante, cornée, un peu transparente, spire composée de cinq tours un peu arrondis, le dernier plus grand que tous les autres; surface de la coquille lisse; suture profonde; ouverture ovalaire, anguleuse vers la partie supérieure, pyriforme; péristome interrompu, épaissi; columelle légèrement inclinée, anguleuse ou réfléchie; couleur jaune cornée plus ou moins foncée, labre rosé; haut. 5-6 m.m.; diam. 3 m.m.

Hab. *Minho*. Valença (Nobre); Braga (G. Sampaio, Nobre). Famalicão (Castro).

Traz-os-Montes. Chaves (Morelet). Bragança, (Morelet, Nobre).

Douro. Porto (A. Giraldes, Nobre, Castro). Coïmbra (Rosa de Carvalho, Nobre, Castro). Soure (Nobre).

Beira Baixa. Sernache (Castro).

Vit dans les lieux humides, sur les herbes, parmi les feuilles en décomposition, etc.

G. Cœcilianella, Férussac

Ce genre comprend à peine une espèce.

Cœcilianella acicula (Müller)

Pl. II — Fig. 17 et 18

Buccinum acicula, Müller, Verm. hist., 2e, p. 150 (1774).

Bulimus acicula, Müller — Draparnaud, Hist. Moll., p. 75, pl. 4, f. 25 (1805) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2e, p. 309, pl. 22, f. 32-34 (1855).

Polyphemus acicula, Lamk.—Graells, Mol. España, p. 7 (1846).

Achatina acicula, Lamarck. — Dupuy, Hist. Moll., p. 327, pl. 15, f. 8 (1850) — Gassies, Moll. Agenais, p. 123 (1840).

Cœcilianella acicula, Müller. — Luso, Moll. Portugal, p. 13 (1870) — Hidalgo, Cat. iconogr., p. 179 (1875) — Nobre, Moll. Coïmbra, p. 13 (1886); Faune Tage et Sado, p. 130 (1886) — Locard, Conchyl. port., p. 140 (1899).

Animal à corps finement rugueux, presque transparent, blanchâtre; tentacules supérieurs filiformes, cylindriques; tentacules inférieurs très petits, comme des tubercules.

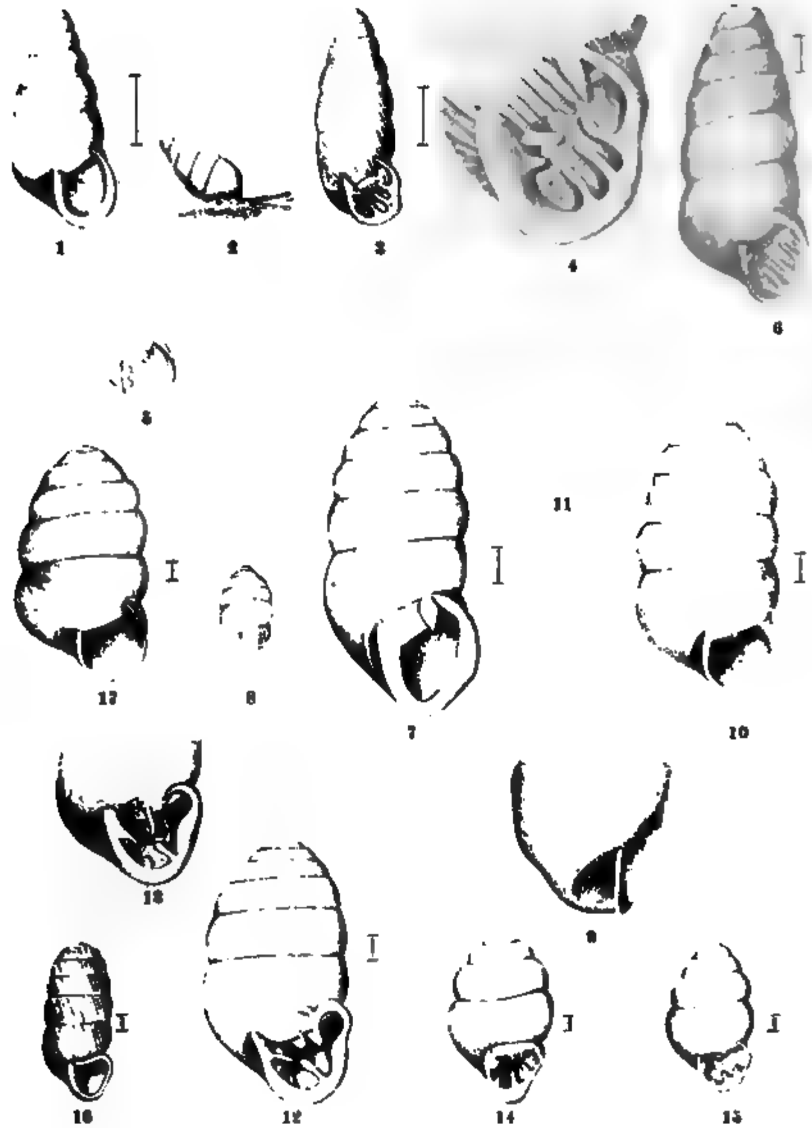
Coquille étroite, non ombiliquée, très allongée, cylindrico-fusiforme; luisante, hyaline, transparente, à 5 ou 6 tours de spire à peine arqués, sommet arrondi; suture bien marquée; ouverture ovale-oblongue, à angle supérieur très aigu; columelle un peu arquée, tronquée à la base; péristome simple, tranchant, interrompu, couleur transparente, hyaline à l'état frais, blanche laiteuse lorsqu'elle est roulée; haut. 4-6 m.m.; diam. 1-1 $^1/_2$ m.m.

Hab. *Douro*. Porto, Granja, Luso (Nobre). Porto (Coll. Mus. Lisbonne). Coimbra (J. J. Rodrigues, Coll. Mus. Lisbonne).

Extremadura. Lisbonne, Belem, Algés (Nobre). Pombal (Coll. Mus. Lisbonne).

Algarve. Faro, Estoy (Castro).

Vit sur les feuilles mortes; commune à Granja, à la base des murs des chemins.



Aug. Nobre, del.

1, 2 — Buliminus obscurus, Müller.
3, 4, 5 — Pupa avenacea, var. *Lusitanica*, Ross.
6 — » granum, Draparnaud.
7, 8, 9 — » umbilicata, Draparnaud.
10, 11 — » muscorum, Linné.
12, 13 — Vertigo anglica (Ferussac).
14 — » antivertigo (Draparnaud)
15 — » pygmæa (Draparnaud)
16 — » muscorum (Draparnaud).
17 — » edentula (Draparnaud)

Aug. Nobre, del

1-5 — Clausilia rugosa, Draparnaud
6-7 — » plicata (Draparnaud).
8-9 — Balea perversa (Linné).
10-11 — Rumina decollata (Linne).
12-14 — Ferussacia folliculus, Gron
15-16 — Cionella subcylindrica (Linne).
17-18 — Cæcilianella acicula (Müller)

SURFACES NAUTILOÏDES

PAR

HATON DE LA GOUPILLIÈRE
Membre de l'Institut
Inspecteur général des Mines
Grand-Officier de la Légion-d'Honneur

(Suite)

SECONDE PARTIE

Volume, centre de gravité, moment d'inertie

§ VIII

Formules fondamentales

52. Nous entreprenons, dans cette seconde partie, d'établir pour les surfaces à front générateur, les diverses théories qui constituent la Géométrie des masses. Nous supposerons essentiellement en ce moment le front normal. Il nous sera aisé plus tard (§ XIV) d'étendre ces méthodes à un front quelconque.

J'appelle u l'élément, infinitésimal dans toutes ses dimensions, de l'aire U de la génératrice. Ses coordonnées, envisagées dans le plan de front, sont ξ et z. Je désigne par m_k le *moment d'ordre k* de l'aire entière

$$m_k = \Sigma u \xi^k ,$$

pris par rapport à l'axe vertical mené par le point décrivant

de la directrice. On aura par exemple m_0 pour l'aire elle-même U; m_1 représentera le moment ordinaire de cette étendue, et par suite $\frac{m_1}{m_0}$ l'abscisse de son centre de gravité; m_2 sera son moment d'inertie.

Envisageons le front dans deux situations infiniment rapprochées. Elles renferment entre elles une tranche élémentaire, représentant la différentielle dV du volume fini V compris entre deux fronts extrêmes. L'élément v de cette tranche sera un tronc de cylindre, élevé normalement sur l'aire infinitésimale u. Nous désignerons par n_k le moment d'ordre k du volume de la tranche dV

$$n_k = \Sigma v \xi^k .$$

Comme tout à l'heure, n_0 sera le volume lui-même dV de cette tranche, $\frac{n_1}{n_0}$ l'abscisse de son centre de gravité, n_2 son moment d'inertie.

Il est de la plus grand importance de ne jamais confondre les n avec les m. Les premières forment précisément l'objet de nos recherches dans cette seconde partie. Quant aux intégrales définies m, elles doivent être ici considérées comme directement connues par l'application du calcul intégral à la génératrice f, lorsque cette fonction est exprimée dans chaque cas.

53. L'élément infinitésimal du troisième ordre v a la forme d'un cylindre élevé sur la base u normalement au front F, et coupé obliquement par le suivant F'. L'angle de ces deux plans étant lui même infiniment petit, nous pouvons supprimer, au moyen d'une troncature opérée par un plan parallèle à F, un élément du quatrième ordre. Le volume de v sera alors le produit de n par la hauteur nn' (fig. 9).

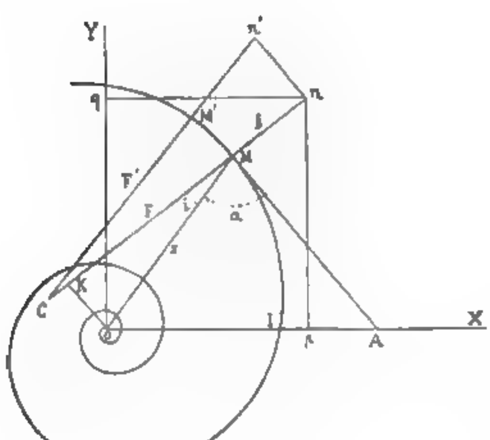


Fig. 9

Celle-ci peut s'évaluer en fonction de l'arc de la directrice $ds = MM'$, au moyen des triangles semblables CMM', Cnn' formés par deux rayons de courbure consécutifs de cette ligne. Je désigne leur longueur par ρ. Les triangles donnent alors la proportion

$$\frac{nn'}{ds} = \frac{\xi + \rho}{\rho}, \qquad nn' = \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) ds.$$

Il vient donc

$$v = u\left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) ds.$$

$$n_k = \Sigma u \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) \xi^k ds = ds \Sigma u \xi^k + \frac{ds}{\rho} \Sigma u \xi^{k+1}.$$

De là cette formule fondamentale

$$n_k = \left(m_k + \frac{m_{k+1}}{\rho}\right) ds, \tag{30}$$

qui relie les n aux m, pour passer des aires de la génératrice aux volumes de la surface à front générateur.

54. Nous apporterons ici une simplification essentielle en nous fondant sur la condition qui domine toutes nos théories, à savoir la similitude incessante des sections génératrices.

Marquons sur la directrice un point arbitrairement choisi, mais dorénavant immuable. Je le désignerai toujours par la lettre I, et ses coordonnées par r_1, θ_1. A moins d'avertissement contraire, nous adopterons ordinairement pour ce point l'intersection de la courbe par l'axe polaire ($\theta_1 = 0$); et nous prendrons comme unité de longueur ($r_1 = 1$) le segment ainsi intercepté sur cet axe.

Les dimensions linéaires de la section variable U de la génératrice, sont à celles de son passage U_1 par la trace I de la directrice sur l'axe polaire, dans le rapport de $\varphi(\theta)$ à $\varphi(\theta_1)$, ou en abrégé $\frac{\varphi}{\varphi_1}$. Les éléments superficiels seront dans le rapport des carrés. On aura donc

$$\xi = \frac{\varphi}{\varphi_1} \xi_1, \qquad u = \frac{\varphi^2}{\varphi_1^2} u_1,$$

$$\Sigma u \xi^k = \frac{\varphi^{k+2}}{\varphi_1^{k+2}} \Sigma u_1 \xi_1^k,$$

c'est-à-dire

$$(31)\qquad m_k = \frac{\varphi^{k+2}}{\varphi_1^{k+2}}(m_k)_1 .$$

Désignons par μ_k le facteur *constant*

$$\mu_k = \frac{(m_k)_1}{\varphi_1^{k+2}},$$

qui dépend de k, mais nullement de θ. Nous pourrons alors écrire simplement

$$m_k = \varphi^{k+2}\mu_k ,$$

et la formule fondamentale (30) deviendra

$$(32)\qquad n_k = \left(\mu_k + \frac{\varphi}{\rho}\mu_{k+1}\right)\varphi^{k+2} ds .$$

55. Ceci posé dans des termes complètement généraux, introduisons des hypothèses progressivement restrictives.

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons envisagé des surfaces vectorielles *du premier ordre,* en supposant que $\varphi(\theta)$ ne soit autre que le rayon vecteur lui-même $F(\theta)$ de la directrice. Nous appellerons plus généralement *surfaces vectorielles d'ordre p* celles pour lesquelles les dimensions de la génératrice varient comme la puissance p de ce rayon vecteur. Nous prendrons à cet effet, sans nous embarrasser de coefficients constants

$$(33)\qquad \varphi(\theta) = r^p = F^p(\theta) .$$

Cet ordre p sera ordinairement entier et positif; mais il peut tout aussi bien devenir fractionnaire, incommensurable, ou même négatif.

Pour $p = 1$, nous retrouverons les surfaces à proprement parler vectorielles. En faisant $p = 0$, on aura en particulier les *surfaces-tubes,* pour lesquelles la section normale à la directrice reste constante.

Avec une vectorielle d'ordre quelconque p, la formule fondamentale (32) deviendra;

$$(34)\qquad n_k = \left(\mu_k + \frac{F^p}{\rho}\mu_{k+1}\right) F^{(k+2)p} ds .$$

56. Abandonnous le caractère vectoriel, en rendant à φ toute son indépendance; mais particularisons la directrice, en adoptant la spirale logarithmique

$$F = e^{A\theta}, \qquad F' = Ae^{A\theta}, \tag{35}$$

$$ds = d\theta\sqrt{F^2 + F'^2} = \frac{e^{A\theta}}{\sin a}\,d\theta,$$

$$\rho = \frac{(F^2 + F'^2)^{\frac{3}{2}}}{F^2 + 2F'^2 - FF''} = \frac{e^{A\theta}}{\sin a}.$$

L'équation fondamentale (32) devient alors

$$n_k = \left(\mu_k + \frac{\varphi \sin a}{e^{A\theta}}\,\mu_{k+1}\right)\varphi^{k+2}\,\frac{e^{A\theta}}{\sin a}\,d\theta \tag{36}$$

$$= \left(\frac{e^{A\theta}}{\sin a}\,\mu_k + \varphi\mu_{k+1}\right)\varphi^{k+2}\,d\theta.$$

57. Réunissons maintenant les deux caractères qui viennent de nous occuper: directrice spirale et similitude vectorielle d'ordre p. Il viendra, en rendant à φ, dans la formule (36), sa valeur (33)

$$n_k = \left(\mu_k + \frac{e^{pA\theta}}{e^{A\theta}}\sin a\,.\,\mu_{k+1}\right)e^{(k+2)p\theta}\,.\,\frac{e^{A\theta}}{\sin a}\,d\theta$$

$$= \left(\frac{\mu_k}{\sin a} + e^{(p-1)A\theta}\mu_{k+1}\right)e^{[(k+2)p+1]A\theta}\,d\theta.$$

On peut aussi mettre ce résultat sous une autre forme, en introduisant la différentielle dr au lieu de $d\theta$

$$dr = \frac{\cos a}{\sin a}\,e^{A\theta}\,d\theta.$$

Il vient ainsi

$$n_k = (\mu_k + r^{p-1}\sin a\,.\,\mu_{k+1})\,\frac{r^{(k+2)p}}{\cos a}\,dr.$$

Pour une vectorielle ordinaire ($p = 1$), ces deux formules

deviennent

$$n_k = \left(\frac{\mu_k}{\sin a} + \mu_{k+1}\right) e^{(k+3)A\theta} d\theta,$$

(37) $$n_k = (\mu_k + \mu_{k+1} \sin a) \frac{r^{k+2}}{\cos a} dr.$$

§ IX

Volume

58. La recherche du volume V se fera en supposant $k = 0$ dans les formules générales du § VIII.

Prenons, ainsi qu'il a été dit (N° 54), le point fixe I sur l'axe polaire en supposant $\theta_1 = 0$, avec des coefficients d'homogénéité tels que $\varphi(\theta_1) = 1$. Dans ces conditions, μ_0, ou $\frac{(m_0)_1}{\varphi_1^2}$, se réduit à l'aire U_1 que présente la section génératrice lors de son passage en I.

Quant à μ_1, c'est alors le moment $U_1 \xi'_1$ de cette aire par rapport à la verticale de I, en appelant, pour cette situation spéciale, ξ'_1 l'abscisse (prise par rapport à I dans le front normal F_1) du centre de gravité de l'aire U_1.

De son coté n_0 est le volume dV de la tranche, et la formule générale (32) devient dans ces conditions

(38) $$dV = \left(1 + \frac{\varphi}{\rho} \xi'_1\right) U_1 \varphi^2 ds,$$

c'est-à-dire finalement

(39) $$\frac{dV}{d\theta} = \frac{U_1 \varphi^2}{F^2 + F'^2} [(F^2 + F'^2)^{\frac{3}{2}} + \xi'_1 \varphi (F^2 + 2F'^2 - FF'')].$$

Le problème se trouve ainsi ramené aux quadratures.

Envisageons quelques applications.

59. *Surfaces de révolution.* — Nous obtiendrons une vérification en prenant comme directrice un cercle concentrique à l'origine

$$F = 1, \qquad F' = F'' = 0,$$

avec une génératrice constante

$$\varphi = 1.$$

La formule (38) devient:

$$dV = (1 + \xi'_1) U_1 d\theta, \qquad V = (1 + \xi'_1) U_1 \theta.$$

Or ξ'_1 désigne la distance du centre de gravité de l'aire génératrice U_1 à la trace I, et par suite $1 + \xi'_1$ sa distance à l'axe de rotation. Le produit $(1 + \xi'_1)\theta$ est donc l'arc de cercle décrit par ce centre de gravité pendant que l'aire U_1 engendre un onglet de ce corps de révolution. Nous retrouvons ainsi le théorème de Guldin.

60. *Surfaces-tubes.* — Conservons la génératrice constante $\varphi = 1$, mais avec une directrice quelconque. La formule (38) s'écrira

$$dV = (ds + \xi'_1 d\varepsilon) U_1,$$

si nous appelons ε l'angle de contingence de cette courbe. On aura d'après cela

$$V = U_1 s + U_1 \xi'_1 \varepsilon.$$

Le volume de la surface-tube s'exprime donc par la somme de deux autres, à savoir: 1° le produit de l'aire constante par l'arc que décrit sur la directrice celui de ses points qui guide le mouvement normalement à cette courbe; 2° le produit de cette même aire par l'arc de cercle que décrirait son centre de gravité en tournant de l'angle total de contingence autour de l'axe mené par le point décrivant perpendiculairement au plan de la directrice (1).

61. *Surfaces de gyration.* — Je désigne ainsi les surfaces engendrées par la rotation d'un profil méridien dont un point décrit un cercle, mais qui, au lieu de rester invariable, comme pour les corps de révolution, se modifie homothétiquement par rapport à ce point d'après la loi $\varphi(\theta)$.

Prenons pour unité le rayon ρ du cercle qui sert de directrice. Son arc ds sera mesuré par $d\theta$, et la formule (38) de-

(1) Voy. le mémoire de M. Kœnigs sur les surfaces-tuyaux.

viendra

$$dV = (1 + \xi'_1\varphi)\,U_1\varphi^2 d\theta,$$

d'où en intégrant

$$V = U_1 \int \varphi^2(\theta) d\theta + U_1 \xi'_1 \int \varphi^3(\theta) d\theta.$$

Je ne m'arrêterai pas à des applications particulières.

62. *Spirales sinusoïdes.* — Envisageons comme directrice la spirale sinusoïde

$$r^n = C^n \cos n\theta,$$

d'ordre quelconque n

$$F = C \cos^{\frac{1}{n}} n\theta, \qquad F' = -C \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta \sin n\theta,$$

$$\sqrt{F^2 + F'^2} = C \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta.$$

Nous laissons la génératrice quelconque. Toutefois, pour simplifier les résultats, nous la supposerons *centrée*, c'est-à-dire décrivant la directrice, soit par son centre de gravité lui même, soit par la projection équatoriale de ce point. En un mot : $\xi'_1 = 0$.

Nous admettrons en outre la similitude vectorielle d'ordre quelconque p. La relation (38) donne alors :

$$dV = U_1 \left(\frac{r}{C}\right)^{2p} ds,$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{U_1}{C^{2p}} \sqrt{F^2 + F'^2} = U_1 C \cos^{\frac{2p-n+1}{n}} n\theta,$$

$$V = U_1 C \int_0^\theta \cos^{\frac{2p-n+1}{n}} n\theta . d\theta,$$

en intégrant depuis l'axe polaire ($\theta = 0$, $r = C$) jusqu'à un azimut quelconque.

On peut en particulier, lorsque n est positif, intégrer jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2n}$; ce qui correspond à $r = 0$, en embrassant une demi-boucle de la directrice.

63. Quel que soit l'ordre n, nous pouvons réussir l'intégra-

tion en employant une loi vectorielle toujours la même, à savoir la variation des dimensions de la génératrice en raison inverse de la moyenne géométrique entre le rayon vecteur et la longueur qui sert d'unité.

Cet énoncé donne en effet:

$$p=-\frac{1}{2}, \qquad \frac{2p-n+1}{n}=-1,$$

$$V=U_1C\int^{\theta}\frac{d\theta}{\cos n\theta}=\frac{U_1C}{n}\operatorname{Log}\operatorname{tang}\left(\frac{n\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

On peut notamment appliquer ce résultat aux directrices très simples:

$n=-2$, Hyperbole équilatère, rapportée à son centre,

-1, Ligne droite quelconque,

$-\frac{1}{2}$, Parabole, rapportée à son foyer,

$+\frac{1}{2}$, Cardioïde, rapportée à son rebroussement,

$+1$, Cercle, rapporté à un de ses points,

$+2$, Lemniscate de BERNOULLI, rapportée à son centre.

64. Posons maintenant

$$\frac{2p-n+1}{n}=N, \qquad (N+1)n-2p=1, \tag{40}$$

$$V=U_1C\int_0^{\theta}\cos^N n\theta d\theta=\frac{U_1C}{n}\int_0^{n\theta}\cos^N\alpha d\alpha.$$

Attribuons par la pensée à N diverses valeurs déterminées arbitrairement; puis, pour chacune d'elles, faisons varier corrélativement n et p de manière à satisfaire par leurs couples de valeurs simultanées à la condition (40). Si nous conservons à l'azimut θ une même valeur pour former la limite de l'intégration, l'on voit que la différentielle, et par suite l'intégrale définie, resteront identiques pour ces diverses hypothèses. De là une infinité de familles (de paramètre N) composées chacune d'une infinité de surfaces (de paramètres conjoints n, p) lesquelles,

bien que profondément différentes les unes des autres par la forme, présentent cette propriété remarquable d'avoir toutes, pour le même azimut limite θ, un même volume, dont la valeur ne varie que d'une famille à l'autre avec N.

On pourrait même, toutes les fois que N recevra une valeur commensurable, employer l'analyse indéterminée du premier degré à chercher pour n et p des systèmes de valeurs entières qui satisfassent à l'équation (40), de manière à obtenir des spirales sinusoides et des lois vectorielles simples.

Les systèmes de valeurs de n et p qui satisfont à la condition (40) pour une famille déterminée N, se groupent deux par deux pour des valeurs de n égales et de signes contraires. Elles correspondent à des spirales sinusoïdes transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques, et respectivement associées aux lois vectorielles

$$p=\frac{(N+1)n-1}{2}, \qquad p'=-\frac{(N+1)n+1}{2},$$

qui satisfont à la relation

$$p+p'=-1.$$

Il s'attachera de même un intérêt spécial aux familles d'ordre N entier et de signe quelconque; car l'intégration peut alors toujours s'effectuer entièrement par les méthodes classiques. J'indiquerai à cet égard les cas les plus simples.

65. Supposons en premier lieu

$$N=0; \qquad p=\frac{n-1}{2}, \qquad n=2p+1;$$

et considérons comme exemple dans cette famille le cercle passant par le pôle ($n=1$). Il s'ensuit: $p=0$, c'est-à-dire la loi vectorielle des surfaces-tubes. On obtient ainsi un anneau engendré par la révolution d'une aire quelconque, dont le centre de gravité parcourt un cercle. La formule (40) donne alors

$$V=U_1C\theta.$$

Dans cette expression C désigne le diamètre du cercle, et θ l'angle inscrit. $C\theta$ est donc le produit du rayon par l'angle au centre, c'est-à-dire l'arc du cercle directeur. D'ailleurs U_1 re-

présente l'aire génératrice. On retrouve donc le théorème de GULDIN.

66. Soit en second lieu

$$N = 1\,; \qquad p = n - \frac{1}{2}, \qquad n = p + \frac{1}{2}\,;$$

$$V = U_1C \int_0^\theta \cos n\theta d\theta = \frac{U_1C}{n} \sin n\theta\,.$$

Comme premier exemple dans cette seconde famille, considérons la parabole rapportée à son foyer

$$n = -\frac{1}{2}, \qquad p = -1\,; \qquad V = 2U_1C \sin\frac{\theta}{2}\,.$$

La similitude de la section génératrice doit alors se régler en raison inverse du rayon focal. Si l'on étend l'intégration jusqu'à $\theta = \pi$, il vient pour le volume du demi-solide indéfini

$$V' = 2_1UC\,,$$

et pour le corps entier

$$V'' = 4U_1C\,.$$

Prenons comme second exemple de cette même famille la cardioïde

$$n = \frac{1}{2}, \qquad p = 0\,,$$

surface-tube dont la directrice est conjuguée de la précédente par rayons vecteurs réciproques, et donne les mêmes formules.

67. Envisageons encore la famille de surfaces

$$N = 2\,; \qquad p = \frac{3n-1}{2}, \qquad n = \frac{2p+1}{2}\,;$$

$$V = U_1C \int_0^\theta \cos^2 n\theta d\theta = \frac{U_1C}{2} \int_0^\theta (1 + \cos 2n\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{U_1C}{4n} (2n\theta - \sin 2n\theta)\,.$$

Comme premier exemple, prenons le cercle passant par le pôle

$$n=1\,,\qquad p=1\,;\qquad V=\frac{U_1C}{4}(2\theta-\sin 2\theta)\,.$$

La surface est purement vectorielle, et nous retrouvons l'anneau variable à section normale (N° 48). Le volume du corps entier (pour $\theta=\pi$) est le suivant

$$V'=\frac{\pi U_1C}{2}\,,$$

c'est-à-dire le produit de l'aire génératrice par la moitié de la circonférence directrice.

La surface conjuguée sera, en changeant le signe de n

$$n=-1\,,\qquad p=-2\,.$$

Sa directrice est une ligne droite. Les dimensions de la génératrice varient en raison inverse du carré du rayon vecteur, et par conséquent son aire en raison inverse de la quatrième puissance. Le solide, quoique infini en longueur, comme celui que nous avons dérivé de la parabole, reste, ainsi que ce dernier, de volume fini, représenté par la formule précédente.

68. Je prendrai une dernière application parmi les valeurs négatives de N. L'hypothèse $N=-1$ serait précisément celle qui a permis de réussir l'intégration (N° 63), pour une valeur tout-à-fait quelconque de n, avec la loi spéciale $p=-\frac{1}{2}$. Il n'y a pas à y revenir.

Passons donc à la valeur

$$N=-2\,;\qquad p=-\frac{n+1}{2}\,,\qquad n=-(2p+1)\,;$$

$$V=U_1C\int_0^\theta\frac{d\theta}{\cos^2 n\theta}=\frac{U_1C}{n}\operatorname{tang} n\theta\,.$$

Comme premier exemple dans cette dernière famille, envisageons le cercle

$$n=1\,,\qquad p=-1\,;\qquad V=U_1C\operatorname{tang}\theta\,.$$

Les dimensions de la génératrice varient en raison inverse du

rayon vecteur; et l'on obtient une sorte de conque évasée en forme de cor. Son volume total serait infini; mais on peut le déduire de la formule précédente pour un azimut poussé aussi près que l'on voudra de π.

La figure conjuguée

$$n = -1, \qquad p = 0,$$

correspond à une directrice rectiligne, avec section constante. C'est donc un cylindre quelconque à bases parallèles; et son volume connu nous fournit une vérification de la formule précédente.

69. *Surfaces nautiloïdes.* — Arrivons enfin à l'objet principal de ces études: les surfaces nautiloïdes, à front normal, directrice spirale et similitude vectorielle ordinaire ($p = 1$). La génératrice reste quelconque; et c'est à titre particulier que l'on pourra invoquer, pour le nautile à front circulaire normal (N° 49), le résultat général que nous allons formuler.

La relation (37) donne alors, pour $k = 0$

$$d\mathrm{V} = n_0 = (\mu_0 + \mu_1 \sin a)\frac{r^2 dr}{\cos a}.$$

d'où [1], en intégrant à partir du pôle ($r = 0$).

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{U}_1}{3\cos a}(1 + \xi'_1 \sin a) r^3.$$

Il ne faut pas perdre de vue que cette formule totalise le volume de toutes les spires consécutives, qui parfois se pénètrent mutuellement dans une même portion de l'espace. Mais il est facile de s'affranchir de cette complication. Il suffit à cet égard de se limiter à l'évaluation d'un tronçon d'amplitude inférieure à 2π. Il sera la différence de deux expressions sem-

---

[1] Dans cette formule, et toutes les suivantes relatives aux surfaces nautiloïdes, a disparu l'homogénéité, que nous avions au contraire mise en évidence pour les spirales sinusoïdes; attendu que l'équation (35) de la spirale logarithmique suppose que l'on a pris pour unité la longueur OI interceptée sur l'axe polaire.

blables à la précédente; et dans cette soustraction la partie compliquée aura identiquement disparu.

Supposons en particulier une génératrice centrée sur la verticale du point décrivant ($\xi'_1 = 0$). Il vient alors plus simplement, pour le volume compté à partir du pôle

$$V = \frac{U_1}{3 \cos a} r^3,$$

et pour un tronçon limité M'M''

$$V'' - V' = \frac{U_1}{3 \cos a}(r''^3 - r'^3) = \frac{r'' - r'}{\cos a} \cdot \frac{U_1 (r'^2 + r''^2 + r'r'')}{3}.$$

Or $\frac{r}{\cos a}$ représente l'arc s de la spirale logarithmique compté à partir du pôle, et $U_1 r^2$ mesure la section U au point quelconque M de rayon r. On peut donc écrire

$$V'' - V' = (s'' - s') \frac{U' + U'' + \sqrt{U'U''}}{3}.$$

D'après cela, *le volume d'un tronc limité de nautiloïde à front normal quelconque, mais centré, est le produit de l'arc de spirale que décrit le centre de gravité de l'aire, par la moyenne arithmétique de la grande base, de la petite base, et d'une moyenne géométrique entre ces deux bases.*

§ X

Centres de gravité

70. La recherche du centre de gravité (c'est-à-dire celle du moment du premier ordre) se fera en supposant dans les formules générales du § VIII, $k = 1$. Les coordonnées de ce centre sont en effet le quotient par V (dont nous possédons maintenant l'expression) des moments Σvx, Σvy, Σvz. Nous reprenons d'ailleurs une entière généralité pour les trois fonctions F, f, φ.

Nous poserons d'abord des formules fondamentales (fig. 9)

$$x = Op = OM \cos MOA + Mn \cos (MOA - KMO)$$

$$= r \cos \theta + \xi \cos \left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right],$$

c'est-à-dire

(41) $$x = r \cos \theta + \xi \sin (\theta + a),$$

et de même

(42) $$y = r \sin \theta - \xi \cos (\theta + a).$$

Prenons d'après cela le moment relatif au plan YOZ, qui nous fournira l'abscisse du centre de gravité [1],

$$d\Sigma vx = r \cos \theta \, \Sigma v + \sin (\theta + a) \, \Sigma v\xi = n_0 r \cos \theta + n_1 \sin (\theta + a)$$

$$= \left(m_0 + \frac{m_1}{\rho}\right) r \cos \theta ds + \left(m_1 + \frac{m_2}{\rho}\right) (\sin \theta . ds \cos a + \cos \theta . ds \sin a)$$

$$= \left(\mu_0 + \frac{\varphi}{\rho} \mu_1\right) \varphi^2 r \cos \theta ds + \left(\mu_1 + \frac{\varphi}{\rho} \mu_2\right) \varphi^3 (dr \sin \theta + r \cos \theta \, d\theta).$$

Nous aurons donc, en divisant par θ

(43) $$\frac{d}{d\theta} \Sigma vx = \mu_0 \varphi^2 r \cos \theta \frac{ds}{d\theta}$$
$$+ \mu_1 \varphi^3 \left(\frac{r}{\rho} \cos \theta \frac{ds}{d\theta} + r \cos \theta + \frac{dr}{d\theta} \sin \theta\right)$$
$$+ \mu_2 \varphi^4 \left(r \cos \theta + \frac{dr}{d\theta} \sin \theta\right).$$

---

(1) Je crois devoir signaler à l'attention que, dans cette formule, et pour un grand nombre des suivantes, le signe de sommation Σ s'étend dans le premier membre à tout l'ensemble du corps considéré et, dans le second, seulement à la tranche infinitésimale. C'est au fond le $d\Sigma$ du premier membre qui équivaut aux Σ du second; les deux membres des équations se rapportant, bien entendu, au même système matériel.

On trouverait par une marche semblable (42)

$$(44)\qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vy = \mu_0\varphi^2 r \sin\theta \frac{ds}{d\theta}$$
$$+\mu_1\varphi^3\left(\frac{r}{\rho}\sin\theta\frac{ds}{d\theta}+r\sin\theta-\frac{dr}{d\theta}\cos\theta)\right)$$
$$+\mu_2\varphi^4\left(r\sin\theta-\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\right).$$

71. Envisageons en troisième lieu l'altitude z. Il vient à cet égard (N° **54**)

$$d\Sigma vz = \Sigma uz\left(1+\frac{\xi}{\rho}\right)ds = ds\Sigma uz + \frac{ds}{\rho}\Sigma uz\xi.$$

Nous avons représenté ci-dessus par m_1, m_2, ..., les intégrales $\Sigma u\xi$, $\Sigma u\xi^2$, ..., fonctions de la seule abscisse ξ de l'élément u. Désignons de même par l_1, l_2, ..,, les intégrales Σuz, Σuz^2,..., fonctions de l'altitude z uniquement; et encore par l'_2 l'intégrale $\Sigma uz\xi$ qui dépend à la fois des deux coordonnées. Ces symboles représentent, au même titre que les précédents m, des quantités qui doivent être considérées comme connues d'après l'équation de la génératrice (§ XIV).

De plus nous poserons, comme au N° **55**, en nous rapportant au même point arbitraire I

$$l_k = \frac{\varphi^{k+2}}{\varphi_1{}^{k+2}}(l_k)_1 = \lambda_k\varphi^{k+2}, \qquad \lambda_k = \frac{(l_k)_1}{\varphi_1{}^{k+2}}.$$

Il viendra dans ces conditions

$$(45)\qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vz = \left(\lambda_1+\frac{\varphi}{\rho}\lambda'_2\right)\varphi^3\frac{ds}{d\theta}.$$

En substituant dans les formules générales (43), (44), (45), les expressions classiques de $\frac{ds}{d\theta}$ et ρ, nous posséderons donc en fonction de θ, φ, F, F', F'' les dérivées par rapport à θ des moments relatifs aux trois plans coordonnés, et le problème se trouve ainsi ramené aux quadratures.

72. Attachons nous spécialement au cas des surfaces nauti-

loïdes, pour lesquelles nous avons

$$p = 1, \qquad \varphi = \mathrm{F},$$

$$r = e^{\mathrm{A}\theta}, \qquad \frac{dr}{d\theta} = \mathrm{A}e^{\mathrm{A}\theta}, \qquad \frac{ds}{d\theta} = \frac{r}{\sin a}, \qquad \rho = \frac{r}{\sin a}.$$

Il vient alors (43), avec une valeur constante pour a

$$\frac{d\Sigma vx}{d\theta} = \mu_0 r^4 \frac{\cos\theta}{\sin a} + \mu_1 r^4 \left(2\cos\theta + \frac{\cos a}{\sin a}\sin\theta\right)$$

$$+ \mu_2 r^4 \sin a \left(\cos\theta + \frac{\cos a}{\sin a}\sin\theta\right),$$

et par suite:

$$\Sigma vx = \left(\frac{\mu_1}{\sin a} + \mu_2\right)\cos a \int_{-\infty}^{\theta} e^{4\mathrm{A}\theta}\sin\theta\, d\theta$$

$$+ \left(\frac{\mu_0}{\sin a} + 2\mu_1 + \mu_2 \sin a\right)\int_{-\infty}^{\theta} e^{4\mathrm{A}\theta}\cos\theta\, d\theta.$$

Rien ne serait plus facile que de transcrire le résultat de ces intégrations, qui sont classiques; mais nous pouvons en simplifier l'expression de la manière suivante.

Le centre de gravité du volume, étendu depuis le pôle jusqu'au front normal mené par le point décrivant M, d'azimut θ, fait, d'après la similitude fondamentale, partie de l'édifice géométrique dont ce point est le directeur. Il suffit donc de déterminer la position de ce centre dans l'édifice pour un seul instant; par exemple pour le point de repère I, qui a été choisi sur l'axe polaire. Le centre G occupera ensuite, par rapport au terminus quelconque OM, une position homothétique de celle que présente ce dernier G_1 relativement à OI.

En un mot, il nous suffit d'intégrer, non plus de $-\infty$ à θ, mais de $-\infty$ à zéro. Ces quadratures, qui ont naturellement des expressions plus simples que les précédentes sont

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4\mathrm{A}\theta}\sin\theta\, d\theta = -\frac{\sin^2 a}{1 + 15\cos^2 a},$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4\mathrm{A}\theta}\cos\theta\, d\theta = \frac{4\sin a\cos a}{1 + 15\cos^2 a}.$$

et nous donnent

$$(1+15\cos^2 a)(\Sigma vx)_1 = -\sin^2 a \cos a\left(\frac{\mu_1}{\sin a}+\mu_2\right)$$

$$+4\sin a\cos a\left(\frac{\mu_0}{\sin a}+2\mu_1+\mu_2\sin a\right),$$

c'est-à-dire finalement

$$(1+15\cos^2 a)(\Sigma vx)_1 = 4\mu_0$$

$$+\mu_1\sin a(8-\cos a)+\mu_2\sin a(4\sin a-1).$$

On trouvera de même (44)

$$(1+15\cos^2 a)(\Sigma vy)_1 = -\mu_0\sin a$$

$$-2\mu_1(1+\cos^2 a)-\mu_2\sin a(1+3\cos^2 a).$$

En ce qui concerne le troisième moment, il nous vient (45)

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma vz = (\lambda_1+\lambda'_2\sin a)\frac{r^4}{\cos a}.$$

$$\Sigma vz = \frac{\lambda_1+\lambda'_2\sin a}{\cos a}\int_{-\infty}^{\theta} e^{4A\theta}\,d\theta = \frac{\sin a}{4\cos^2 a}(\lambda_1+\lambda'_2\sin a)e^{4A\theta},$$

et en particulier pour le point I

$$(\Sigma vz)_1 = \frac{\sin a}{4\cos^2 a}(\lambda_1+\lambda'_2\sin a).$$

§ XI

Lieux géométriques de centres de gravité

73. Proposons nous la recherche du lieu géométrique du centre de gravité, lorsque vient à se mouvoir le point décrivant, terminus d'un tronçon variable. Nous distinguerons à cet égard trois problèmes différents.

Nous pouvons en effet envisager: 1° le lieu du centre de gra-

vité γ de l'aire génératrice sans épaisseur U comprise dans le plan de front; 2° celui du centre de gravité g du tronc de cylindre infiniment mince dV compris entre ce front et le suivant; 3° ou enfin celui du centre de gravité G du tronçon fini V renfermé entre une section fixe et un front variable. Abordons successivement ces trois questions.

74. J'appellerai r', θ', z' les coordonnées du centre de gravité γ de l'aire sans épaisseur de la section génératrice. Il se trouve déterminé, dans le plan de front lui même, par cette altitude z' et son abscisse ξ' relative au point directeur M

$$\xi' = \frac{m_1}{m_0} = \frac{\mu_1 \varphi^3}{\mu_0 \varphi^2} = \frac{\mu_1}{\mu_0}\varphi. \tag{46}$$

Marquons par γ_0 sur la figure 10 la projection équatoriale du centre de gravité γ de l'espace.

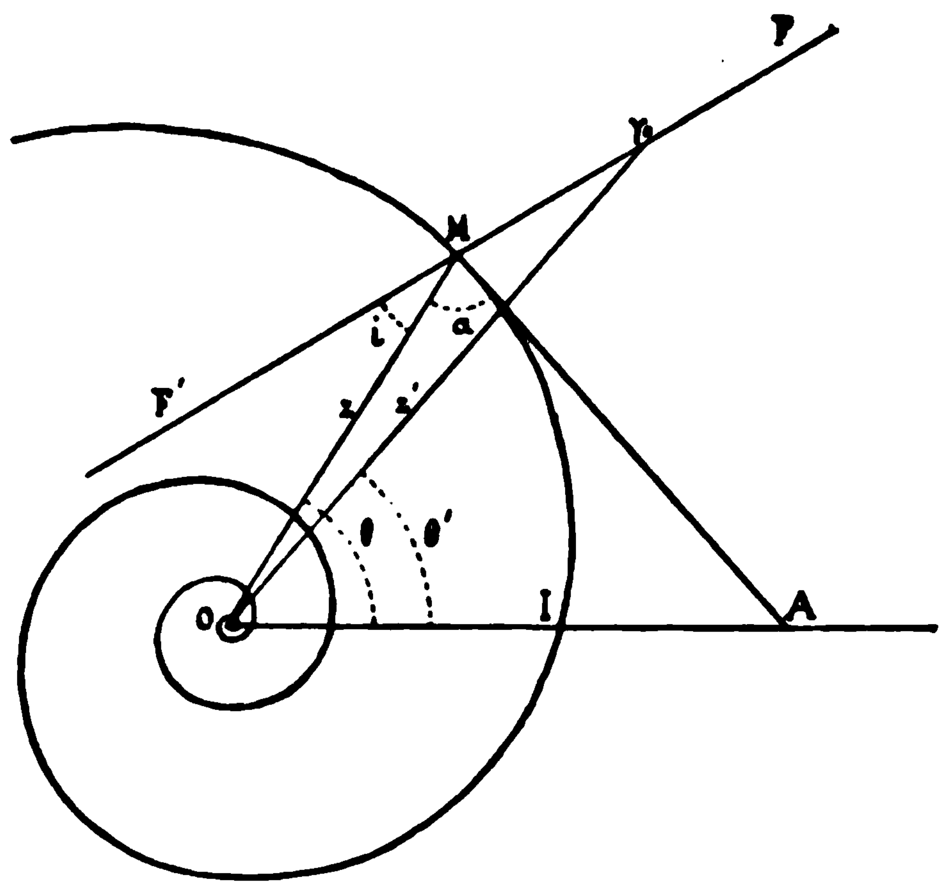


Fig. 10

Le triangle $OM\gamma$ nous donne en premier lieu

$$\overline{O\gamma_0}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{M\gamma_0}^2 - 2\overline{OM}\cdot\overline{M\gamma_0}\cdot\cos OM\gamma_0.$$

On a d'ailleurs

$$\cos OM\gamma_0 = -\sin a = -\frac{z\,d\theta}{ds} = -\frac{F}{\sqrt{F^2+F'^2}}.$$

Il vient donc

$$(47)\qquad r' = \sqrt{r^2 + \xi'^2 + 2r\xi' \frac{F}{\sqrt{F^2 + F'^2}}}.$$

En remplaçant r par F, et ξ' par l'expression (46), nous aurons celle de r' en fonction de θ.

Le même triangle donne en second lieu

$$\frac{\sin MO\gamma_0}{M\gamma_0} = \frac{\sin OM\gamma_0}{O\gamma_0},$$

c'est-à-dire

$$(48)\qquad \sin(\theta - \theta') = \frac{\xi'}{r'}\cos a = \frac{\xi'}{r'}\frac{dr}{ds} = \frac{\xi'}{r'}\frac{F'}{\sqrt{F^2 + F'^2}}.$$

En substituant pour ξ' et r' les valeurs (46) et (47), nous obtiendrons celle de θ' en fonction de θ.

L'élimination du paramètre θ entre les expressions (47) et (48) fournira, avec les coordonnées polaires, r', θ', l'équation du lieu géométrique de la projection équatoriale γ_0 du centre γ.

Quant à l'altitude z' de ce dernier, elle participe à la similitude générale dont le rapport régulateur est φ. On a donc, en se repérant au point I

$$\frac{z'}{z_1} = \frac{\varphi(\theta)}{\varphi(0)}.$$

En adjoignant cette relation aux deux précédentes (47) et (48) pour l'élimination de θ, l'on obtiendra entre r', θ', z' les deux équations du lieu géométrique du centre de gravité γ dans l'espace.

75. Passons au second problème, en envisageant, à la place de γ, le centre de gravité g du volume de la tranche infinitésimale.

Désignons par r'', θ'', z'' ses coordonnées, et par ξ'' son abscisse dans la section frontale par rapport au point directeur M. Si l'on remplace, sur la figure 10, γ_0 par g_0, projection de g, il n'y aura rien à changer pour la marche des calculs, si ce n'est que, dans la relation (46), les intégrales m, relatives à l'aire sans épaisseur, doivent être remplacées par les n, qui se rapportent au

volume de la tranche. Il vient ainsi :

$$(49) \qquad \xi'' = \frac{n_1}{n_0} = \frac{m_1 + \dfrac{m_2}{\rho}}{m_0 + \dfrac{m_1}{\rho}} = \frac{\mu_1 \varphi^3 + \dfrac{\mu_2 \varphi^4}{\rho}}{\mu_0 \varphi^2 + \dfrac{\mu_1 \varphi^3}{\rho}} = \varphi \frac{\mu_1 \rho + \mu_2 \varphi}{\mu_0 \rho + \mu_1 \varphi}.$$

En substituant (49) à (46), on n'aura qu'à conduire des éliminations semblables pour obtenir entre (r'', θ''), ou entre (r'', θ'', z'') les équations respectives du lieu géométrique de g_0 sur l'équateur, ou de g dans l'espace.

76. La modification sera plus profonde pour la troisième question. En effet G ne se trouve plus dans le plan de front, comme g et comme γ. Nous appellerons (r''', θ''', z''') ou (x''', y''', z'''), ses coordonnées.

Une première méthode consistera simplement à éliminer θ entre les expressions qui nous sont connues (43), (44), (45) et (39)

$$x''' = \frac{\Sigma v x}{V}, \quad y''' = \frac{\Sigma v y}{V}, \quad z''' = \frac{\Sigma v z}{V}.$$

En les envisageant toutes les trois à la fois, on obtiendra les deux équations du lieu de G dans l'espace. Si l'on se borne aux deux premières, elles fourniront celle du lieu de sa projection G_0 dans le plan de l'équateur.

Mais nous pouvons d'autre part rattacher cette recherche à des aperçus tout différents.

77. Si l'on décompose un système matériel quelconque en diverses parties, pour condenser en leurs centres de gravité respectifs leurs masses individuelles, on constitue par là un système fort différent, dont le centre de gravité est néanmoins resté le même.

Appliquons ici ce principe, et condensons au centre de gravité g de l'une des tranches élémentaires sa masse dV, en la répartissant sur l'arc infinitésimal ds'' qui en traverse l'épaisseur le long du second des lieux géométriques que nous avons appris à déterminer (N° 75). Si l'on fait cette opération pour toutes les tranches, cette ligne s'' se trouvera transformée en un

système matériel de densité variable $\frac{dV}{ds''}$; lequel aura le même centre de gravité G que le volume du tronçon V correspondant aux mêmes limites.

Or la formule (38) nous donne

$$dV = \left(\mu_0 + \mu_1 \frac{\varphi}{\rho}\right) \varphi^2 ds,$$

en fonction de θ et $d\theta$, et par suite aussi en θ'' et $d\theta''$ d'après les éléments de l'élimination relative à la seconde question. L'arc ds'' nous est connu de même en θ'' et $d\theta''$. La densité le sera donc de son côté en θ'', ou si l'on veut en s''.

Le troisième problème se trouve ainsi ramené à cette autre recherche d'ordre général : trouver le centre de gravité d'une courbe dont la densité variable est exprimée en fonction de son arc. Les coordonnées de G seront ainsi obtenues en fonction de s'', ou de θ'', et l'élimination du paramètre auxiliaire, conduite comme au N° 76, en fera connaître le lieu géométrique.

78. Cette méthode peut être employée pour les surfaces nautiloïdes.

A la vérité la remarque invoquée ci-dessus (N° 72) que les centres de gravité γ, g, G sont liés à l'édifice géométrique, suffit alors à nous montrer à priori que leurs lieux géométriques sont des cônhélices; mais nous ne saurions nous en tenir à ce simple aperçu, et nous poursuivrons leur détermination complète. Je me bornerai toutefois à la recherche du lieu G, qui exige la connaissance préalable de celui de g; mais nous ne nous arrèterons pas au lieu géométrique de γ, qui s'obtiendrait d'une manière toute semblable.

Nous avons d'après les formules (35), (49), (47)

$$\xi'' = r\frac{\frac{\mu_1}{\sin a} + \mu_2}{\frac{\mu_0}{\sin a} + \mu_1} = r\frac{\mu_1 + \mu_2 \sin a}{\mu_0 + \mu_1 \sin a}, \qquad r'' = \frac{jr}{\mu_0 + \mu_1 \sin a},$$

si nous employons l'abréviation j pour désigner le radical

$$j = \sqrt{(\mu_0 + \mu_1 \sin a^2) + (\mu_1 + \mu_2 \sin a)^2 + 2(\mu_0 + \mu_1 \sin a)(\mu_1 + \mu_2 \sin a)\sin a}.$$

Il nous vient d'autre part (48)

$$\sin(\theta-\theta'')=\frac{\xi''}{r''}\cos a=\frac{\cos a}{j}(\mu_1+\mu_2\sin a),$$

$$\theta''=\theta-\text{arc}\sin\left[\frac{\cos a}{j}(\mu_1+\mu_2\sin a)\right],$$

et par conséquent, en éliminant θ entre ces deux valeurs

$$r''=e^{A(\theta''+\delta)},$$

si l'on fait pour abréger

$$\delta=\text{arc}\sin\left[\frac{\cos a}{j}(\mu_1+\mu_2\sin a)\right]+\text{tang}\,a\,\text{Log}\left[\frac{j}{\mu_0+\mu_1\sin a}\right].$$

Le lieu de la projection g_0 du centre de gravité g des tranches infinitésimales est donc une spirale logarithmique égale à la directrice, mais déviée de l'angle δ.

Quant à l'altitude z'' de g, elle est donnée par la formule suivante, semblable à (49)

$$z''=\varphi\frac{\lambda_1\rho+\lambda_2\varphi}{\mu_0\rho+\mu_1\varphi},$$

d'où, en remplaçant φ par r, et ρ par $\frac{r}{\sin a}$

$$z''=r\frac{\lambda_1+\lambda_2\sin a}{\mu_0+\mu_1\sin a},$$

c'est-à-dire

$$z''=\frac{\lambda_1+\lambda_2\sin a}{\mu_0+\mu_1\sin a}e^{A\left\{\theta''+\text{arc}\sin\left[\frac{\cos a}{j}(\mu_1+\mu_2\sin a)\right]\right\}}.$$

z'' est donc proportionnel à r'', et par conséquent, dans l'espace, le lieu de g est la cônhélice qui a pour équation

$$z''=(\lambda_1+\lambda_2\sin a)\,r''.$$

79. Cette ligne conservant une inclinaison constante sur l'horizon, si, après y avoir réparti la masse des tranches qu'elle

traverse, on rabat verticalement toutes ces masses sur la projection équatoriale, on constituera une spirale logarithmique matérielle possédant, en fonction de son propre arc, une loi de densité identique à celle de la cônhélice. Le centre de gravité G de cette dernière se trouvera donc sur la verticale de celui de cette spirale logarithmique.

Si d'un autre coté, en reprenant sur la cônhélice les masses qu'on y avait réparties, on les transporte horizontalement sur cette verticale, cette opération ne changera pas le centre de gravité cherché. Il n'est donc autre finalement que celui de cette droite hétérogène. Mais les arcs de cônhélice sont, d'après la constance de son inclinaison, proportionnels à ces éléments de verticale. La densité de cette dernière suivra donc encore, en fonction de l'altitude, la même loi qne celle de la spirale en fonction de son arc.

Or l'élément infinitésimal du troisième ordre v est proportionnel à uds, par suite à r^2dr, à r''^2dr'', ou encore à $s''_0{}^2ds''_0$ sur la spirale, et à z''^2dz'' pour la verticale. La densité varie donc sur ces deux lignes en raison de $s''_0{}^2$ et de z''^2.

En ce qui concerne la verticale, l'altitude z''' du centre de gravité G s'obtiendra d'après cela immédiatement

$$z''' = \frac{\int_0^{z''} h^2dh \, . \, h}{\int_0^{z''} h^2dh} = \frac{3}{4} z''.$$

Quant à la spirale logarithmique, j'ai traité dans une autre occasion (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome CXLII, page 1174) de la recherche du lieu géométrique des centres de gravité de cette courbe lorsque sa densité varie en raison d'une puissance quelconque de son arc, entière, fractionnaire ou incommensurable, positive on négative. J'ai montré alors (¹) que ce lieu est une spirale logarithmique dont j'ai déterminé les éléments. Je me bornerai ici à les transcrire pour le seul cas qui nous occupe, dans lequel l'exposant est égal à 2.

Si l'on emploie la notation auxiliaire

$$\cot \beta = 4 \cot a ,$$

(¹) Sous certaines réserves relatives à l'exposant négatif, qu'il est inutile de rappeler, puisque ce cas ne se présente pas ici.

on a pour les coordonnées horizontales de G_0

$$x''' = 3r'' \sin\beta \cos(\theta'' - \beta),$$

$$y''' = 3r'' \sin\beta \sin(\theta'' - \beta),$$

et pour le lieu de ce point

$$r''' = e^{A(\theta''' + \Delta)},$$

c'est-à-dire une spirale logarithmique égale au lieu géométrique de g_0 et déviée de

$$\Delta = \text{arc}\cot(4\cot a) + \text{tang}\, a \,\text{Log}\left(\frac{3\cos a}{\sqrt{\sin^2 a + 16\cos^2 a}}\right),$$

ce qui revient finalement à faire tourner la directrice de l'angle $\delta + \Delta$.

Si l'on résolvait numériquement par rapport à l'angle a l'équation transcendante

$$\delta + \Delta = 2k\pi,$$

on déterminerait ainsi des surfaces nautiloïdes spéciales, dont la directrice (quelle que soit la génératrice) contient en elle-même tous les centres de gravité du volume croissant à partir du pôle.

§ XII

Moments d'inertie

80. La recherche des moments d'inertie se fera en supposant, dans les formules générales du § VIII : $k = 2$.

Si l'on demande le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque, la théorie générale permet de passer de cette droite à une autre menée parallèlement par le centre de gravité (lequel nous est connu, § X), puis, au moyen d'une opération inverse, de celle-ci à une troisième tirée parallèlement par l'origine des coordonnées. Nous pouvons donc nous borner à envisager les axes issus de ce point.

En second lieu, la théorie générale rattache le moment d'inertie relatif à une semblable droite, au moyen de l'ellipsoïde de Poinsot, à l'évaluation des six intégrales

$$(50) \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma v(y^2+z^2), & \Sigma v(x^2+z^2), & \Sigma v(x^2+y^2); \\ \Sigma vyz, & \Sigma vxz, & \Sigma vxy. \end{array}$$

La recherche des deux premières peut être remplacée par celle de leur somme et de leur différence

$$2\Sigma vz^2+\Sigma v(x^2+y^2), \qquad \Sigma v(x^2-y^2).$$

Nous substituerons donc aux trois premières évaluations les trois suivantes, qui seront plus avantageuses

$$\Sigma vz^2, \quad \Sigma v(x^2+y^2), \quad \Sigma v(x^2-y^2).$$

De là six questions à résoudre successivement.

La première est des plus simples. Il vient immédiatement

$$d\Sigma vz^2 = \Sigma u\left(1+\frac{\xi}{\rho}\right)ds \,.\, z^2 = ds\Sigma uz^2 + \frac{ds}{\rho}\Sigma u\xi z^2.$$

Si donc nous employons ces notations analogues aux précédentes (N° 71)

$$l_3 = \Sigma uz^2, \qquad l'_3 = \Sigma u\xi z^2,$$

nous obtiendrons la valeur

$$(51) \qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vz^2 = l_3 + \frac{l'_3}{\rho} = \left(\lambda_3+\frac{\varphi}{\rho}\lambda'_3\right)\varphi^4\frac{ds}{d\theta},$$

dans laquelle il suffira de substituer les expressions différentielles de ρ et $\frac{ds}{d\theta}$ en fonction de F, F', F'' pour que le problème se trouve ramené aux quadratures.

81. Nous avons en second lieu (52), (53)

$$d\Sigma v(x^2+y^2)$$
$$=\Sigma\{[r\cos\theta+\xi\sin(\theta+a)]^2+[r\sin\theta-\xi\cos(\theta+a)]\},$$
$$=r^2\Sigma v+2r\sin a\,\Sigma v\xi+\Sigma v\xi^2=n_0r^2+2n_1r\sin a+n_2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{ds}\Sigma v(x^2+y^2)=\left(m_0+\frac{m_1}{\rho}\right)r^2+2\left(m_1+\frac{m_2}{\rho}\right)r\sin a+\left(m_2+\frac{m_3}{\rho}\right).$$

Nous pouvons d'ailleurs (aussi bien dans cette circonstance que pour les évaluations qui suivront) invoquer les formules

$$(52)\qquad \sin a=r\frac{d\theta}{ds},\qquad \cos a=\frac{dr}{ds},$$

$$\sin 2a=2r\frac{dr}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2,\qquad \cos 2a=\frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r^2}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}.$$

Il vient donc, en multipliant par $\frac{ds}{d\theta}$

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma v(x^2+y^2)=\left(m_0+\frac{m_1}{\rho}\right)r^2\frac{ds}{d\theta}+2\left(m_1+\frac{m^2}{\rho}\right)r^2+\left(m_2+\frac{m_3}{\rho}\right)\frac{ds}{d\theta},$$

ou en fonction de φ

$$(53)\qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma v(x^2+y^2)=\left(\mu_0+\frac{\varphi}{\rho}\mu_1\right)\varphi^2r^2\frac{ds}{d\theta}$$
$$+2\left(\mu_1+\frac{\varphi}{\rho}\mu_2\right)\varphi^3r^2+\left(\mu_2+\frac{\varphi}{\rho}\mu_3\right)\varphi^4\frac{ds}{d\theta},$$

formule dans laquelle il suffit encore (aussi bien que pour les suivantes) de rendre à ρ et $\frac{ds}{d\theta}$ leurs valeurs différentielles en F, F′, F″.

82. Il vient en troisième lieu

$$d\Sigma v(x^2-y^2)=n_0r^2\cos 2\theta+2n_1r\sin(2\theta+a)-n_2\cos(2\theta+2a),$$

et par suite

$$\frac{d}{ds}\Sigma v(x^2-y^2)=\left(m_0+\frac{m_1}{\rho}\right)r^2\cos 2\theta$$

$$+2\left(m_1+\frac{m_2}{\rho}\right)(r\sin a\cos 2\theta+\cos a\sin 2\theta)$$

$$+\left(m_2+\frac{m_3}{\rho}\right)(\sin 2a\sin 2\theta-\cos 2a\cos 2\theta),$$

c'est-à-dire, en multipliant par $\frac{ds}{d\theta}$, substituant les valeurs (52), et ramenant les intégrales m aux constantes μ

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma v(x^2-y^2)=\left(\mu_0+\frac{\varphi}{\rho}\mu_1\right)\varphi^2r^2\frac{ds}{d\theta}\cos 2\theta \tag{54}$$

$$+2\left(\mu_1+\frac{\varphi}{\rho}\mu_2\right)\varphi^3r\left(\frac{dr}{d\theta}\sin 2\theta+r\cos 2\theta\right)$$

$$+\left(\mu_2+\frac{\varphi}{\rho}\mu_3\right)\varphi^4\left[2r\frac{\frac{dr}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}}\sin 2\theta+\frac{r^2-\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\frac{ds}{d\theta}\cos 2\theta\right].$$

83. Nous obtiendrons en quatrième lieu par une analyse absolument semblable

$$2d\Sigma xy=n_0r^2\sin 2\theta+2n_1r\cos(2\theta+a)+n_2\sin(2\theta+2a),$$

$$2\frac{d}{ds}\Sigma vxy=\left(m_0+\frac{m_1}{\rho}\right)r^2\sin 2\theta$$

$$-2\left(m_1+\frac{m_2}{\rho}\right)r(\sin a\sin 2\theta-\cos a\cos 2\theta)$$

$$+\left(m_2+\frac{m_3}{\rho}\right)(\sin 2a\cos 2\theta+\cos 2a\sin 2\theta),$$

et enfin ([1])

$$(55)\qquad 2\frac{d}{d\theta}\Sigma vxy=\left(\mu_0+\frac{\varphi}{\rho}\mu_1\right)\varphi^2r^2\frac{ds}{d\theta}\sin 2\theta$$

$$-2\left(\mu_1+\frac{\varphi}{\rho}\mu_2\right)\varphi^3r\left(r\sin 2\theta-\frac{dr}{d\theta}\cos 2\theta\right)$$

$$-\left(\mu_2+\frac{\varphi}{\rho}\mu_3\right)\varphi^4\left[\frac{r^2-\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\frac{ds}{d\theta}\sin 2\theta-2r\frac{\frac{dr}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}}\cos 2\theta\right].$$

84. Il vient en cinquième lieu

$$d\Sigma vxz=r\cos\theta\,\Sigma vz+\sin(\theta+a)\,\Sigma v\xi z,$$

$$=r\cos\theta\Sigma u\left(1+\frac{\xi}{\rho}\right)z+\sin(\theta+a)\,\Sigma u\left(1+\frac{\xi}{\rho}\right)\xi z,$$

$$=r\cos\theta\Sigma uz+\left[\frac{r}{\rho}\cos\theta+\sin(\theta+a)\right]\Sigma u\xi z+\frac{\sin(\theta+a)}{\rho}\Sigma u\xi^2 z.$$

$$=\left(l_1+\frac{l'_2}{\rho}\right)r\cos\theta+\left(l'_2+\frac{l_3}{\rho}\right)(\sin a\cos\theta+\cos a\sin\theta),$$

$$=\left(\lambda_1+\frac{\varphi}{\rho}\lambda'_2\right)\varphi^3r\cos\theta+\left(\lambda'_2+\frac{\varphi}{\rho}\lambda_3\right)\varphi^4\left(r\frac{d\theta}{ds}\cos\theta+\frac{dr}{ds}\sin\theta\right),$$

et enfin, en multipliant par $\frac{ds}{d\theta}$

$$(56)\qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vxz=\left(\lambda_1+\frac{\varphi}{\rho}\lambda'^2\right)\varphi^3r\frac{ds}{d\theta}\cos\theta$$

$$+\left(\lambda'_2+\frac{\varphi}{\rho}\lambda^3\right)\varphi^4\left(r\cos+\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\right).$$

---

[1] Il faut remarquer que la valeur (55) concerne $2\Sigma vxy$, tandis que le acteur 2 n'accompagnera pas celles de Σvxz, Σvyz (56), (57).

85. On trouvera en sixième lieu par une marche identique

$$d\Sigma vyz = r \sin\theta\, \Sigma \dot{v}z + \cos(\theta + a)\, \Sigma v\xi z\,,$$

$$\frac{d}{ds}\Sigma vyz = \left(l_1 + \frac{l'_2}{\rho}\right) r \sin\theta + \left(l'_2 + \frac{l_3}{\rho}\right)(\cos a \cos\theta - \sin a \sin\theta\,,$$

et en multipliant par $\dfrac{ds}{d\theta}$

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma vyz = \left(\lambda_1 + \frac{\varphi}{\rho}\lambda'_2\right)\varphi^3 r \frac{ds}{d\theta}\sin\theta \tag{57}$$

$$- \left(\lambda'_2 + \frac{\varphi}{\rho}\lambda_3\right)\varphi^4\left(r \sin\theta - \frac{dr}{d\theta}\cos\theta\right)\,.\,.$$

86. Les six formules (51 à 57), après que l'on y a substitué ρ et $\dfrac{ds}{d\theta}$ en F, F', F'', puis F et φ en θ, ramènent aux quadratures la détermination des six sommes auxquelles se réduit la recherche d'un moment d'inertie quelconque.

Elles renferment les intégrales définies

$$\mu_1\,,\quad \mu_3\,,\quad \lambda_1\,,\quad \lambda'_2\,,\quad \lambda'_3\,; \tag{58}$$

et

$$\mu_0\,,\quad \mu_2\,,\quad \lambda_2\,;$$

qui devront être déduites de l'équation de la génératrice, lorsque celle-ci sera spécifiée dans chaque cas. Mais ces huit intégrales forment deux groupes bien distincts. Les cinq premières renferment au premier degré l'une au moins des coordonnées z, ξ. Elles s'annulent donc identiquement en cas de symétrie du profil générateur par rapport à l'axe perpendiculaire à cette coordonnée. Toutes les cinq disparaissent à la fois d'après cela, en cas de symétrie dans les quatre angles droits [1]. Au con-

---

[1] Par exemple, pour le cercle, qui est symétrique dans les quatre angles, on a, en prenant son rayon comme unité

$$\mu_1 = \mu_3 = \lambda_1 = \lambda'_2 = \lambda'_3 = 0\,,\qquad \mu_0 = \pi\,,\qquad \mu_2 = \lambda_2 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Ce cas prendra beaucoup d'importance (en dehors des §§ III et VII) dans les troisième et quatrième parties de ce mémoire, où il constituera le système *permanent* des valeurs des huit intégrales.

traire, les trois dernières intégrales ne sauraient jamais s'annuler, car elles expriment l'aire et deux moments d'inertie ([1]).

([1]) Pour présenter un exemple comportant les huit intégrales, supposons que la génératrice soit la parabole

$$z = \xi^q,$$

(d'ordre positif quelconque, entier, fractionnaire ou incommensurable) dont le sommet soit placé au point I, en appelant b la base, et h l'ordonnée extrême du segment considéré. L'élément superficiel prend alors la valeur $u = d\xi dz$, et l'intégrale l'expression

$$\Sigma u z^i \xi^j = \int_0^b \xi^j d\xi \int_0^{\xi^q} z^i dz$$

$$= \frac{b^{(i+1)q+j+1}}{(i+1)\left[(i+1)q+j+1\right]} = \frac{h^{i+1} b^{j+1}}{(i+1)\left[(i+1)q+j+1\right]}.$$

Le tableau suivant résume les applications de cette formule à quatre exem-

Intégrales		Exposants i	Exposants j	Facteur d'homogénéité	Rectangle $q=0$	Triangle $q=1$	Parabole du 2e degré $q=\frac{1}{2}$	Seconde parabole cubique $q=\frac{3}{2}$
μ_0	Σu	0	0	bh	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
μ_1	$\Sigma u\xi$	0	1	b^2h	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$
λ_1	Σuz	1	0	bh^2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
μ_2	$\Sigma u\xi^2$	0	2	b^3h	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{9}$
λ'_2	$\Sigma u\xi z$	1	1	b^2h^2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
λ_2	Σuz^2	2	0	bh^3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
μ_3	$\Sigma u\xi^3$	0	3	bh^4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{11}$
λ'_3	$\Sigma u\xi^2 z$	1	2	b^3h^2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$

Pour conduire jusqu'au bout la présente analyse sans nous assujettir à la complication de nos six formules générales, nous conviendrons de nous réduire au cas de la disparition des cinq intégrales impaires. Dans ces conditions, les deux dernières dérivées (56) (57) s'annulent d'elles mêmes

$$(59) \qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vxz = 0\,, \qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vyz = 0\,;$$

et les quatre autres se simplifient de la manière suivante

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma vz^2 = \lambda_2\varphi^4\frac{ds}{d\theta}\,,$$

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma v\left(x^2+y^2\right) = \mu_0\varphi^2 r^2\frac{ds}{d\theta} + \mu_2\varphi^4\left(2\frac{r^2}{\rho}+\frac{ds}{d\theta}\right),$$

---

ples simples, à savoir : une horizontale, une droite inclinée passant par le point I, la parabole du second degré, la parabole semi-cubique (fig. 11).

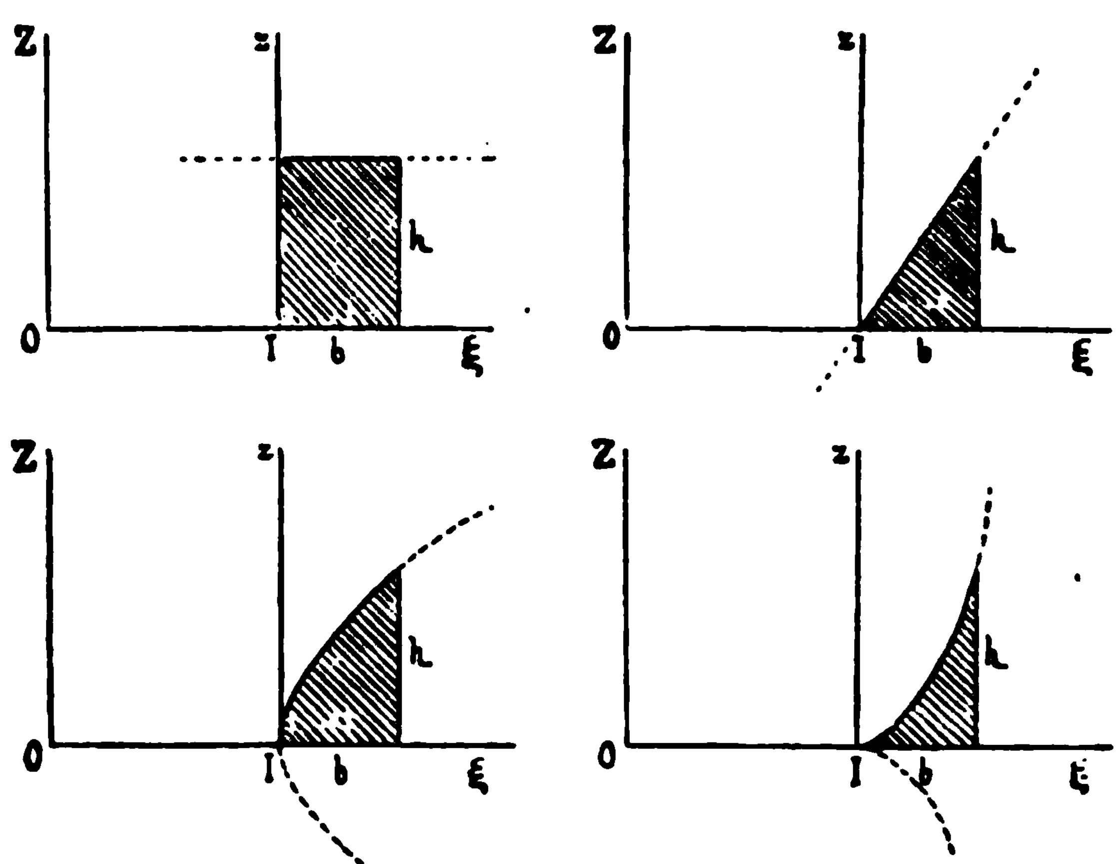


Fig. 11

Les deux premières colonnes présentent la désignation des huit intégrales qui figurent dans nos formules générales, et les deux suivantes les exposants correspondants. La cinquième renferme le facteur d'homogénéité, et les quatre dernières les valeurs numériques des coefficients pour les quatre exemples en question.

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma v(x^2-y^2)=\mu_0\varphi^2 r^2\frac{ds}{d\theta}\cos 2\theta$$

$$+\mu_2\varphi^4\left\{2r\frac{dr}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\frac{ds}{d\theta}}\right)\sin 2\theta+\left[\frac{2r^2}{\rho}+\frac{r^2-\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\frac{ds}{d\theta}\right]\cos 2\theta\right\},$$

$$2\frac{d}{d\theta}\Sigma vxy=\mu_0\varphi^2 r^2\frac{ds}{d\theta}\sin 2\theta$$

$$-\mu_2\varphi^4\left\{\left[\frac{2r^2}{\rho}+\frac{r^2-\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\right]\sin 2\theta-2r\frac{dr}{d\theta}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\frac{ds}{d\theta}}\right)\cos 2\theta\right\}.$$

§ XIII

Application aux nautiloïdes

87. Appliquons ces formules aux nautiloïdes à front normal, et génératrice quelconque.

Il vient en remplaçant φ par r, ou $e^{A\theta}$

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma vz^2=\frac{\lambda_2}{\sin a}e^{5A\theta},$$

d'où, en intégrant entre le pôle et un point quelconque

$$\Sigma vz^2=\frac{\lambda_2}{5\cos a}e^{5A\theta}=\frac{\lambda_2 r^5}{5\cos a}.$$

Si nous considérons en particulier le tronçon qui s'étend du pôle au point I, nous aurons

$$(\Sigma vz^2)_1=\frac{\lambda_2}{5\cos a}.$$

On trouve en second lieu

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma v(x^2+y^2)=[\mu_0+\mu_2(1+2\sin^2 a)]\frac{e^{5A\theta}}{\sin a},$$

$$\Sigma v(x^2+y^2)=[\mu_0+\mu_2(1+2\sin^2 a)]\frac{e^{5A\theta}}{5\cos a},$$

$$(60)\qquad [\Sigma v(x^2+y^2)]_1=\frac{\mu_0+\mu_2(1+2\sin^2 a)}{5\cos a}.$$

En troisième lieu:

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma v(x^2-y^2)=\left\{2\mu_2\sin 2a\sin 2\theta\right.$$

$$\left.+[\mu_0+(4\sin^2 a-1)\mu_2]\cos 2\theta\right\}\frac{e^{5A\theta}}{\sin a},$$

et par suite

$$\Sigma v(x^2-y^2)=4\mu_2\cos a\int_{-\infty}^{\theta}e^{5A\theta}\sin 2\theta d\theta$$

$$+\frac{\mu_0+(4\sin^2 a-1)\mu_2}{\sin a}\int_{-\infty}^{\theta}e^{5A\theta}\cos 2\theta d\theta.$$

Rien de plus facile, encore une fois, que d'effectuer ces intégrations (N° 72), mais je préfère remarquer qu'en raison de la similitude, l'ellipsoïde de Poinsot relatif au pôle pour le tronçon variable, fait partie de l'édifice géométrique entrainé par le point directeur de son azimut terminal. Il suffit donc d'en obtenir la détermination pour un seul tronçon, par exemple celui qui aboutit en I $(\theta=0)$. Une fois celui-ci connu, il suffirait, pour tout autre limité à un point quelconque M, d'y faire passer l'axe polaire, auquel on rapporterait cette nouvelle figure. Elle se retrouverait alors dans les conditions identiques aux précédentes, sauf les dimensions absolues; et le nouveau moment d'inertie serait à l'ancien dans le rapport des cinquièmes puissances des rayons-limites.

Nous n'avons donc qu'à effectuer les intégrations entre $-\infty$

et zéro. Or ces deux quadratures ont pour expressions

$$\int_{-\infty}^{0} e^{5A\theta} \sin 2\theta d\theta = -\frac{2 \sin^2 a}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a},$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{5A\theta} \cos 2\theta d\theta = \frac{5 \sin a \cos a}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a}.$$

Il vient d'après cela

$$(4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a) [\Sigma v (x^2 - y^2)]_1 =$$
$$- 2 \sin^2 a \,.\, 4 \mu_2 \cos a + 5 \sin a \cos a \frac{\mu_0 + (4 \sin^2 a - 1) \mu_2}{\sin a},$$

ou en réduisant

$$[\Sigma v (x^2 - y^2)]_1 = \frac{[5\mu_0 + (12 \sin^2 a - 5)\mu_2] \cos a}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a}.$$

Une analyse toute semblable donnera d'autre part

$$(2\Sigma vxy)_1 = \frac{[-2\mu_0 + 6 (3 \sin^2 a - 2) \mu_2] \sin a}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a}.$$

88. Si nous voulons déterminer les axes principaux d'inertie du pôle pour un bloc nautiloïde, de génératrice quelconque, il suffira, d'après la remarque précédente, de le faire pour le tronçon OI; leur disposition angulaire par rapport au front normal du point terminus restant immuable et liée à l'édifice géométrique de ce point.

Remarquons tout d'abord que l'un d'eux est l'axe zénithal lui-même. Nous avons trouvé en effet (N° 86) pour les deux intégrales qui s'y rapportent des dérivées nulles (59), entraînant des intégrales générales constantes, et des intégrales définies nulles

$$\Sigma vxz = 0\,, \qquad \Sigma vyz = 0\,,$$

ce qui est le caractère d'un axe principal OZ.

Les deux autres seront dès lors les axes de symétrie de l'ellipse suivant laquelle l'équateur coupe l'ellipsoïde de Poinsot. Or le calcul classique de la réduction d'une ellipse à ses axes

donne pour l'angle α que fait l'un d'eux avec OI la valeur

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{(2\Sigma v x y)_1}{[\Sigma v (x^2 - y^2)]_1} = \operatorname{tang} a . \frac{-2\mu_0 + 6\,(3 \sin^2 a - 2)\,\mu_2}{5\mu_0 + (12 \sin^2 a - 5)\,\mu_2} .$$

Si par exemple on envisage en particulier la plus simple des spirales logarithmiques, celle de 45 degrés, il vient avec une génératrice quelconque

$$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{2\mu_0 + 3\mu_2}{5\mu_0 + \mu_2} ,$$

et si celle-ci est un cercle (N° 86, note 1) comme dans le nautile

$$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{11}{21} , \qquad \alpha = 13^\circ\, 49'\, 22'',75 .$$

§ XIV

Front oblique

89. Dans ces théories relatives au volume, au centre de gravité et au moment d'inertie, nous avons essentiellement supposé le front normal, avec une entière généralité d'ailleurs en ce qui concerne la directrice, la génératrice, et la loi de similitude. Nous pouvons maintenant nous affranchir de cette restriction, et rendre à la loi d'inclinaison frontale toute son indépendance.

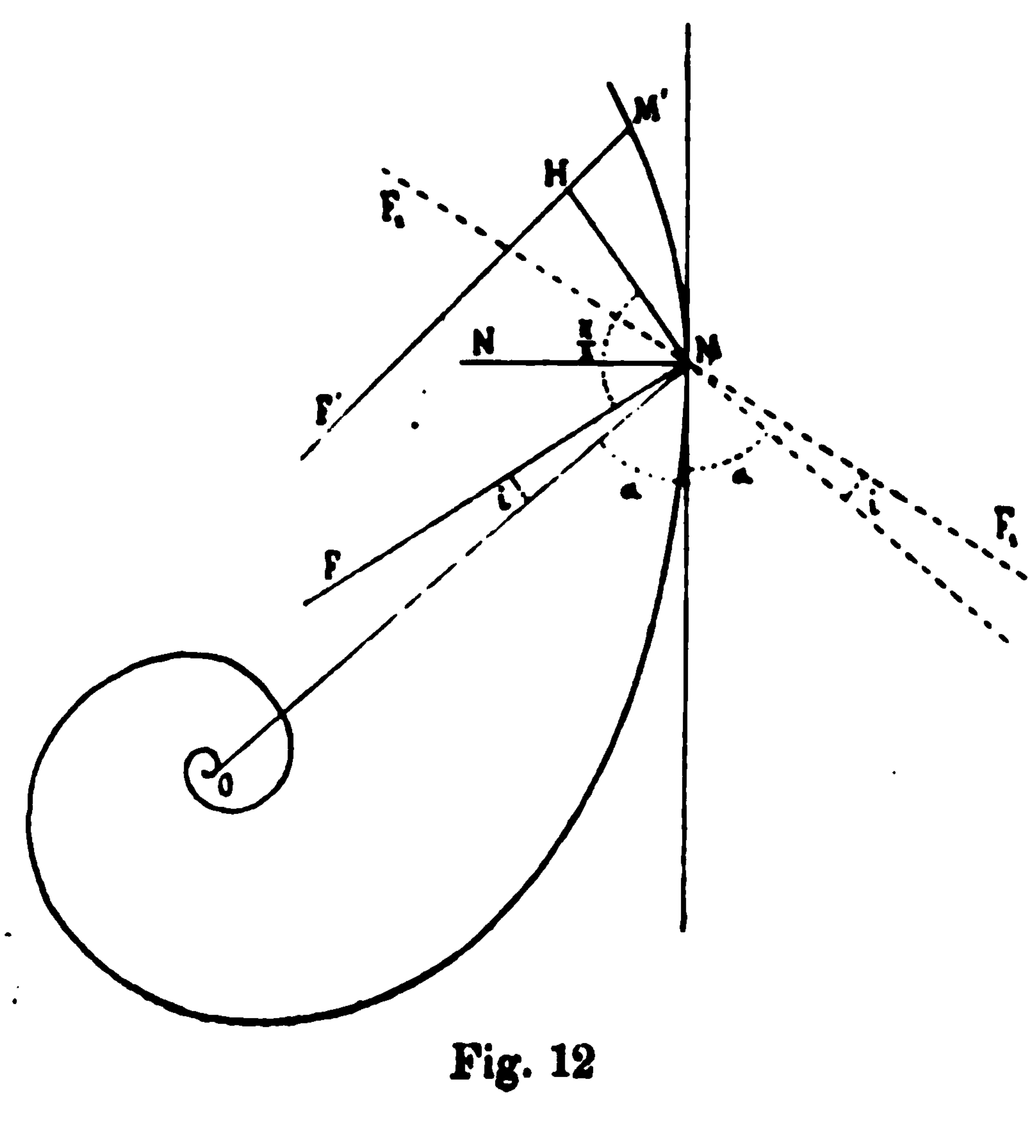


Fig. 12

Considérons en effet (fig. 12) le front MF mené sous un angle

quelconque

$$i = \psi(\theta),$$

par rapport au rayon vecteur OM; et soit M'F' un front infiniment rapproché. L'épaisseur élémentaire de la tranche, mesurée en M, sera MH perpendiculaire à ces droites, et l'on aura dans le triangle rectangle HMM'

$$\mathrm{MH} = \mathrm{MM}' \cos \mathrm{HMM}' = ds \cos\left(\mathrm{MM'F} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(i + a),$$

ou d'après la valeur de a

$$\mathrm{MH} = ds \sin\left[\psi(\theta) + \operatorname{arc\,tang} \frac{\mathrm{F}(\theta)}{\mathrm{F}'(\theta)}\right].$$

Dans les théories précédentes, l'épaisseur de la tranche en O était exprimée par ds. Il nous suffit donc, pour passer d'un cas à l'autre, d'introduire dans toutes les expressions différentielles auxquelles nous nous sommes trouvés conduits, le *multiplicateur*

$$\sin\left(\psi + \operatorname{arc\,tang} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'}\right). \tag{61}$$

Je ne saurais, bien entendu, reprendre avec cette modification la série des calculs et des discussions qui précèdent. Je me bornerai à en montrer l'application sur les deux exemples suivants.

90. Adoptons comme directrice un cercle passant par l'origine

$$r = \mathrm{F}(\theta) = \mathrm{C} \cos \theta,$$

et supposons un front *valsant*, c'est-à-dire exécutant autour de la verticale du point décrivant M une gyration proportionnelle à la rotation du rayon vecteur

$$i = \psi(\theta) = m\theta.$$

Supposons enfin que la surface soit vectorielle du premier ordre. Tout se trouve ainsi déterminé, à l'exception de la génératrice qui reste quelconque. Nous la supposerons cependant centrée, pour obtenir plus de simplicité dans les résultats.

Il vient dans ces conditions

$$\frac{F}{F'} = -\cot\theta, \qquad \text{arc tang}\,\frac{F}{F'} = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Le multiplicateur (61) devient donc

$$\sin\left[m\theta + \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right] = \cos(m+1)\theta.$$

Je signalerai tout d'abord une dualité qui associe deux par deux des allures valsantes distinctes aboutissant aux mêmes résultats. Supposons une nouvelle vitesse angulaire m' qui satisfasse à la condition

$$m' + 1 = -(m+1).$$

Le multiplicateur ne sera en rien modifié, non plus par conséquent que les conclusions de l'analyse. Or cette relation nous donne

$$m' = -(m+2).$$

Le nouveau problème se rapport donc à une rotation de sens contraire, dont la valeur absolue est modifiée dans le rapport de $m+2$ à m.

91. Effectuons l'intégration. La formule (38) qui exprime le volume devient, par l'adjonction du multiplicateur (61), et en tenant compte de ce que la section génératrice est centrée ($\xi'_1 = 0$)

$$dV = U_1\varphi^2 \cos(m+1)\theta . ds.$$

Or nous avons pris

$$r = C\cos\theta, \qquad \varphi = \frac{r}{C}\cos\theta, \qquad ds = Cd\theta;$$

$$\frac{dV}{d\theta} = U_1C\cos^2\theta\cos(m+1)\theta,$$

$$\frac{2}{U_1C}\frac{dV}{d\theta} = (1+\cos 2\theta)\cos(m+1)\theta,$$

$$\frac{4}{U_1C}\frac{dV}{d\theta} = 2\cos(m+1)\theta + \cos(m+3)\theta + \cos(m-1)\theta,$$

et en intégrant entre les points I et M, c'est-à-dire de 0 à θ

$$\frac{4}{U_1C}V = \frac{2}{m+1}\sin(m+1)\theta$$

$$+\frac{1}{m+3}\sin(m+3)\theta + \frac{1}{m-1}\sin(m-1)\theta.$$

Il faut toutefois faire exception pour les trois hypothèses qui annulent quelqu'un des dénominateurs

$$m = 1, \qquad m = -1, \qquad m = -3.$$

La première $m = 1$ donne directement

$$\frac{4}{U_1C}\frac{dV}{d\theta} = 1 + 2\cos 2\theta + \cos 4\theta,$$

$$\frac{4}{U_1C}V = \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta.$$

La dernière $m = -3$ constitue précisément avec celle-ci le cas de dualité, et fournit le même résultat.

La seconde hypothèse $m = -1$ donne de son côté

$$\frac{4}{U_1C}\cdot\frac{dV}{d\theta} = 2 + 2\cos 2\theta,$$

$$\frac{4}{U_1C}V = 2\theta + \sin 2\theta.$$

Elle se confond d'ailleurs avec son propre cas de dualité. On remarquera que le front fait alors, à l'extrémité M du rayon vecteur, un angle alterne-interne égal à celui que forme, en l'autre extrémité O, l'axe polaire. Il reste donc parallèle à lui-même, et l'on se trouve dans le cas déjà signalé (N° 5, note 1).

92. Généralisons l'analyse précédente en substituant à la directrice circulaire la spirale sinusoïde dont elle n'est qu'un cas particulier

$$r^n = C^n \cos n\theta.$$

Nous étendrons de même la loi de similitude en supposant une

surface vectorielle d'ordre quelconque p

$$\varphi = \left(\frac{r}{C}\right)^p = \cos^{\frac{p}{n}} n\theta .$$

Il vient dans ces conditions

$$ds = C \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta \, d\theta , \qquad a = \frac{\pi}{2} - n\theta ,$$

$$\sin\left(\psi + \text{arc tang}\frac{F}{F'}\right) = \cos(n\theta - \psi) .$$

L'expression (38) du volume (de section centrée) devient, en la complétant par ce multiplicateur

$$dV = U_1 \varphi^2 ds \cos(n\theta - \psi) ,$$

$$\frac{1}{U_1 C}\frac{dV}{d\theta} = \cos^{\frac{2p-n+1}{n}} n\theta \cos(n\theta - \psi) ,$$

quelle que soit la loi ψ de l'inclinaison frontale.

93. Signalons de nouveau une dualité analogue à celle que nous avons déjà rencontrée.

Relions à cet effet à la loi quelconque ψ, une nouvelle allure valsante par la condition

$$(n\theta - \psi_1) = -(n\theta - \psi) .$$

Le multiplicateur ne sera pas modifié, non plus que les résultats. Or on déduit de là

$$\psi_1 = 2n\theta - \psi = \pi - (\psi + 2a) . \tag{62}$$

Traçons d'après cela en MF_1 le symétrique de MF par rapport à la tangente MA, et prolongeons-la en sens contraire suivant MF_2. Nous obtiendrons en F_1MA l'angle $\psi + a$, et en $F_1MO : \psi + 2a$; par conséquent en $OMF_2 : \pi - (\psi + 2a)$. Le front conjugué est donc le symétrique du proposé par rapport à la tangente de la directrice.

94. Faisons maintenant certaines hypothèses sur la loi d'inclinaison frontale ψ.

Je suppose en premier lieu que le plan de la génératrice soit assujetti à rester symétrique de la tangente à la directrice par rapport au rayon vecteur. Il vient alors

$$i = a, \qquad \psi = \frac{\pi}{2} - n\theta, \qquad n\theta - \psi = 2n\theta - \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(n\theta - \psi) = \sin 2n\theta = 2 \sin n\theta \cos n\theta,$$

$$\frac{1}{2U_1C}\frac{dV}{d\theta} = \cos^{\frac{2p+1}{n}} n\theta \sin n\theta,$$

d'où en intégrant de zéro à θ

$$\frac{2p+n+1}{2nU_1C} V = 1 - \cos^{\frac{2p+n+1}{n}} n\theta = 1 - \left(\frac{r}{C}\right)^{2p+n+1},$$

solution d'une complète généralité, quel que soit l'ordre de la spirale sinusoïde.

La combinaison conjuguée (62) sera

$$\psi_1 = 3n\theta - \frac{\pi}{2}\pi = -3a.$$

Ce nouveau front est symétrique du précédent par rapport à la tangente, et il posséde une vitesse de rotation triple de celle du premier, mais en sens contraire.

95. Comme second exemple, envisageons le front méridien $\psi = 0$. Il vient alors

$$\frac{1}{2U_1C}\frac{dV}{d\theta} = \cos^{\frac{2p+1}{n}} n\theta.$$

La solution conjuguée est dans ce cas

$$\psi_1 = 2n\theta = \pi - 2a.$$

Le nouveau front reste donc symétrique du rayon vecteur par rapport à la tangente.

L'intégration ne peut plus, comme dans le cas précédent, s'effectuer d'une manière générale. On la réussira du moins lorsque l'exposant sera un nombre entier N, positif ou négatif.

Cette condition

$$\frac{2p+1}{n} = \mathrm{N}, \qquad p = \frac{\mathrm{N}n-1}{2}, \qquad n = \frac{2p+1}{\mathrm{N}},$$

peut toujours être remplie pour une spirale quelconque en lui adjoignant un ordre vectoriel convenable, ou réciproquement.

Contentons-nous à cet égard de l'unique hypothèse

$$\mathrm{N} = 1, \qquad p = \frac{n-1}{2}, \qquad n = 2p+1.$$

Il vient alors, pour une spirale d'ordre quelconque n associée à une loi vectorielle d'exposant $\frac{n-1}{2}$

$$\frac{1}{2_1\mathrm{UC}}\frac{d\mathrm{V}}{d\theta} = \cos n\theta, \qquad \frac{n}{2\mathrm{U}_1\mathrm{C}}\mathrm{V} = \sin n\theta;$$

ou inversement, pour une loi vectorielle p, appliquée à la spirale sinusoïde d'ordre $2p+1$

$$\frac{1}{2\mathrm{U}_1\mathrm{C}}\frac{d\mathrm{V}}{d\theta} = \cos(2p+1)\theta, \qquad \frac{2p+1}{2\mathrm{U}_1\mathrm{C}}\mathrm{V} = \sin(2p+1)\theta.$$

Cette hypothèse donne par exemple pour le cercle ($n=1$), la loi de similitude $p=0$, c'est-à-dire un annean-tube; et de même, pour la ligne droite ($n=-1$) la similitude $p=-1$, s'exerçant en raison inverse du rayon vecteur.

§ XV

Coordonnées intrinsèques

96. On connait l'élégance et l'utilité de l'*équation naturelle* des lignes planes

$$\rho = \mathrm{F}(\varepsilon),$$

qui les représente à l'aide d'une relation entre leurs *coordonnées intrinsèques,* à savoir le rayon de courbure ρ et l'angle de contingence ε évalué à partir d'une tangente fixe. Leur emploi permet de traiter avec facilité des courbes qui seraient souvent inabordables par d'autres voies.

Il semble en particulier que l'on doive en attendre ici un utile secours, puisque nos formules générales renferment en évidence le rayon de courbure ρ et l'arc ds de la directrice, relié à ε par les formules

$$(63) \qquad ds = \rho d\varepsilon, \qquad s = \int_0^\varepsilon F(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Il conviendra naturellement de se donner alors en fonction de la même variable ε la loi de similitude $\varphi(\varepsilon)$, et celle $\psi(\varepsilon)$ de l'inclinaison frontale. La génératrice seule restera comme ci-dessus représentée dans le plan de front par son équation ordinaire entre z et ξ; mais nous savons que celle-ci n'intervient que pour l'évaluation des diverses intégrales définies λ, μ.

La formule générale du volume (38) devient dès lors

$$(64) \qquad \frac{dV}{d\varepsilon} = U_1 (F + \xi'\varphi)\varphi^2.$$

Le genre de similitude le plus naturel, dans ces nouvelles conditions, consiste à supposer que les dimensions de la génératrice varient comme une puissance arbitraire p du rayon *de courbure* de la directrice

$$\varphi = F^p.$$

Il vient alors

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = U_1 (F^{2p+1} + \xi' F^{3p}).$$

On aura en particulier pour le premier ordre du genre de similitude

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = U_1 (1 + \xi') F^3,$$

ou, en représentant en abrégé par C la constante

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = CF^3, \qquad V = C \int_0^\varepsilon F^3(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Je me bornerai, pour les applications qui suivent, à cette formule simple; mais toutes les intégrations réussiraient encore, bien qu'avec plus de complication, pour une puissance quelconque p du rayon de courbure.

97. Considérons la développante de cercle d'ordre quelconque q, rapportée, ainsi que toutes celles des ordres qui précèdent, à un même point de la circonférence, qui constitue leur point de rebroussement commum

$$\rho = \varepsilon^q, \qquad s = \frac{\varepsilon^{q+1}}{q+1},$$

$$V = C\int_0^\varepsilon \varepsilon^{3q}\,d\varepsilon = \frac{C}{3q+1}\,\varepsilon^{3q+1} = \frac{q+1}{3q+1}\,C\rho^2 s.$$

Il vient pour l'épicycloïde ou l'hypocycloïde d'ordre quelconque q entier, fractionnaire, ou incommensurable ([1]), rapportée à son sommet

$$\rho = \cos q\varepsilon, \qquad s = \frac{1}{q}\sin q\varepsilon,$$

$$(65)\qquad V = C\int_0^\varepsilon \cos^3 q\varepsilon dr = \frac{C}{4}\int_0^\varepsilon (\cos 3q\varepsilon + 3\cos q\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$= \frac{C}{3q}\sin q\varepsilon\,(3 - \sin^2 q\varepsilon) = \frac{C}{3}(\rho^2 + 2)\,s.$$

Considérons encore la chainette rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\varepsilon}, \qquad s = \operatorname{tang}\varepsilon,$$

$$V = C\int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon}{\cos^6\varepsilon} = \frac{C}{15}(15\operatorname{tang}\varepsilon + 10\operatorname{tang}^3\varepsilon + 3\operatorname{tang}^5\varepsilon)$$

$$= \frac{Cs}{15}(15 + 10s^2 + 3s^4).$$

La tractrice, qui en est la développante, a pour équation rapportée à son point de rebroussement

$$\rho = \operatorname{tang}\varepsilon, \qquad s = -\operatorname{Log}\cos\varepsilon,$$

$$V = C\int_0^\varepsilon \operatorname{tang}^3\varepsilon\,d\varepsilon = \frac{C}{2}(\operatorname{tang}^2\varepsilon + 2\operatorname{Log}\cos\varepsilon) = \frac{C}{2}(\rho^2 - s).$$

([1]) La valeur $q = 1$ correspond à la cycloïde.

Soit enfin la chainette d'égale résistance rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos\varepsilon}, \qquad s = \text{Log tang}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$V = C\int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon}{\cos^3\varepsilon} = \frac{C}{2}\left[\frac{\sin\varepsilon}{\cos^2\varepsilon} + \text{Log tang}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{C}{2}(\rho\sqrt{\rho^2 - 1} + s).$$

98. Si, au lieu d'un front normal, nous supposons une inclinaison quelconque $\psi(\varepsilon)$ *sur la normale* (1), le multiplicateur à introduire (N° 89) sera simplement $\cos\psi$, et l'expression générale du volume deviendra

$$V = C\int_0^\varepsilon F^3(\varepsilon)\cos[\psi(\varepsilon)]\,d\varepsilon.$$

Bornons nous à l'exemple de l'épicycloïde, avec mouvement valsant de même module qu'elle

$$\psi(\varepsilon) = \cos q\varepsilon,$$

il viendra (65)

$$V = C\int_0^\varepsilon \cos^4 q\varepsilon d\varepsilon = \frac{C}{32\,q}(\sin 4q\varepsilon + 8\sin 2q\varepsilon + 3q\varepsilon)$$

$$= \frac{C}{32q}(8\sin q\varepsilon\cos^3 q\varepsilon + 12\sin q\varepsilon\cos q\varepsilon + 3q\varepsilon)$$

$$= \frac{C}{32}(8s\rho^3 + 12s\rho + 3\varepsilon).$$

99. Passons maintenant à la recherche du centre de gravité. La question se complique alors, car l'emploi des coordonnées intrinsèques exclut (et c'est ordinairement son avantage spécial) le recours à des repéres extérieurs pris dans le plan de la courbe. Or ils nous sont indispensables pour y rapporter le centre de gravité du volume engendré. Nous tournerons la dif-

(1) Et non plus sur le rayon vecteur des coordonées polaires, qui ont disparu de la question.

ficulté en rattachant ce centre à la tangente et à la normale du point pris pour origine des angles de contingence.

Le volume d'un tronçon V du corps nous est connu en fonction de ε par la formule générale (65). La tranche dV en sera la différentielle. Le centre de gravité g de cet élément et sa projection équatoriale g_0 nous sont également connus par leur abscisse ξ'' (49) dans le plan de front (fig. 13)

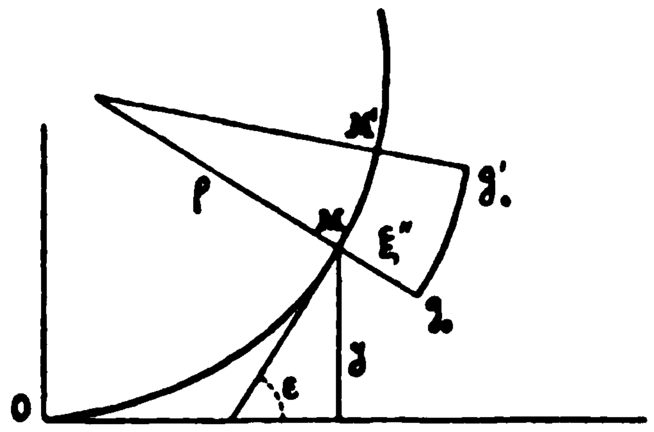


Fig. 13

$$\xi'' = \varphi \frac{\mu_1 \rho + \mu_2 \varphi}{\mu_0 \rho + \mu_1 \varphi},$$

et comme φ a été remplacé par ρ (N° 96)

$$\xi'' = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_0 + \mu_1} F.$$

L'abscisse de g_0 sera donc $x + \xi'' \sin \varepsilon$, c'est-à-dire

$$x + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_0 + \mu_1} F \sin \varepsilon,$$

et sa différentielle

$$dx + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_0 + \mu_1} (F' \sin \varepsilon + F \cos \varepsilon)\, d\varepsilon,$$

ou, en remplaçant dx par $ds \cos \varepsilon = \rho \cos \varepsilon\, d\varepsilon$

$$[(\mu_1 + \mu_2) F' \sin \varepsilon + (\mu_0 + 2\mu_1 + \mu_2) F \cos \varepsilon] \frac{d\varepsilon}{\mu_0 + \mu_1}.$$

Si nous condensons la masse dV en son centre de gravité g, son moment élémentaire par rapport à la normale initiale sera

$$dMy = \left(x + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_0 + \mu_1} F \sin \varepsilon\right) dV,$$

ce qui donne, en intégrant par parties à l'aide de la différen-

tielle dont nous avons formé ci-dessus l'expression

$$My = \left(x + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_0 + \mu_1} F \sin \varepsilon\right) V$$

$$- \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \int_0^\varepsilon V \left[(\mu_1 + \mu_2) F' \sin \varepsilon + (\mu_0 + 2\mu_1 + \mu_2) F \cos \varepsilon\right] d\varepsilon\,.$$

attendu que le terme explicite s'annule avec V pour la limite inférieure de l'intégration. Comme d'ailleurs

$$x = \int_0^\varepsilon F \cos \varepsilon d\varepsilon\,,$$

la recherche de My (c'est-à-dire du produit par V de l'abscisse du centre de gravité G de ce volume) revient finalement à la détermination des deux quadratures

$$\int_0^\varepsilon VF' \sin \varepsilon d\varepsilon\,, \qquad \int_0^\varepsilon VF \cos \varepsilon d\varepsilon\,,$$

dans lesquelles on aura préalablement substitué pour V sa valeur déduite de l'équation (64).

La recherche de l'ordonnée de G par rapport à la tangente initiale dépendra elle-même de ces deux autres intégrales définies

$$\int_0^\varepsilon VF' \cos \varepsilon d\varepsilon\,, \qquad \int_0^\varepsilon VF \sin \varepsilon d\varepsilon\,.$$

100. Considérons comme application l'épicycloïde.

Nous avons trouvé (65), pour le volume correspondant, la somme de deux termes en $\sin q\varepsilon$ et $\sin^3 q\varepsilon$. Les quatre quadratures précédentes nous présenteront donc, diversement associés, les facteurs $\sin \varepsilon$, $\cos \varepsilon$. $\sin q\varepsilon$, $\cos q\varepsilon$, $\sin^3 q\varepsilon$. Or pourrait même leur adjoindre un multiplicateur de la forme $\cos m\varepsilon$, si l'on voulait attribuer au front un mouvement valsant d'une allure quelconque. Or de tels produits peuvent toujours, par les moyens élémentaires, être décomposés en simples sinus ou cosinus de multiples de ε, dont l'intégration sera immédiate.

On en pourrait dire autant pour la développante de cercle d'ordre quelconque, à l'aide de formules connues d'intégration,

TROISIEME PARTIE

Surfaces sphérales

§ XVI

Surfaces enveloppes

101. Nous avons déjà rencontré deux types de surfaces se rapprochant, bien qu'à des degrés différents, de l'aspect extérieur du genre *Nautilus* que nous présente la nature vivante (§ III, § VII). Nous pouvons faire un pas de plus vers cette assimilation.

Il ne saurait suffire, pour que des surfaces méritent le nom de *corps ronds*, qu'elles présentent (comme les quadriques par exemple) des systèmes de stries circulaires. Cette dénomination doit être réservée en propre aux surfaces de révolution, qui peuvent être travaillées sur le tour. Mais on pourrait appeler *corps arrondis* ceux qui, le long de chacune de telles sections circulaires, admettent une sphère de raccordement. Ils se présentent d'après cela comme des *enveloppes de sphères*. Nous nous proposerons d'en constituer une pour le but qui nous occupe, sous le nom de *sphéro-nautile*. Mais il convient auparavant d'élargir cette question des enveloppes.

102. Supposons qu'une surface quelconque

$$f(x, y, z) = 0, \tag{66}$$

se meuve dans l'espace sous la double condition de varier homothétiquement par rapport au point qui sert actuellement d'origine pour l'équation (66), en même temps que ce centre de similitude décrira, pour son propre compte, une directrice quelconque représentée, par rapport aux axes fixes, par les deux relations

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \qquad F_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \tag{67}$$

La loi de similitude reste elle même arbitraire, définie à chaque instant par la fonction

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma). \tag{68}$$

Cherchons l'enveloppe ainsi engendrée.

Je commence par construire une surface homothétique à la proposée, par rapport à l'origine et dans le rapport voulu

$$f\left(\frac{x}{\varphi},\ \frac{y}{\varphi},\ \frac{z}{\varphi}\right)=0.$$

Puis je la transporte parallèlement à elle-même jusqu'à la position correspondante du point directeur $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$

$$f\left(\frac{x-\alpha}{\varphi},\ \frac{y-\beta}{\varphi},\ \frac{z-\gamma}{\varphi}\right)=0. \tag{69}$$

Nous obtenons ainsi l'une des *enveloppées*.

Nous en aurions une autre en récrivant la même formule après avoir attribué aux paramètres des valeurs $\alpha+d\alpha$, $\beta+d\beta$, $\gamma+d\gamma$. L'intersection de ces deux enveloppées fournirait alors une courbe, que nous appellerons *caractéristique*, et dont la surface cherchée sera le lieu géométrique.

Or dans les calculs à effectuer sur ces deux relations, nous pouvons substituer à la seconde la différentielle de la première prise par rapport à α, β, γ, en traitant x, y, z comme des constantes. Appelons (70) l'égalité ainsi obtenue. D'ailleurs les différentielles $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, n'y sont pas indépendantes, mais liées par l'obligation, pour le centre de similitude, de suivre la directrice. Nous devons donc également différentier les deux conditions (67), en vue d'éliminer entre ces trois formules différentielles les deux rapports de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, qui figurent au premier degré. Désignons de même par (71) l'égalité obtenue en annulant le déterminant de ce système. La caractéristique sera dès lors représentée par les formules (69) et (71).

Pour en obtenir le lieu géométrique, il suffira d'éliminer α, β, γ entre cette relation et les deux condilions (67). L'équation résultante en x, y, z, représentera l'enveloppe cherchée.

103. Supposons spécialement que la surface génératrice (66) soit une quadrique. L'équation (69) étant du second degré par rapport aux binômes $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$, si on la multiplie par φ^2, la partie de degré supérieur ne renfermera plus ce rapport de similitude; celle du premier degré se trouvera multipliée par φ, et le terme indépendant par φ^2. La différentielle (70) relative à α, β, γ sera par conséquent une relOtion du premier degré en $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$. Il en sera de même de celle (71) que l'on en déduit en chassant les rapports différentiels. Je la représen-

terai en abrégé par

$$(72)\qquad P = 0.$$

La caractéristique est donc alors une courbe plane, c'est-à-dire une conique; et par conséquent l'enveloppe admet un système de sections planes du second degré.

104. Formons actuellement, avec un paramètre arbitraire λ, l'équation générale

$$(73)\qquad f + \lambda P^2 = 0,$$

en représentant en abrégé par f l'expression (69). Nous constituons de cette manière une surface très générale du second degré, dont la rencontre avec l'enveloppée (69) se fait précisément suivant la caractéristique, attendu que la combinaison des deux équations (73) et (69) donne $P^2 = 0$. On reconnait en outre qu'il y a raccordement des deux surfaces suivant cette courbe, puisque leur intersection se fait dans un plan double.

Nous voyons ainsi que l'enveloppe cherchée des surfaces (69) est en même temps l'enveloppe de chacune des familles en nombre infini (73), qui sont définies individuellement par la série des valeurs numériques attribuées arbitrairement à λ.

105. Mais parmi cette infinité de familles, une seule nous intéressera ici. C'est celle des cônes circonscrits suivant la caractéristique à la quadrique mobile, pour chacun des instants de sa déformation. Cherchons donc la valeur bien déterminée de λ qui fournit cette famille spéciale.

Nous devons pour cela exprimer que la quadrique (73) passe par son propre centre. Ce point s'obtient en égalant à zéro les trois dérivées partielles de la fonction (73) relatives à x, y, z. Appelons (74) ce système d'équations du premier degré.

Si nous reportons dans la relation (73) les valeurs qu'il nous fournit pour les coordonnées du centre, nous déduirons de l'égalité ainsi formée la valeur spéciale λ_0 qui fournit des cônes. En attribuant alors cette valeur au paramètre de la relation générale (73), nous obtiendrons finalement l'équation

$$(75)\qquad f + \lambda_0 P^2 = 0,$$

qui représente la famille des cônes circonscrits.

106. Il nous est facile de trouver le lieu géométrique de leurs sommets.

Les coordonnées x, y, z de chacun d'eux sont en effet reliées par les trois équations (74) réunies aux deux conditions (67) régissant les paramètres α, β, γ. Si, entre ces cinq relations, on élimine ces trois derniers, il restera entre x, y, z les deux équations du lieu cherché.

On sait d'ailleurs qu'il n'est pas autre que celui des pôles du plan de la caractéristique par rapport à l'enveloppée qui le contient.

107. Supposons actuellement que la quadrique (66) soit *à centre;* et adoptons ce point C comme centre d'homothétie.

Je considère la surface variable dans deux positions quelconques. de centres C, C'; et je trace la droite CC'. Elle aura pour projections sur les trois axes $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$. L'équation (66) ne possédant pas de termes du premier degré en x, y, z, si l'on multiplie la formule (69) par φ^2, cette fonction φ n'affectera que le terme indépendant. La partie du second degré sera dès lors la même pour cette égalité et celle dans laquelle α, β, γ auront été remplacés par α', β' γ'. Elle disparaitra donc si nous retranchons ces deux formules l'une de l'autre. Il ne restera, en ce qui concerne x, y, z, que les termes du premier degré de (69), dans les coefficients desquels α, β, γ seraient remplacés par $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$. L'intersection des deux quadriques est donc plane.

Si l'on effectue à l'aide de la formule de Taylor le passage de (66) à (69), les coefficients de x, y, z au premier degré seront respectivement

$$f'_x(\alpha, \beta, \gamma), \qquad f'_y, \qquad f'_z.$$

Ceux de l'équation de l'intersection deviendront donc

$$f'_x(\alpha' - \alpha, \beta' - \beta, \gamma' - \gamma), \qquad f'_y, \qquad f'_z.$$

Or on sait que ces quantités sont proportionnelles aux cosinus directeurs du plan diamétral conjugué de la direction qui a pour composantes $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$, c'est-à-dire de la ligne CC', ou de la droite des centres. Telle est donc la direction du plan de l'intersection des deux quadriques.

108. Plaçons maintenant C et C' en deux points infiniment voisins sur la directrice (67). La droite CC' en deviendra la

tangente. Par conséquent, durant le mouvement qui engendre l'enveloppe, le plan de la caractéristique reste à chaque instant conjugué, dans la quadrique enveloppée, de celui de ses diamètres qui est tangent à la directrice.

Nous savons d'ailleurs que ce diamètre contient le sommet du cône circonscrit suivant cette caractéristique. Le lieu du sommet de ce cône, que nous avons appris à déterminer (n.° 106) est donc une ligne tracée sur la surface développable qui a la directrice pour arête de rebroussement, et se trouve formée par l'ensemble des tangentes de cette courbe.

§ XVII

Surfaces sphérales

109. Supposons enfin que la quadrique mobile devienne une sphère, dont le centre parcourt la directrice proposée.

Les surfaces enveloppes de sphères, que nous appellerons plus brièvement *sphérales*, ont fait l'objet de beaux travaux. Nous nous restreindrons ici au point de vue spécial de nos recherches, et notamment nous n'envisagerons, de ces surfaces, que la nappe réelle.

Remarquons avant tout que les caractéristiques étant planes, seront toujours des cercles.

Si nous prenons l'équation originelle (66) de la surface sous la forme

$$x^2+y^2+z^2=1, \tag{76}$$

l'enveloppée (69) deviendra

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varphi^2(\alpha,\beta,\gamma), \tag{77}$$

et sa différentielle relative aux trois paramètres

$$\begin{aligned}(x-\alpha)\,d\alpha+(y-\beta)\,d\beta+(z-\gamma)\,d\gamma \\ +\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,d\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,d\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\,d\gamma\right)\varphi=0.\end{aligned} \tag{78}$$

Elle représente la caractéristique, une fois que l'on en a chassé les rapports différentiels de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, déduits de la différentiation des relations (67). Or les coefficients des coordonnées

courantes x, y, z sont précisement ces trois éléments. On voit donc que le plan de la caractéristique est perpendiculaire à la tangente à la directrice au point occupé sur cette courbe par le centre de la sphère variable. C'était d'ailleurs facile à prévoir, puisqu'il est (n.° 108) parallèle au plan diamétral conjugué de cette tangente.

110. Toutefois ce plan ne passe pas par le point directeur. Il s'en trouve à une distance h mesurée suivant la tangente, qui a pour valeur

$$h = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\, d\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\, d\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\, d\gamma\right)\varphi}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}.$$

Cette expression représente dès lors la hauteur du cône qui a pour sommet le centre de la sphère, et pour génératrices les normales de cette dernière le long de la caractéristique.

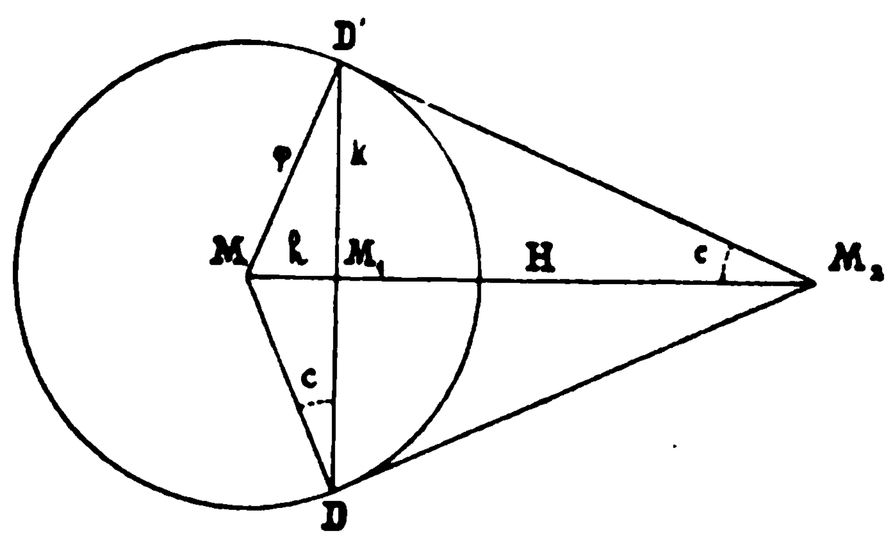


Fig. 14

L'angle c qu'elles font avec son plan (fig. 14) a pour valeur

$$\sin c = \frac{h}{\varphi} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\, d\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\, d\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\, d\gamma}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}},$$

ou encore

(79) $$\operatorname{tang} c = \frac{h}{k},$$

en désignant par k le rayon de la caractéristique.

Ce dernier forme avec h un triangle rectangle dont l'hypo-

ténuse est le rayon sphérique φ, ce qui donne

$$(80) \qquad k = \sqrt{\varphi^2 - h^2}.$$

On peut enfin exprimer la hauteur H du cône de révolution circonscrit à la sphère (et par suite à la sphérale) le long de cette caractéristique. Elle constitue une troisième proportionnelle à k et h,

$$(81) \qquad H = \frac{k^2}{h}.$$

L'angle générateur de ce cône n'est autre que c.

111. Attachons-nous spécialement, comme dans les deux parties précédentes de ce mémoire, au cas d'une directrice plane comprise dans l'équateur

$$(82) \qquad y = F(x).$$

Le rapport de similitude ne dépendra plus que d'une seule variable, sous la forme $\varphi(\alpha)$; puisque $\gamma = 0$, et que β peut être remplacé par $F(\alpha)$.

L'équation de la sphère mobile devient dans ces conditions

$$(83) \qquad (x-\alpha)^2 + [y - F(\alpha)]^2 + z^2 - \varphi^2(\alpha) = 0,$$

et sa dérivée relative à α

$$(84) \qquad (x-\alpha) + [y - F(\alpha)]\, F'(\alpha) - \varphi(\alpha)\,\varphi'(\alpha) = 0.$$

La recherche de l'équation de la sphérale se réduit à l'élimination du paramètre α entre ces deux relations.

La distance du centre de la sphère au plan de la caractéristique devient alors

$$(85) \qquad h = \frac{\varphi\varphi'}{\sqrt{1 + F'^2}},$$

et les quantités c, k, H s'en déduisent par les formules (79), (80), (81).

112. Les sphérales de cette catégorie présentant une série de sections circulaires perpendiculaires au plan de l'équateur,

peuvent être considérées comme des surfaces à front générateur.

Nous soulignerons avec insistance cette remarque, puisqu'elle suffit à elle seule pour étendre à ce nouvel objet de nos études tous les résultats de la seconde partie, relatifs à la recherche du volume, du centre de gravité, du moment d'inertie. Pour toutes ces surfaces, la génératrice restant un cercle, les constantes de divers ordres μ ou λ garderont toujours les valeurs qui ont été indiquées pour ce cas (N.° 86, note 1).

Toutefois pour pouvoir appliquer effectivement cette assimilation, il est nécessaire que nous possédions l'équation de la nouvelle directrice, ainsi que les deux lois de l'inclinaison frontale et de la similitude.

Or l'équation (82) de la directrice devient en coordonnées polaires

$$r \sin \theta = F(r \cos \theta).$$

Admettons que l'on puisse la résoudre sous la forme que nous employons d'ordinaire

$$r = F_1(\theta).$$

La distance h du point décrivant M au plan de la caractéristique devient alors (85), en rendant à a sa valeur $r \cos \theta$

$$h = \frac{\varphi[F_1(\theta)\cos\theta].\varphi'[F_1(\theta)\cos\theta]}{\sqrt{1+F'^2[F_1(\theta)\cos\theta]}}.$$

Représentons la en abrégé par

$$h = F_2(\theta).$$

Le triangle OMM_1 (fig. 15) donne en premier lieu

$$r_1^2 = r^2 + h^2 - 2rh \cos a,$$

l'angle a étant fourni par les formules

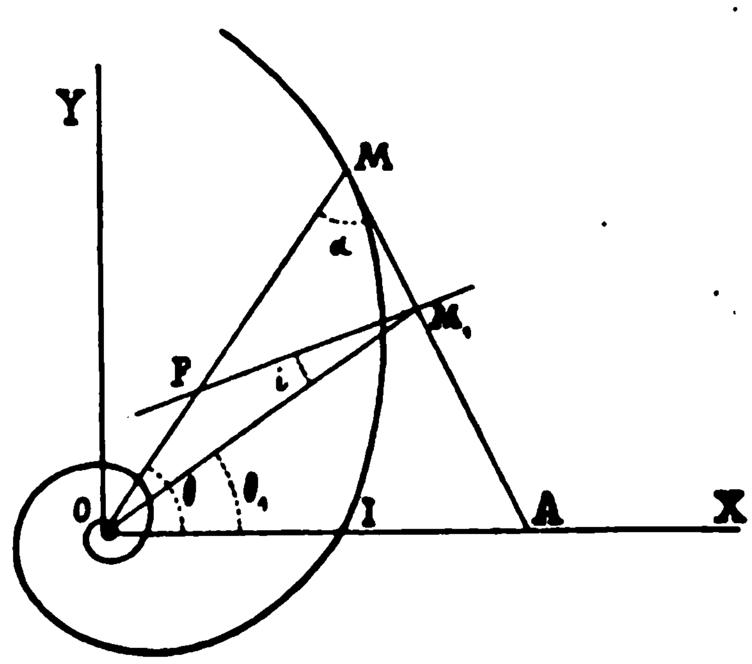


Fig. 15

$$\tan a = \frac{F_1}{F'_1}, \quad \sin a = \frac{F_1}{\sqrt{F_1^2+F'^2_1}}, \quad \cos a = \frac{F'_1}{\sqrt{F_1^2+F'^2_1}}.$$

Il vient donc

$$(86)\qquad r_1^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\frac{F'_1}{\sqrt{F_1^2+F'^2_1}}.$$

Nous aurons d'autre part

$$\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{h} = \frac{\sin a}{r_1},$$

c'est-à-dire

$$(87)\qquad \sin(\theta-\theta_1) = \frac{F_2}{r_1}\cdot\frac{F_1}{\sqrt{F_1^2+F'^2_1}}.$$

En éliminant θ entre ces deux relations, on obtiendra en r_1, θ_1 l'équation de la nouvelle directrice.

Quant à l'inclinaison frontale, elle a pour valeur

$$(88)\qquad i = OM_1F = \frac{\pi}{2} - OM_1A = \frac{\pi}{2} - (OMA + MOM_1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - a - (\theta - \theta_1).$$

En y remettant la valeur de θ en fonction de θ_1 procurée par l'élimination précédente, on obtiendra sous la forme

$$i = \psi(\theta_1),$$

la loi de cette inclinaison.

Enfin celle de la similitude deviendra

$$\varphi(\alpha) = \varphi[F_1(\theta)\cos\theta],$$

dans laquelle on aura substitué cette même valeur de θ.

113. Toutes les sphérales jouissent de cette importante propriété que leur directrice (plane ou gauche) est rencontrée par chacune de leurs normales. En effet celles-ci sont également des normales pour chacune des sphères enveloppées, qui ont leurs centres alignés sur la directrice. Cette dernière se trouve en quelque sorte *hérissée* de l'ensemble de ces normales, qui rayonnent de chacun de ses points en forme de cône de révolution, d'angle générateur variable $\frac{\pi}{2} - c$.

114. Nous pouvons tirer parti de cette propriété pour résoudre la question suivante.

Etant donnée une directrice F (82) dans le plan de l'équateur, déterminer pour chacun de ses points une loi φ du rayon sphérique telle que la sphérale qui en résultera soit circonscrite à une surface

$$\psi(x, y, z) = 0, \tag{89}$$

assignée à priori.

La normale à cette dernière en un de ses points (x, y, z), que nous prenons par la pensée sur la ligne de contact inconnue, a pour équations

$$\frac{X - x}{\psi'_x} = \frac{Y - y}{\psi'_y} = \frac{Z - z}{\psi'_z}.$$

D'après la remarque précédente (N° 113), elle rencontrera la directrice, puisqu'elle est également une normale de la sphérale; et ce ne pourra être que par sa trace sur le plan de l'équateur $(Z = 0)$, dans lequel est située cette courbe. On aura donc, entre les coordonnées de cette trace

$$\alpha = x - z\frac{\psi'_x}{\psi'_z}, \qquad \beta = y - z\frac{\psi'_y}{\psi'_z}, \tag{90}$$

la relation

$$\beta = F(\alpha), \tag{91}$$

c'est-à-dire

$$y - z\frac{\psi'_y}{\psi'_z} = F\left(x - z\frac{\psi'_x}{\psi'_z}\right). \tag{92}$$

La ligne de contact sera dès lors représentée par les deux équations (89), (92).

Quant à la sphère qui admet pour son propre compte cette normale au point (x, y, z), elle doit avoir son centre en (α, β), et un rayon φ encore inconnu. Son équation est donc

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \varphi^2.$$

Mais puisque le point (x, y, z) se trouve sur la ligne de contact, les trois relations (89), (90) permettent de déterminer ses coor-

données en fonction de a. Si donc on reporte ces trois valeurs dans cette expression de φ^2, on possèdera ainsi la loi cherchée $\varphi(a)$. A partir de ce moment, on rentrera dans les conditions ordinaires pour la recherche de l'équation de la sphérale.

§ XVIII

Sphérales réciproques

115. Appelons sphérales *vectorielles* celles pour lesquelles le rayon φ de la sphère variable reste en chaque point de la directrice D (plane ou gauche) proportionnel au rayon vecteur OM de cette courbe, que nous continnerons à représenter par r, mais en lui attribuant la valeur la plus générale, celle *de l'espace*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Le rayon sphérique sera donc Br, ou $r \sin b$, si nous conservons nôs anciennes notations. La lettre ρ restera affectée à représenter les rayons vecteurs ON des divers points de la sphérale elle-même.

Transformons tout l'ensemble de la figure par rayons vecteurs réciproques

$$\rho\rho' = k^2.$$

La directrice D se change en une courbe D' située sur le même cône de sommet O, et rencontraut la précédente en un ou plusieurs points K, de rayon vecteur $OK = k$.

Chacune des sphéres se transforme en une autre sphère. A l'intersection de deux d'entre elles infiniment voisines correspondra celle des deux nouvelles. En un mot chaque caractéristique se change en une nouvelle caractéristique circulaire, et l'ancienne enveloppe devient une autre sphérale. Déterminons en la directrice et la loi de similitude.

Les points le plus rapproché et le plus éloigné du pôle sur chaque sphère (fig. 16) ont pour rayons vecteurs

$$OP = r - Br = (1 - B)\,r,$$

$$OQ = r + Br = (1 + B)\,r.$$

Ils deviennent inversement sur la nouvelle sphère le plus éloigné

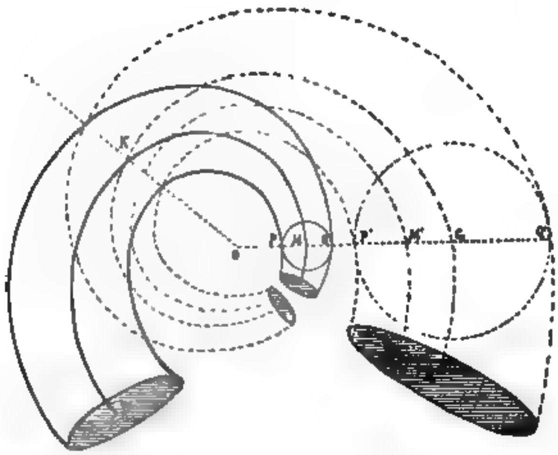


Fig. 16

et le plus rapproché du pôle

$$OP' = \frac{k^2}{(1-B)r}, \qquad OQ' = \frac{k^2}{(1+B)r}.$$

Mais le centre de celle-ci ne se trouve nullement au point M' réciproque de M. Il occupe le milieu C_1 de la distance P'Q'

$$r_1 = OC_1 = \frac{OP' + OQ'}{2} = \frac{k^2}{2r}\left(\frac{1}{1-B} + \frac{1}{1+B}\right) = \frac{k^2}{(1-B^2)r},$$

ou si l'on veut

$$r_1 = \frac{r'}{1-B^2},$$

en fonction du rayon r' du point réciproque M'. La nouvelle directrice D_1, lieu géométrique des points C_1, est donc une courbe homothétique de la transformée D' de la directrice proposée D, d'après le rapport de similitude [1]

$$\frac{1}{1-B^2} = \text{séc}^2 b.$$

---

[1] Il importe de remarquer que cette circonstance exclut de la théorie

Quant au nouveau rayon sphérique, il a pour valeur

$$C_1Q' = OC_1 - CQ' = \frac{k^2}{(1-B^2)r} - \frac{k^2}{(1+B)r}$$

$$= \frac{k^2}{(1+B)r}\left(\frac{1}{1-B} - 1\right) = \frac{Bk^2}{(1-B^2)r} = Br_1 .$$

La nouvelle sphérale est donc elle-même vectorielle, et du même indice B que la proposée. Nous pouvons dès lors énoncer ce théorème fondamental.

La transformée par rayons vecteurs réciproques d'une sphérale vectorielle quelconque d'indice sin b *est une autre sphérale vectorielle de même indice, ayant pour directrice une courbe homothétique, dans le rapport* séc² b, *de la transformée de la directrice proposée.*

116. Considérons comme exemple la surface qui concentrera plus loin notre attention (§ XXIII) sous le nom de *sphero-nautile*, et qui a pour directrice D la spirale logarithmique

$$r = e^{A\theta} .$$

La transformée D' de cette courbe sera

$$r' = \frac{k^2}{r} = k^2 e^{-A\theta} ,$$

et la nouvelle directrice D_1

$$r_1 = \frac{r'}{\cos^2 b} = \left(\frac{k}{\cos b}\right)^2 e^{-A\theta} ,$$

ce qui peut s'écrire

$$r_1 = e^{A\left[-\theta + 2 \operatorname{tang} a \operatorname{Log}\left(\frac{k}{\cos b}\right)\right]} .$$

La surface réciproque du sphéro-nautile est donc un sphéro-nau-

---

actuelle les sphérales spéciales que nous appellerons *équiradiales*, pour lesquelles le rayon sphérique reste constamment égal au rayon vecteur

$$B = 1 .$$

tile identique, mais renversé autour du rayon vecteur de valeur $\frac{k}{\cos b}$, de manière à tournoyer dans le sens dextrorsum si le proposé était sinistrorsum, ou réciproquement.

Sur les divers cônes de latitude, chaque cônhélice a pour transformée une cônhélice du nouveau sphéro-nautile.

117. Considérons de même la sphérale vectorielle qui a pour directrice la spirale sinusoïde d'ordre quelconque n (N° 137)

$$r = \cos^{\frac{1}{n}} n\theta .$$

La nouvelle directrice sera

$$r_1 = \frac{k^2}{r\cos^2 b} = \left(\frac{k}{\cos b}\right)^2 \cos^{-\frac{1}{n}}(-n\theta),$$

c'est-à-dire une spirale sinusoïde d'ordre égal et de signe contraire.

La transformée par rayons vecteurs réciproques de la proposée sera donc une sphérale appartenant à la même catégorie et de même indice vectoriel, mais d'ordre égal et de signe contraire, et amplifiée homothétiquement dans le rapport séc$^2 b$.

118. On obtient un énoncé identique avec les *spirales algébriques* (N° 138), qui ont pour équation

$$r = \theta^n .$$

§ XIX

Directrice en coordonnées sphériques

119. Le théorème fondamental qui précède (N° 115) permet d'associer deux par deux les sphérales vectorielles pour la recherche des leurs équations, en choisissant à cet effet la plus simple. Cette remarque devient particulièrement utile en ce qui concerne les directrices planes pour lesquelles on adopterait un pôle vectoriel *situé en dehors de leur plan*, à une distance h.

Ce plan aura en effet pour transformée par rayons vecteurs réciproques de module k une sphère passant par le pôle, sur laquelle les rayons vecteurs de la directrice plane D dessinent

sa transformée sphérique D′. La trajectoire D_1 du centre des nouvelles sphères variables, qui doit lui être semblable, sera elle-même tracée sur une seconde sphère fixe (d'après le module d'homothétie séc$^2 b$) laquelle est représentée par la fig. 17.

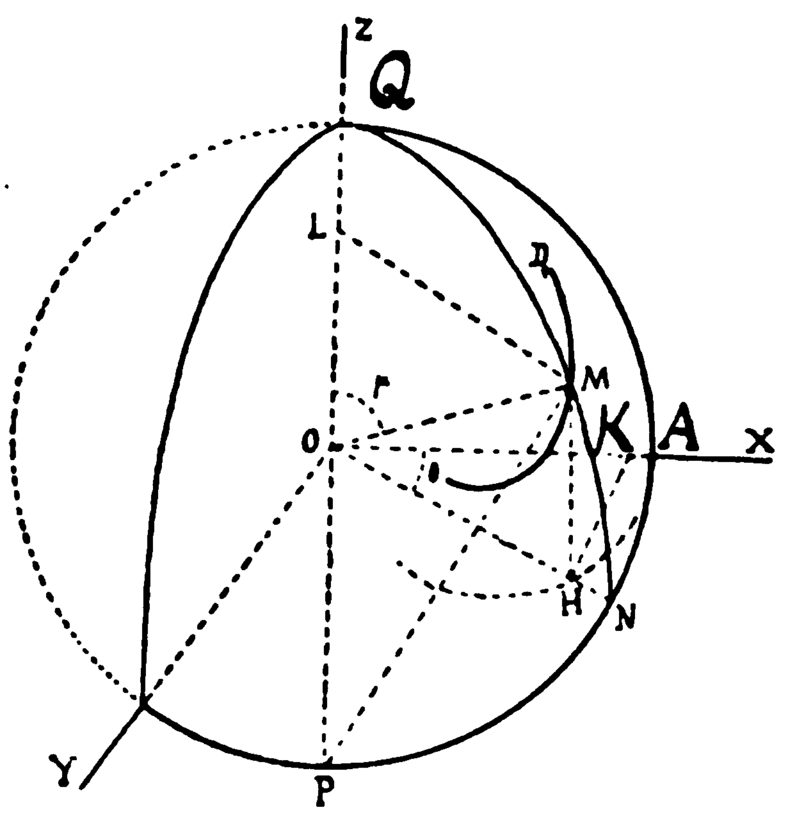


Fig. 17

Indiquons en conséquence la marche à suivre pour former l'équation de la sphérale vectorielle d'une courbe sphérique D_1, dont on possède, entre la longitude $\theta = AON$ de son point décrivant M, et sa *colatitude* $\mu = QOM$, l'équation

$$\theta = F(\mu).$$

Les coordonnées x, y, z du centre M de la sphère variable (si l'on prend pour unité le rayon de la sphère de référence), ont pour valeurs

$$x = OK = OH \cos\theta = \sin\mu \cos\theta,$$

$$y = HK = OH \sin\theta = \sin\mu \sin\theta,$$

$$z = MH = \cos\mu.$$

Le rayon vecteur PM sera, dans le triangle rectangle PMQ

$$r = PM = PQ \cos QPM = 2 \cos\frac{\mu}{2}.$$

Le rayon de la sphère variable est donc $2B \cos\frac{\mu}{2}$, et son équation, entre les coordonnées courantes X, Y, Z,

$$(X - \sin\mu\cos\theta)^2 + (Y - \sin\mu\sin\theta)^2 + (Z - \cos\mu)^2 = 4B^2\cos^2\frac{\mu}{2},$$

on en développant

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\sin\mu(X\cos\theta + Y\sin\theta) - 2Z\cos\mu$$

$$+ 1 - 4B^2\cos^2\frac{\mu}{2} = 0,$$

c'est-à-dire en coordonnées mixtes R, ω, λ

$$\frac{R^2}{\cos^2\lambda} - 2R\left[\sin\mu\cos(\theta-\omega) + \cos\mu\,\text{tang}\,\lambda\right]$$
$$-2B^2\cos\mu + (1-2B^2) = 0\,,$$

et enfin, d'après l'équation de la directrice

$$(93)\quad \left(\frac{R}{\cos\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{\cos\lambda}\right)\left[\sin\lambda\cos\mu + \cos\lambda\sin\mu\cos(F-\omega)\right]$$
$$-2B^2\cos\mu + (1-2B^2) = 0\,.$$

Telle est l'équation de la sphère variable en fonction du paramètre μ.

Prenons en la dérivée par rapport à ce dernier

$$\frac{B^2\sin\mu\cos\lambda}{R} + \sin\lambda\sin\mu - \cos\lambda\cos\mu\cos(F-\omega)$$
$$+\cos\lambda\sin\mu\sin(F-\omega)\,F' = 0\,,$$

on en divisant par $\sin\mu\cos\lambda$

$$\frac{B^2}{R} + \text{tang}\,\lambda - \cot\mu\cos(F-\omega) + F'\sin(F-\omega) = 0\,,$$

et enfin

$$(94)\qquad F'\sin(F-\omega) = \cot\mu\cos(F-\omega) - M\,,$$

si l'on pose pour abréger

$$M = \text{tang}\,\lambda + \frac{B^2}{R}\,.$$

Or la relation (93) donne, en la divisant par $\frac{2R}{\cos\lambda}$

$$\cos\lambda\sin\mu\cos(F-\omega) + \sin\lambda\cos\mu$$
$$= \frac{R}{2\cos\lambda} - \frac{\cos\lambda}{2R}(2B^2\cos\mu + 2B^2 - 1)\,.$$

c'est-à-dire

$$\sin\mu\cos(F-\omega) = -\tang\lambda\cos\mu + \frac{R^2}{2\cos^2\lambda} - \frac{B^2}{R}\cos\mu + \frac{1-2B^2}{2R}$$

$$= -\left(\tang\lambda + \frac{B^2}{R}\right)\cos\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\cos^2\lambda} + \frac{1-2B^2}{R}\right).$$

Si enfin nous introduisons la nouvelle abréviation

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\cos^2\lambda} + \frac{1-2B^2}{R}\right),$$

on pourra écrire

$$\sin\mu\cos(F-\omega) = N - M\cos\mu. \tag{95}$$

Substituons cette valeur de $\cos(F-\omega)$ dans l'égalité (94), il viendra

$$F'\sin^2\mu\sin(F-\omega) = N\cos\mu - M. \tag{96}$$

Actuellement multiplions les deux membres de la relation (95) par $F'\sin\mu$, élevons les au carré, ainsi que ceux de (96), et ajoutons. Nous faisons ainsi disparaitre ω, et il reste

$$F'^2\sin^4\mu = F'^2\sin^2\mu(N - M\cos\mu)^2 + (N\cos\mu - M)^2. \tag{97}$$

Cette résolvante renferme μ sous les signes trigonométriques et dans la fonction F', sans que F y paraisse par lui-même. Quant aux symboles M, N, ils sont uniquement fonctions de R et λ. Il ne restera plus qu'à tirer dans chaque cas de cette égalité l'expression de μ, pour la substituer dans la précédente (96), ce qui fournira en R, ω, λ l'équation de la sphérale.

120. Appliquons cette méthode à la recherche de la sphérale vectorielle qui a pour directrice une *loxodromie*.

Le triangle infinitésimal formé par les trois arcs élémentaires de cette ligne, du méridien et du parallèle donne pour l'angle *constant a* que fait la courbe avec le méridien

$$\cot a = \frac{d\mu}{\sin\mu\, d\theta},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\theta}{d\mu} = F'(\mu) = \frac{\tang a}{\sin \mu}.$$

La relation (97) devient dès lors

$$\tang^2 a\left[\sin^2 \mu - (N - M\cos\mu)^2\right] = (N\cos\mu - M)^2,$$

ou en développant

$$\begin{aligned}&[(M^2+1)\sin^2 a + N^2\cos^2 a]\cos^2\mu + 2MN\cos\mu\\ &\quad -[(N^2-1)\sin^2 a + M^2\cos^2 a] = 0,\end{aligned}$$

équation du second degré en $\cos\mu$, qui permettra d'achever la solution.

121. La transformée D′ de la loxodromie D est une spirale logarithmique du même angle a, et la courbe D_1 semblable à celle-ci une spirale identique, mais déviée. Toutefois il ne s'ensuit pas pour cela que la sphérale correspondante soit un sphéro-nautile. En effet le rayon des sphères variables devrait pour cela prendre comme valeur $Be^{A\theta}$, tandis qu'elle est $B\sqrt{h^2+e^{2A\theta}}$. Il s'agit donc ici d'une surface plus générale, d'après l'arbitraire h, admettant comme limite le sphéro-nautile, lorsque ce paramètre tend vers zéro.

§ XX

Directrice en coordonnées rectangulaires

122. Revenons maintenant à la directrice (82), rapportée, dans son propre plan, à des coordonnées rectangulaires. Nous avons vu qu'il suffit, pour obtenir l'équation de sa sphérale dans les conditions les plus générales, d'éliminer α entre les deux relations (83), (84).

Pour en montrer un exemple, prenons comme directrice un cercle de rayon égal à l'unité, avec un rayon sphérique By proportionnel à l'ordonnée de cette circonférence. Si θ désigne l'azimut du centre de la sphère variable, elle aura pour équation

$$(x-\cos\theta)^2 + (y-\sin\theta)^2 + z^2 = B^2\sin^2\theta,$$

$$(x^2+y^2+z^2) - 2(x\cos\theta + y\sin\theta) + \cos^2\theta + (1-B^2)\sin^2\theta = 0,$$

ou, en coordonnées mixtes,

$$\frac{R^2}{\cos^2\lambda} - 2R\cos(\theta - \omega) + 1 - B^2\sin^2\theta = 0.$$

Cette relation donne comme dérivée relative à θ

$$R\sin(\theta - \omega) = B^2\sin\theta\cos\theta.$$

On tire de là

$$\sin(\theta - \omega) = \frac{B^2}{R}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\cos(\theta - \omega) = \frac{R}{2\cos^2\lambda} + \frac{1 - B^2\sin^2\theta}{2R},$$

et en ajoutant les carrés

$$1 = \frac{B^4\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta)}{R^2} + \left(\frac{R}{2\cos^2\lambda} + \frac{1 - B^2\sin^2\theta}{2R}\right)^2,$$

équation bicarrée en $\sin\theta$. Il n'y aura plus qu'à substituer la valeur qu'elle fournit dans l'équation dérivée, pour obtenir celle de la sphérale.

123. La méthode générale se simplifie pour les sphérales *équilatères*, dans lesquelles le rayon de la sphère mobile reste constamment égal à l'ordonnée de la directrice.

Si en effet on remplace φ par F dans l'équation (83), elle se réduit à

$$\text{(98)} \qquad F(a) = \frac{(a - x)^2 + y^2 + z^2}{2y},$$

d'où la dérivée

$$\text{(99)} \qquad F'(a) = \frac{a - x}{y},$$

avec élimination de a entre ces deux formules.

124. Si nous y faisons à la fois $y = 0$, $z = 0$, l'une quelconque des deux donne $x = a$, et l'autre se trouve identiquement satisfaite par cette substitution. Il en faut conclure que

la droite représentée par ces deux équations, c'est-à-dire l'axe des abscisses, fait toujours partie de la surface. Ce résultat, d'ailleurs évident à l'avance, nous permet de signaler une conséquence utile.

Le pied P de toute ordonnée (fig. 18) fait d'après cela partie de la caractèristique. Or nous savons d'une manière générale (N° 109) que la trace du plan de cette courbe est une perpendiculaire sur la tangente en M à la directrice. Abaissons donc cette perpendiculaire PP'. Mais cette tangente contient aussi le sommet M_2 du cône de révolution circonscrit suivant la caractéristique. Or PO tangente au grand cercle de la sphére mobile est une des génératrices de ce cône. Le sommet M_2 se trouve ainsi déterminé par l'intersection de ces deux droites. Dès lors la sphérale se présente sous un nouvel aspect distinct du précédent, comme l'enveloppe des cônes de révolution engendrés par la rotation de l'axe des abscisses autour de toutes les tangentes de la directrice successivement.

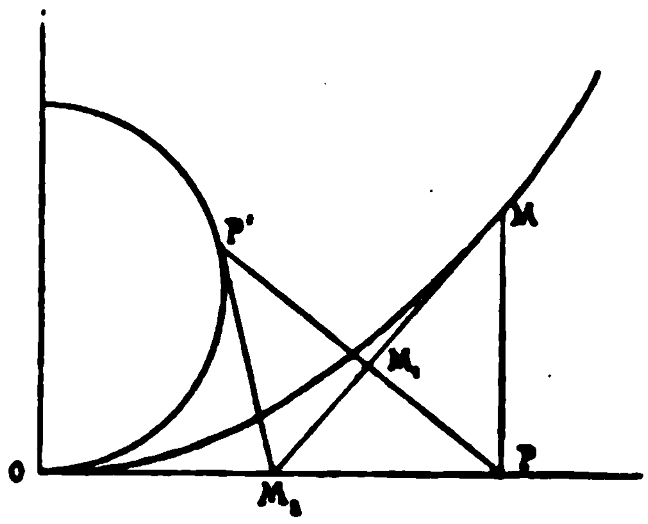


Fig. 18

125. Prenons comme exemple la *logarithmique*

$$y = e^{mx}.$$

Les formules (98), (99) deviennent

$$e^{ma} = \frac{(a-x)^2 + y^2 + z^2}{2y},$$

$$e^{ma} = \frac{a-x}{my},$$

d'où il suit:

$$(a-x)^2 - \frac{2}{m}(a-x) + y^2 + z^2 = 0,$$

$$a - x = \frac{1}{m} \pm \sqrt{\frac{1}{m^2} - y^2 - z^2},$$

et pour l'équation de la sphérale

$$y^2+z^2+\left(\frac{1}{m}\pm\sqrt{\frac{1}{m^2}-y^2-z^2}\right)^2=2ye^{mx\pm\sqrt{1-m^2(y^2+z^2)}}.$$

L'équation

$$y=n\operatorname{Log}x,$$

représente au fond la même courbe; mais, résolue sous cette forme, elle donne naissance à une sphérale toute différente. Les rayons sphériques, égaux aux nouvelles ordonnées, le sont dès lors aux anciennes abscisses et non plus, comme tout à l'heure, aux anciennes ordonnées.

Les formules générales (98), (99) donnent alors

$$n\operatorname{Log}\alpha=\frac{(\alpha-x)^2+y^2+z^2}{2y},$$

$$\frac{n}{\alpha}=\frac{\alpha-x}{y}.$$

cette dernière peut s'écrire:

$$(\alpha-x)^2+x(\alpha-x)-ny=0.$$

Elle nous fournit $\alpha-x$ qu'il suffit de reporter dans la précédente; d'où l'équation de la nouvelle sphérale

$$z^2=2ny\operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{x^2+ny}+x}{2}\right)-y^2-\left(\frac{\sqrt{x^2+ny}-x}{2}\right)^2.$$

126. Considérons encore comme directrice la chainette

$$y=\frac{e^{mx}+e^{-mx}}{2}.$$

Nous aurons (98, 99)

$$(100)\qquad e^{m\alpha}+e^{-m\alpha}=\frac{(\alpha-x)^2+y^2+z^2}{y},$$

$$e^{m\alpha}-e^{-m\alpha}=\frac{2}{my}(\alpha-x),$$

d'où, en ajoutant et retranchant alternativement

$$2ye^{m\alpha} = y^2 + z^2 + (\alpha - x)^2 + \frac{2}{m}(\alpha - x),$$

$$2ye^{-m\alpha} = y^2 + z^2 + (\alpha - x)^2 - \frac{2}{m}(\alpha - x),$$

et en multipliant membre à membre

$$4y^2 = [y^2 + z^2 + (\alpha - x)^2]^2 - \frac{4}{m^2}(\alpha - x)^2.$$

De là une équation bicarrée en $\alpha - x$, dont on substituera les racines dans la formule (100).

La sinusoïde

$$y = \cos nx,$$

conduit également à une équation bicarrée; et cela devait être en effet, puisque les deux équations rentrent l'une dans l'autre si l'on prend

$$m = n\sqrt{-1}.$$

127. Envisageons enfin comme directrice la parabole d'ordre positif quelconque n, entier, fractionnaire ou incommensurable

$$y = x^n, \qquad F = \alpha^n, \qquad F' = n\alpha^{n-1},$$

ce qui donne pour les équations générales (98), (99)

(101) $$2y\alpha^n = (\alpha - x)^2 + y^2 + z^2,$$

(102) $$ny\alpha^{n-1} = \alpha - x.$$

Multiplions la première par n, la seconde par 2α, et retranchons. Le terme α^n disparait, et il reste

$$n(\alpha - x)^2 - 2(\alpha - x) + n(y^2 + z^2) = 0,$$

ou, sous une autre forme

(103) $$(n-2)(\alpha - x)^2 - 2x(\alpha - x) + n(y^2 + z^2) = 0,$$

équation du second degré en $\alpha - x$ qui donne

$$(104) \qquad (n-2)(\alpha - x) = x \pm \sqrt{x^2 - n(n-2)(y^2+z^2)},$$

En substituant dans l'égalité (102), on obtient l'équation de la sphérale.

128. Il se présente cependant une exception pour le cas, précisément le plus simple de tous, celui de la parabole du second degré ($n = 2$). La formule (104) ne peut plus alors fournir α; mais si l'on se reporte à (103), il vient directement

$$\frac{y^2+z^2}{x} = \alpha - x = 2y\alpha.$$

Tirant de là α et $\alpha - x$ pour les substituer dans (101), on obtient

$$2y\left(\frac{y^2+z^2}{2xy}\right)^2 = \left(\frac{y^2+z^2}{x}\right)^2 + (y^2+z^2),$$

d'où, en multipliant par $\dfrac{2x^2y}{y^2+z^2}$

$$(105) \qquad (y^2+z^2)(1-2y) = 2x^2y,$$

sphérale du troisième degré.

Sa trace sur le plan $z = 0$ de la directrice a pour équation

$$y(1-2y-2x^2) = 0,$$

qui représente d'une part l'axe des abscisses $y = 0$, comme nous le savons d'une manière générale (N° 128), et en second lieu le cercle

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{2} = 0,$$

qui passe au sommet de la parabole, et a pour centre son foyer [1].

---

[1] C'est précisément pour cette surface qu'a été tracée la figure 18.

§ XXI

Directrice en coordonnées polaires

129. Supposons maintenant que la directrice soit représentée par l'équation

$$r = F(\theta).$$

La sphère qui a pour rayon $\varphi(\theta)$ et son centre au point (r, θ) admet comme équation

$$(106)\qquad (x - r\cos\theta)^2 + (y - r\sin\theta) + z^2 = \varphi^2,$$

$$(107)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2F(x\cos\theta + y\sin\theta) + F^2 - \varphi^2 = 0,$$

$$(108)\qquad \frac{R^2}{\cos^2\lambda} - 2FR\cos(\theta - \omega) + F^2 - \varphi^2 = 0.$$

La dérivée relative à θ devient

$$(109)\qquad FR\sin(\theta - \omega) - F'R\cos(\theta - \omega) + FF' - \varphi\varphi' = 0,$$

et l'équation de la sphérale s'obtient par l'élimination de θ entre (108) et (109).

130. Si l'on envisage en particulier une sphérale vectorielle

$$\varphi = Br = r\sin b,$$

ces équations fondamentales deviennent

$$(110)\qquad F^2\cos^2 b - 2FR\cos(\theta - \omega) + \frac{R^2}{\cos^2\lambda} = 0,$$

$$(111)\qquad FF'\cos^2 b - R[F'\cos(\theta - \omega) - F\sin(\theta - \omega)] = 0.$$

131. Mais revenons aux formules entièrement générales (108, 109), pour calculer les différents éléments de la caractéristique.

Nous savons que l'équation dérivée (109) représente la trace

du plan vertical de cette courbe. Rendons lui, en coordonnées rectangulaires, la forme

$$(F\sin\theta - F'\cos\theta)x - (F\cos\theta + F'\sin\theta)y + FF' - \varphi\varphi' = 0,$$

La distance h de ce plan au point décrivant $M(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ a pour valeur

$$h = \frac{(F\sin\theta - F'\cos\theta)F\cos\theta - (F\cos\theta + F'\sin\theta)F\sin\theta + FF' - \varphi\varphi'}{\sqrt{(F\sin\theta - F'\cos\theta)^2 + (F\cos\theta + F'\sin\theta)^2}},$$

ou en réduisant

$$(112)\qquad h = \frac{\varphi\varphi'}{\sqrt{F^2 + F'^2}}.$$

Nous en déduisons (80) le rayon de la caractéristique

$$(113)\qquad k^2 = \varphi^2 - h^2 = \varphi^2\left(1 - \frac{\varphi'^2}{F^2 + F'^2}\right),$$

l'angle générateur (79) du cône circonscrit

$$(114)\qquad \sin c = \frac{h}{\varphi} = \frac{\varphi'}{\sqrt{F^2 + F'^2}},$$

la hauteur (81) de ce cône

$$(115)\qquad H = \frac{k^2}{h} = \frac{\varphi}{\varphi'}\left(\frac{F^2 + F'^2 - \varphi'^2}{\sqrt{F^2 + F'^2}}\right),$$

enfin la distance $MM_2 = H + h$ du point décrivant M au sommet du cône circonscrit:

$$(116)\qquad H + h = \frac{k^2}{h} + h = \frac{\varphi^2}{h} = \frac{\varphi}{\varphi'}\sqrt{F^2 + F'^2} = \frac{\varphi}{\varphi'}\,\frac{r}{\sin a}.$$

132. Appliquons spécialement ces formules au cas des sphé-

rales vectorielles

$$\varphi = \mathrm{F} \sin b,$$

(117)
$$h = \frac{\mathrm{FF}' \sin^2 b}{\sqrt{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2}},$$

(118)
$$k = \mathrm{F} \sin b \sqrt{\frac{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2 \cos^2 b}{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2}},$$

(119)
$$\sin c = \frac{\mathrm{F}' \sin b}{\sqrt{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2}},$$

(120)
$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'}\left(\frac{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2 \cos^2 b}{\sqrt{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2}}\right),$$

(121)
$$\mathrm{H} + h = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'} \sqrt{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2} = \frac{r}{\cos a}.$$

Cette dernière valeur est indépendante du coefficient vectoriel b. Elle montre que le sommet M_2 du cône circonscrit se trouve à l'intersection de la tangente MM_2 de la directrice avec la perpendiculaire OM_2 élevée au pôle sur le rayon vecteur OM.

Lorsqu'il s'agit spécialement du sphéro-nautile, dont la directrice est une spirale logarithmique, on sait que telle est la construction qui fait connaître, en MM_2, la longueur de l'arc de cette courbe à partir de son pôle asymptotique.

133. Supposons comme exemple une directrice rectiligne perpendiculaire à l'axe polaire

$$r \cos \theta = 1, \qquad \mathrm{F} = \frac{1}{\cos \theta}.$$

La relation (107) devient

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y \operatorname{tang} \theta + \cos^2 b (1 + \operatorname{tang}^2 \theta) = 0.$$

On y peut considérer tang θ comme le paramètre par rapport auquel doit être prise la dérivée, ce qui donne

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{y}{\cos^2 b},$$

d'où, en substituant

$$x^2+y^2+z^2-2x-\frac{y^2}{\cos^2 b}+\cos^2 b=0\,,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{(x-1)^2+z^2}{\sin^2 b}-\frac{y^2}{\cos^2 b}=1\,.$$

On y reconnait l'équation de la surface gauche de révolution autour de la directrice. Son hyperbole méridienne

$$\frac{(x-1)^2}{\sin^2 b}-\frac{y^2}{\cos^2 b}=1\,,$$

a pour demi-axes $\sin b$, $\cos b$, et pour foyer l'origine.

Si l'on veut envisager comme second exemple un cercle rapporté à l'un de ses points, il ne sera plus nécessaire de reprendre à cet effet aucun calcul. Cette courbe est en effet la transformée par rayons vecteurs réciproques de sa tangente au point diamétralement opposé au pôle. Dès lors la nouvelle sphérale sera, d'après le théorème fondamental du N° 116, la transformée par rayons vecteurs réciproques du précédent hyperboloïde de révolution à une nappe relativement à un des points de son cercle focal, à savoir

$$R=\cos\lambda\,(\cos\lambda\cos\omega\pm\sqrt{\cos^2\lambda-\cos^2 b})\,.$$

134. La méthode générale se simplifie lorsqu'il s'agit des sphérales *équiradiales*, pour lesquelles le rayon sphérique reste constamment égal au rayon vecteur: $\varphi=r$. Il vient alors, en supposant $\cos b=0$ dans les relations (110), (111)

$$(122)\qquad F=\frac{R}{2\cos(\theta-\omega)\cos^2\lambda}\,,\qquad F'=\frac{R\sin(\theta-\omega)}{2\cos^2(\theta-\omega)\cos^2\lambda}\,,$$

ce que l'on peut mettre sous la forme

$$(123)\qquad \cos(\theta-\omega)=\frac{R}{2F\cos^2\lambda}\,,\qquad \sin(\theta-\omega)=\frac{F'R}{2F^2\cos^2\lambda}\,,$$

Nous aurons également en divisant membre à membre, et en

formant la somme des carrés

$$(124)\qquad \frac{2\cos^2\lambda}{R} = \frac{\sqrt{F^2+F'^2}}{F^2},$$

$$(125)\qquad \operatorname{tang}(\theta-\omega) = \frac{F'}{F} = \cot a.$$

d'où l'on déduit encore ces formules qui nous seront utiles plus loin

$$(126)\qquad \omega = \theta + \operatorname{arctang}\frac{F}{F'} - \frac{\pi}{2} = \theta - \operatorname{arctang}\frac{F'}{F},$$

$$d\omega = \left(1+\frac{F'^2-FF''}{F^2+F'^2}\right)d\theta = \frac{F^2+2F'^2-FF''}{F^2+F'^2}\,d\theta.$$

135. Les équations (122) peuvent s'écrire:

$$\frac{R}{\cos^2\lambda} = 2F(\theta)\cos(\theta-\omega) = \frac{2F'(\theta)\cos^2(\theta-\omega)}{\sin(\theta-\omega)}.$$

Si l'on imagine que l'on ait substitué dans l'une ou l'autre la valeur de θ déduite de (125), on obtiendra $\frac{R}{\cos^2\lambda}$ en fonction de ω. La section opérée par un plan méridien quelconque $\omega = \text{const.}$ sera donc toujours une courbe représentée par l'équation

$$\frac{R}{\cos^2\lambda} = \text{const.},$$

ou, entre les coordonnées polaires (ρ, λ)

$$\frac{\rho}{\cos\lambda} = \text{const.},$$

c'est-à-dire un cercle passant par le pôle.

Et en effet ce point appartenant à toutes les sphères, fait nécessairement partie de la sphérale et de toutes les caractéristiques. On obtient donc leurs divers plans en menant par le pôle des plans normaux aux tangentes de la directrice (plane ou gauche). Lorsque celle-ci se trouve comprise dans un plan, ce sont précisément les sections circulaires méridiennes que le calcul vient de mettre en évidence.

On reconnait dès lors qu'une sphérale équiradiale est engendrée par un cercle variable qui passe incessamment par le pôle, tandis que son centre parcourt la podaire de la directrice (plane ou gauche) relative à ce point.

Revenant au cas où celle-ci est comprise dans le plan de l'équateur, nous voyons que la trace équatoriale de la sphérale équiradiale est une courbe homothétique de cette podaire, obtenue en doublant tous ses rayons vecteurs. En effet OM_1 (fig. 19) étant la trace du plan de la caractéristique, le point M'_1 situé sur le grand cercle de la sphère variable, appartient à la sphérale, ainsi qu'à sa trace équatoriale.

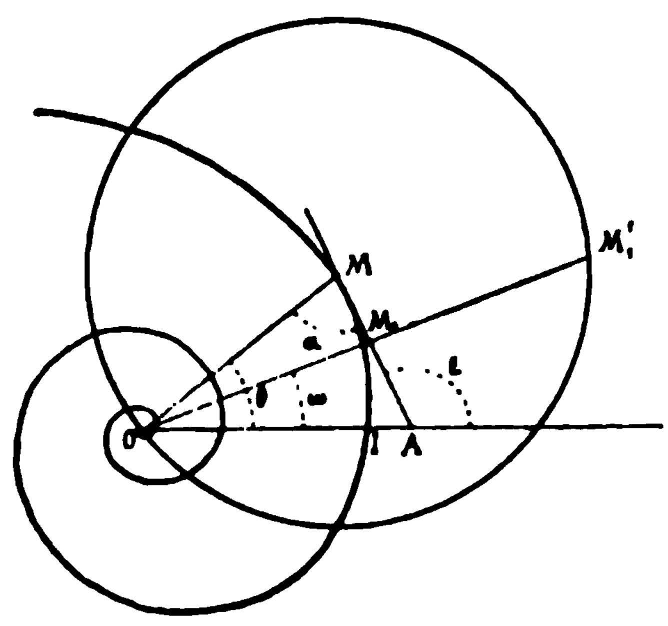


Fig. 19

C'est d'ailleurs ce qu'exprime, dans le cas actuel, la formule (125), d'après le triangle OMM_1.

Constatons donc que les sphérales équiradiales pour une directrice (M) sont l'équivalent de nos anciennes équiradiales à front méridien générateur (N° 10), mais pour une directrice (M_1) toute différente, qui est la podaire de la première.

136. Prenons comme exemple de directrice la spirale sinusoïde d'ordre tout à fait quelconque n

$$r^n = \cos n\theta ,$$

$$F = \cos^{\frac{1}{n}} n\theta , \qquad F' = -\cos^{\frac{1-n}{n}} n\theta \sin n\theta .$$

La relation (125) donne alors

$$\omega = \theta - \operatorname{arc} \cot \left(-\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \right) = (n+1)\theta ,$$

$$\theta = \frac{\omega}{n+1} , \qquad \theta - \omega = \frac{n}{n+1}\omega ,$$

et en reportant cette valeur dans (124)

$$(127) \qquad \frac{R}{2\cos^2\lambda} = \cos^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\omega \right),$$

équation de la sphérale équiradiale.

Elle a pour trace équatoriale

$$\left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \cos\left(\frac{n}{n+1}\omega\right), \tag{128}$$

c'est-à-dire une autre spirale sinusoïde d'ordre $\frac{n}{n+1}$; résultat conforme au théorème précédent (N° 136), d'après ce que l'on sait de la podaire de ces courbes ([1]).

137. Nous pouvons également effectuer cette recherche pour les coniques rapportées à leur foyer

$$r = \frac{b^2}{a(1 + e\cos\theta)}.$$

On obtient alors comme équation de la sphérale entre R, ω, λ

$$\omega = \operatorname{arc}\cos m - \operatorname{arc}\operatorname{tang}\left(\frac{e\sqrt{1-m^2}}{1+em}\right),$$

en employant l'abréviation suivante

$$m = \frac{2b^4\cos^4\lambda}{ea^2R^2} - \frac{1+e^2}{2e}.$$

138. Envisageons encore comme exemple la spirale algébrique d'ordre quelconque n positif ou négatif, entier, fractionnaire ou incommensurable

$$r = \theta^n.$$

([1]) On peut signaler les directrices suivantes, qui fournissent, comme traces équatoriales, d'autres spirales sinusoïdes également simples:

Cercle	$n = 1$,	$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$	cardioïde,
Parabole	$-\frac{1}{2}$,	-1	droite,
Hyperbole	-2,	$+2$	lemniscate.

La formule (124) devient

$$\frac{2\cos^2\lambda}{R} = \frac{\sqrt{\theta^{2n}+n^2\theta^{2n-2}}}{\theta^{2n}} = \frac{\sqrt{\theta^2+n^2}}{\theta^{n+1}},$$

c'est-à-dire

(129) $$\frac{4\cos^4\lambda}{R^2}\theta^{2n+2} - \theta^2 - n^2 = 0.$$

La relation (125) donne de son coté

$$\omega = \theta + \operatorname{arc\,tang}\frac{\theta}{n} - \frac{\pi}{2}.$$

Elle est nettement insoluble par rapport à θ. Mais la précédente, qui est algébrique, pourra dans certains cas fournir, pour ce paramètre, une valeur qu'il suffira de substituer ici, de manière à obtenir définitivement l'équation de la sphérale.

Cette circonstance, si l'on se borne aux fonctions élémentaires (1), se présentera pour dix-sept directrices diverses, qui ramènent aux quatre premiers degrés la résolvante (129), envisagée par rapport à l'inconnue θ elle-même ou à certaines puissances auxiliaires de θ. On se trouve conduit au quatrième degré par les valeurs suivantes de l'exposant n

$$3,\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\quad -\frac{3}{4},\quad -\frac{4}{3},\quad -4\,;$$

---

(1) Si l'on fait $n = 4$, la résolvante (129) prend d'elle même par rapport à l'inconnue auxiliaire

$$\theta^2\cos\lambda\sqrt{\frac{2}{R}\sqrt{-1}},$$

la forme réduite de Bring et de Jerrard, qui a été employée par Hermite pour ramener aux fonctions elliptiques la résolution de l'équation du cinquième degré. On obtient de telles équations pour les douze valeurs suivantes de n

$$4,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5},\ -\frac{5}{4},\ -\frac{5}{3},\ -\frac{5}{2},\ -5.$$

au troisième avec

$$2\,[1],\quad \frac{1}{2}\,[2],\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{2}{3},\quad -\frac{3}{2},\quad -3\,:$$

au second pour

$$1\,[3],\quad -\frac{1}{2}\,[4],\quad -2\,;$$

enfin au premier degré avec

$$0\,[5],\quad -1\,.$$

Je me contenterai, parmi ces vingt-neuf problèmes, d'envisager le plus simple, qui est celui de la spirale hyperbolique

$$n=-1\,,\quad F=\frac{1}{\theta},\quad F'=-\frac{1}{\theta^2},\quad \frac{F}{F'}=-\theta\,.$$

La relation (125) devient alors

$$\omega=\theta+\operatorname{arc\,cot}\theta \tag{130}$$

Quant à la résolvante (124) elle donne

$$\frac{4\cos^4\lambda}{R^2}-\theta^2-1=0\,,$$

$$\theta=\sqrt{\frac{4\cos^4\lambda}{R^2}-1}\,, \tag{131}$$

ce qui fournit pour l'équation de la sphérale

$$\omega=\sqrt{\frac{4\cos^4\lambda}{R^2}-1}+\operatorname{arc\,cot}\sqrt{\frac{4\cos^4\lambda}{R^2}-1}\,. \tag{132}$$

---

[1] Conchoïde de la spirale de GALILÉE (GOMES TEIXEIRA, *Tratado de las curvas especiales notables*, p. 367).
[2] Spirale de FERMAT (*ibidem*, p. 371).
[3] Spirale d'ARCHIMÈDE.
[4] *Lituus* de CÔTES (*ibidem*, p. 380).
[5] Cercle.

§ XXII

Sphéro-nautile

139. Arrivons enfin à l'application principale que nous avons en vue dans ce travail, c'est-à-dire à l'équation du *sphéro-nautile,* pour lequel la directrice est la spirale logarithmique; le module vectoriel b redevenant quelconque.

La formule (121) donne alors

$$Ae^{2A\theta}\cos^2 b+R\left[e^{A\theta}\sin(\theta-\omega)-Ae^{A\theta}\cos(\theta-\omega)\right]=0,$$

$$(133)\qquad e^{A\theta}\cos a\cos^2 b=R\left[\cos(\theta-a)\cos a-\sin(\theta-a)\sin a\right].$$

$$(134)\qquad e^{A\theta}=R\frac{\cos(\theta-\omega+a)}{\cos a\cos^2 b}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans la relation (110), R disparait, et il reste

$$\frac{\cos^2(\theta-\omega+a)}{\cos^2 a\cos^2 b}-2\frac{\cos(\theta-\omega+a)\cos(\theta-\omega)}{\cos a\cos b^2}+\frac{1}{\cos^2\lambda}=0,$$

$$\cos(\theta-\omega+a)\left[\cos(\theta-\omega+a)-2\cos(\theta-\omega)\cos a\right]+\frac{\cos^2 a\cos^2 b}{\cos^2\lambda}=0.$$

$$\cos(\theta-\omega+a)\cos(\theta-\omega-a)=\frac{\cos^2 a\cos^2 b}{\cos^2\lambda},$$

$$\cos^2(\theta-\omega)\cos^2 a-\sin^2(\theta-\omega)\sin^2 a=\frac{\cos^2 a\cos^2 b}{\cos^2\lambda}.$$

On déduit de là successivement

$$(135)\qquad \sin(\theta-\omega)=\pm\frac{\cos a}{\cos\lambda}\sqrt{\cos^2\lambda-\cos^2 b},$$

$$\cos(\theta-\omega)=\pm\frac{\sqrt{\sin^2 a\cos^2\lambda+\cos^2 a\cos^2 b}}{\cos\lambda}.$$

Remettant ces valeurs dans (133), on obtient

$$(136) \quad e^{A\theta} = \frac{R}{\cos^2 b \cos\lambda} \left(\sqrt{\sin^2 a \cos^2\lambda + \cos^2 a \cos^2 b} - \sin a \sqrt{\cos^2\lambda - \cos^2 b}\right).$$

on sous une forme équivalente

$$(137) \quad \theta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log}\left[\frac{R}{\cos\lambda \cos^2 b} \left(\sqrt{\sin^2 a \cos^2\lambda + \cos^2 a \cos^2 b} - \sqrt{\sin^2 a \cos^2\lambda - \sin^2 a \cos^2 b}\right)\right].$$

Comme d'ailleurs la relation (135) nous donne en même temps

$$(138) \quad \theta = \omega + \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\cos a}{\cos\lambda} \sqrt{\cos^2\lambda - \cos^2 b}\right),$$

si nous égalons l'une à l'autre ces deux valeurs de l'azimut θ, nous obtenons enfin l'équation du sphéro-nautile entre R, ω, λ, et les constantes a, b. Mais il est inutile d'effectuer cette transcription.

140. En faisant dans l'équation en question $\lambda = 0$, nous obtiendrons celle de la trace équatoriale

$$\omega + \operatorname{arc\,sin}(\cos a \sin b) = \operatorname{tang} a \operatorname{Log}\left[\frac{R}{\cos^2 b} \left(\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^2 b} \pm \sin a \sin b\right)\right].$$

Elle est formée de deux spirales logarithmiques égales à la directrice, mais déviées. On ne doit en effet, parmi les quatre combinaisons que fournissent les doubles signes des deux radicaux, prendre que les deux valeurs positives, sous peine de rendre le logarithme imaginaire.

Remarquons d'ailleurs que la valeur (138) ne commence à être réelle que pour des latitudes inférieures à $\lambda = b$. Telle est donc l'équation de la cônhélice de contact entre le sphéro-nautile et le cône qui lui est circonscrit à partir du pôle.

141. Les expressions (136), (137), (138), équivalentes entre

elles. présentent une grande importance. Elles déterminent en effet, pour chaque point (R, ω, λ) de la surface, l'azimut θ du centre de la sphère qui l'y touche, ou encore (N° 113) le pied de sa normale. La première de ces formules fournit cet azimut en fonction de R, λ; la seconde en ω, λ.

La dernière (138) sera la plus utile. Si on la laisse sous sa précédente forme (135), elle exprime le sinus de l'appoint $\theta-\omega$ qu'il faut ajouter à la longitude ω de ce point N pour obtenir l'azimut correspondant θ du centre M; et rien ne s'oppose à ce qu'on le construise à l'aide de la règle et du compas.

142. Les formules générales (117 à 121) donnent pour le sphéro-nautile

$$(139)\qquad h=\frac{\mathrm{A}e^{\mathrm{A}\theta}\sin^2 b}{\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}=r\cos a\sin^2 b\,,$$

$$(140)\qquad k=e^{\mathrm{A}\theta}\sin b\sqrt{\frac{1+\mathrm{A}^2\cos^2 b}{1+\mathrm{A}^2}}=r\sin b\sqrt{1-\cos^2 a\sin^2 b}\,,$$

$$(141)\qquad \mathrm{H}=e^{\mathrm{A}\theta}\,\frac{1+\mathrm{A}^2\cos^2 b}{\mathrm{A}\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}=r\,\frac{1-\cos^2 a\sin^2 b}{\cos a}\,,$$

$$(142)\qquad \mathrm{H}+h=\frac{r}{\cos a}\,.$$

L'angle a restant constant sur la spirale logarithmique, ces quatre éléments sont proportionnels au rayon vecteur.

Remarquons encore la valeur de l'angle c, que forment les rayons sphériques normaux avec le plan de la caractéristique, ou les génératrices du cône circonscrit avec la tangente à la directrice

$$(143)\qquad \sin c=\frac{h}{\varphi}=\frac{h}{r\sin b}=\sin b\cos a\,.$$

Cet angle demeure donc constant, et le sphéro-nautile se trouve ainsi défini au moyen de trois éléments angulaires a, b, c, dont deux seulement restent arbitraires, le troisième leur étant relié par cette condition (143). Il convient pourtant de remarquer que deux d'entre eux, a et c, figurent d'eux mêmes sous leur aspect angulaire dans la conformation de la surface, tandis que b n'a été introduit qu'indirectement pour la plus grande facilité des calculs, en représentant sous la forme trigonomé-

trique $\sin b$ le coefficient vectoriel B. Au contraire les deux angles a et c caractérisent directement la manière dont le sphéro-nautile tourne en spirale ou s'épanouit en forme de cor.

143. Le lieu géométrique des centres M_1 des caractéristiques nous est fourni par les équations générales (86) (87)

$$r_1^2 = r^2 (1 + \cos^2 a \sin^4 b - 2 \cos^2 a \sin^2 b),$$

ce qui peut s'écrire

$$r_1 = r \sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}, \tag{144}$$

et d'autre part

$$\sin(\theta - \theta_1) = \frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}. \tag{145}$$

On en déduit:

$$r_1 = \sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b} \cdot e^{A\left[\theta_1 + \arcsin\left(\frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}\right)\right]}.$$

Ce lieu est d'après cela une spirale logarithmique identique à la directrice et déviée de l'angle

$$\arcsin\left(\frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{tang} a \operatorname{Log}(\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b).$$

Telle sera donc la nouvelle directrice du *nautile à front générateur circulaire oblique* identique au sphéro-nautile. L'inclinaison i (88) du front reste constante, avec la valeur

$$i = \frac{\pi}{2} - a - \arcsin\left(\frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}\right).$$

Quant au nouveau rapport vectoriel du nautiloïde envisagé sous cet aspect, c'est celui du rayon k de la caractéristique (140) au rayon vecteur r_1 de la nouvelle directrice (144), à savoir

$$\sin b \sqrt{\frac{1 - \cos^2 a \sin^2 b}{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}.$$

A l'aide de ces éléments, on pourra, suivant la remarque générale du N° 113, appliquer au sphéro-nautile l'ensemble des recherches relatives au volume, au centre de gravité, et au moment d'inertie. Il suffira pour cela (N° 89) d'employer le multiplicateur

$$\sin(i+a)=\sqrt{\frac{\cos^2 a\cos^4 b-\sin^2 a\cos^2 a\cos^2 b+\sin^2 a}{\cos^2 a\cos^4 b+\sin^2 a}}.$$

144. Il en sera de même de la théorie du plan tangent (§ VI). Toutefois, pour cette question, le nouveau mode de génération à titre de sphérale, nous fournit en outre des ressources spéciales et plus avantageuses.

Commençons par rappeler succinctement les anciens éléments de construction (fig. 20). Si l'on envisage la caractéristique rabattue suivant le pointillé DND', nous avons en t' la trace équatoriale de sa tangente Nt'. D'autre part, en élevant Ot perpendiculaire au rayon vecteur horizontal On, et faisant avec lui l'angle O$nt = a$, nous obtenons en t la trace de la tangente à la cônhélice du point N. Celle du plan tangent est donc tt'.

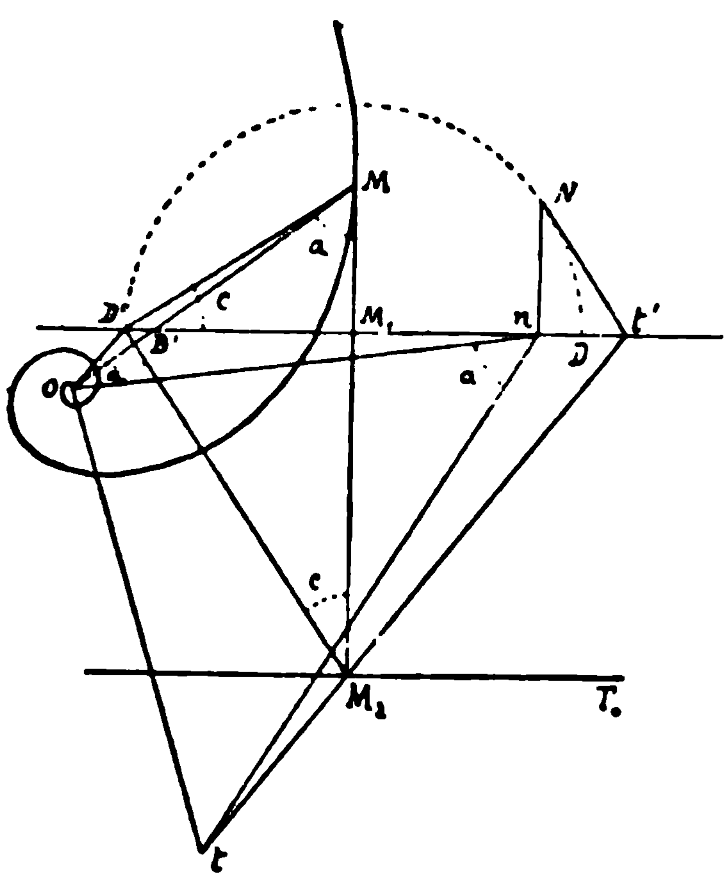


Fig. 20

Mais il est également tangent au cône de révolution circonscrit suivant la même caractéristique. Il contient donc en totalité la génératrice NM₂ de ce dernier; et sa trace tt' doit passer par le sommet M_2. Nous savons d'ailleurs que ce dernier se trouve situé sur la tangente MM_1 de la directrice. Il peut se construire en coupant cette droite par un segment capable de l'angle $2c$ décrit sur DD'; ou encore en menant l'une des perpendiculaires DM_2, $D'M_2$ aux rayons sphériques MD, MD'; ou enfin en tirant les droites DM_2, $D'M_2$ sous l'angle a par rapport aux rayons vecteurs OD, OD', des spirales-traces de la surface [1].

[1] Cette remarque permettra au besoin de reconstituer le pôle O du sphéro-nautile dont on donnerait une caractéristique DD', avec son cône circonscrit DM_2D'.

145. On voit ainsi que la trace du plan tangent peut se construire en joignant M_2t, ou M_2t', ou tt', selon la manière dont seront donnés ces trois points. Mais nous en obtenons également d'autres constructions en le considérant comme tangent à la sphère mobile, c'est-à-dire perpendiculaire à son rayon NM, qui est projeté sur l'équateur en nM. La trace du plan devant dès lors être perpendiculaire à cette projection, il suffira d'abaisser de M_2, de t, ou de t' cette normale sur nM. Remarquons en outre que la figure une fois établie pour un point N fait dorénavant partie de l'édifice géométrique, et peut servir tout le long de la cônhélice de ce point en restant semblable à elle-même, et ne changeant de forme que de l'une à l'autre de ces courbes.

Au lieu de ce mouvement en cônhélice, faisons parcourir à N sa caractéristique de D à D' en passant par le point maximum N_0. Le plan tangent sera d'abord vertical, suivant la trace DM_2. Il s'incline ensuite sur l'équateur, en même temps que sa trace tourne autour de M_2, depuis M_2D jusqu'à la position moyenne M_2T_0 parallèle à DD'. En effet, pour le point N_0, la trace t'_0 de la tangente de la génératrice s'éloigne à l'infini sur D'D. Le minimum de pente du plan tangent se trouve réalisé à ce moment; et il est égal à $N_0M_2M_1$ dans le plan vertical M_2M_1. Cette inclinaison a donc pour tangente trigonométrique le rapport de N_0M_1 à M_2M_1, c'est-à-dire de k à H, ou de h à k, ou enfin tang c. Le minimum est donc égal à c. Au delà du point N_0, une marche inverse se produit; le plan tangent se redresse progressivement, en pivotant autour de M_2, jusqu'à une position verticale suivant M_2D'.

146. Les formules du sphéro-nautile se simplifient beaucoup lorsqu'il est équiradial. Mais au lieu de supposer dans chacune d'elles $b = \frac{\pi}{2}$, il sera plus court de repartir des relations (124), (125) qui deviennent pour la spirale logarithmique

$$\omega = \theta + a - \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{2\cos^2\lambda}{R} = \frac{1}{e^{A\theta}\sin a},$$

d'où, en éliminant θ

$$\frac{R}{2\sin a\cos^2\lambda} = e^{A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)}, \tag{146}$$

équation très simple du sphéro-nautile équiradial.

Il a pour trace

$$(147) \qquad R = 2 \sin a . e^{A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)},$$

c'est-à-dire une spirale logarithmique unique [au lieu de deux comme à l'ordinaire (N° 139)], identique à la directrice, et déviée de l'angle

$$\frac{\pi}{2} - a + \operatorname{tang} a \operatorname{Log} (2 \sin a) .$$

La seconde s'est évanouie et réduite au pôle, où se trouve en effet constamment l'une des deux *retombées* de la voûte en plein cintre formée par la demi-caractéristique, tandis que la seconde décrit la courbe (147).

Comme le point le plus haut N_0 de ce plein cintre se projette au milieu du diamètre de cette circonférence, qui forme le rayon vecteur de la trace (147), le lieu des projections de ces points maxima des caractéristiques sera la spirale

$$(148) \qquad R = \sin a . e^{A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)},$$

égale à la directrice et déviée de l'angle

$$\frac{\pi}{2} - a + \operatorname{tang} a . \operatorname{Log} \sin a .$$

La *ligne de faîte* qui lui correspond sur la surface, en passant par tous les points maxima eux-mêmes, est donc une cônhélice. Son angle constant de latitude est fourni par la combinaison des équations (148) et (146), qui donne

$$2 \cos^2 \lambda_0 = 1 , \qquad \cos \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} , \qquad \lambda_0 = \frac{\pi}{4} .$$

§ XXIII

Cônes circonscrits

147. Cherchons le lieu géométrique des sommets (N° 106) des cônes circonscrits à une sphérale quelconque, ainsi qu'à

chacune des sphéres variables, le long des diverses caractéristiques.

La trace du plan de cette dernière est M_1D (fig. 21), normale à la tangente MM_1 de la directrice. Si nous élevons la perpendiculaire DM_2 sur le rayon MD de la sphére variable, il déterminera en M_2 le sommet, dont nous pouvons calculer les coordonnées r_2, θ_2.

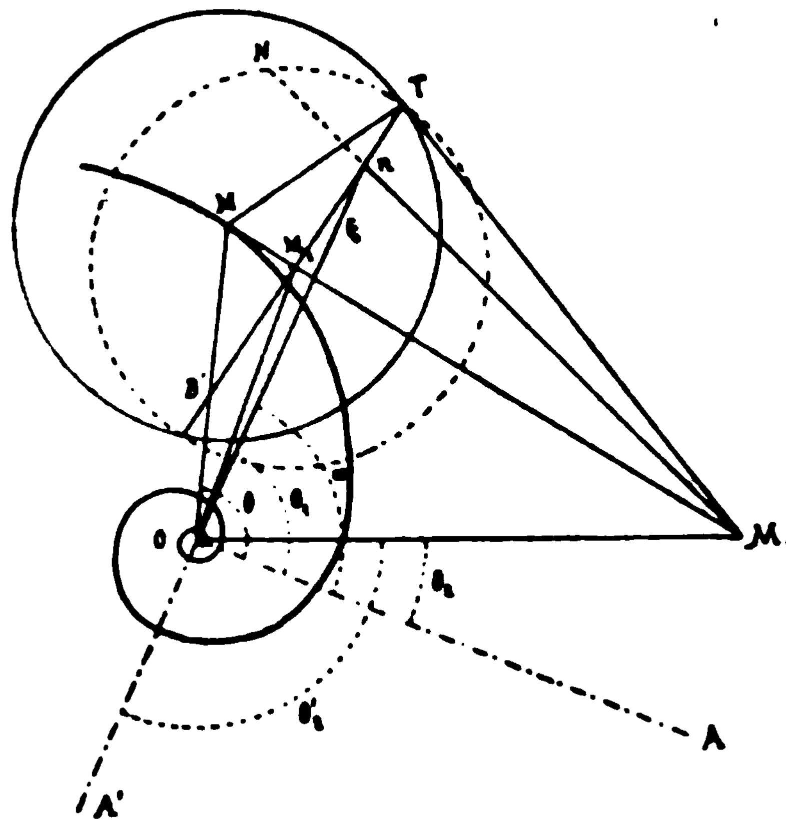


Fig. 21

On a d'abord dans le triangle MOM_2

$$\overline{OM_2}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MM_2}^2$$
$$- 2\overline{OM} \cdot \overline{MM_2} \cos OMM_2,$$

$$r_2^2 = r^2 + (H+h)^2 - 2r(H+h)\cos a,$$

ou d'après la formule (116)

$$r_2^2 = r^2 + \frac{\varphi^2 r^2}{\varphi'^2 \sin^2 a} - 2r\frac{\varphi r}{\varphi' \sin a}\cos a,$$

(149) $$r_2 = \frac{1}{\varphi'}\sqrt{F^2(\varphi^2 + \varphi'^2) + \varphi^2 F'^2 - 2\varphi\varphi' F}.$$

Il vient en second lieu

$$\frac{\sin MOM_2}{MM_2} = \frac{\sin OMM_2}{OM_2},$$

(150) $$\sin(\theta - \theta_2) = \frac{H+h}{r_2}\sin a = \frac{\varphi F}{\sqrt{F^2(\varphi^2+\varphi'^2) + \varphi^2 F'^2 - 2\varphi\varphi' F}}.$$

Il n'y a plus dès lors qu'à éliminer θ entre ces deux relations pour avoir, entre r_2, θ_2, l'équation du lieu géométrique des sommets des cônes circonscrits.

148. Le calcul se simplifie d'une manière remarquable pour les sphérales vectorielles, d'indice quelconque. Nous avons vu

déjà que l'expression (121) de $H + h$ était alors indépendante de cet indice; il en sera donc de même du lieu en question.

Il vient en effet

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{r}{\cos a}\right)^2 - 2r\left(\frac{r}{\cos a}\right)\cos a = r^2 \operatorname{tang}^2 a,$$

$$r_2 = r \operatorname{tang} a = \frac{F^2}{F'},$$

et d'autre part

$$\sin(\theta - \theta_2) = \frac{r}{r_2} \operatorname{tang} a = 1,$$

(151) $$\theta = \theta_2 + \frac{\pi}{2}.$$

d'où, par l'élimination de θ

(152) $$r_2 = \frac{F^2\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right)}{F'\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Pour simplifier encore cette équation du lieu géométrique des sommets, nous la rapporterons à un axe polaire perpendiculaire au précédent, en faisant

$$\theta'_2 = \theta_2 + \frac{\pi}{2},$$

d'où cette équation

$$r'^2 = \frac{F_2(\theta'_2)}{F'(\theta'_2)}.$$

149. Mais une dernière simplification peut encore être apportée à ce résultat.

Convenons de formuler l'équation de la directrice au moyen de la valeur f *de l'inverse* $\frac{1}{r}$ du rayon vecteur, et non pas, comme jusqu'ici (100), par celle F de ce rayon lui-même, en

écrivant [1]

$$\frac{1}{r} = f(\theta).$$

Il suit de cette modification

$$f(\theta) = \frac{1}{F(\theta)}, \qquad f'(\theta) = -\frac{F'(\theta)}{F^2(\theta)},$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{F'(\theta'_2)}{F^2(\theta'_2)} = -f'(\theta'_2).$$

On voit donc que l'inverse du rayon vecteur du lieu des sommets est, sauf le signe, la dérivée de l'inverse du rayon vecteur de la directrice (en ayant bien soin de faire dépendre la fonction ainsi calculée, du nouvel azimut rapporté à un axe perpendiculaire).

150. Éclairons cette méthode de calcul par les exemples qui ont été déjà envïsagés.

Soit d'abord la spirale logarithmique

$$r = e^{A\theta}, \qquad \frac{1}{r} = e^{-A\theta}.$$

La dérivée est $-Ae^{-A\theta}$. Nous écrirons par conséquent, en changeant le signe

$$\frac{1}{r_2} = Ae^{-A\theta'_2}, \qquad r_2 = \operatorname{tang} a \,.\, e^{A\theta'_2} = e^{A\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2} + \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \operatorname{tang} a\right)}.$$

Le lieu des sommets est donc une spirale égale déviée (par rapport à l'ancien axe polaire) de l'angle

$$\frac{\pi}{2} + \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{Log}(\operatorname{tang} a).$$

---

(1) J'indiquerai plus loin (N° 173) comment ce même changement permet de donner une forme encore plus simple aux équations fondamentales (122 à 125) des sphérales équiradiales. Il m'a paru toutefois plus avantageux de conserver jusque là nos mêmes notations.

Soit, comme second exemple, la spirale sinusoïde

$$r^n = \cos^n \theta\,, \qquad \frac{1}{r} = \cos^{-\frac{1}{n}} n\theta\,.$$

La dérivée est $\sin n\theta . \cos^{-\frac{n+1}{n}} n\theta$. Nous poserons donc

$$\frac{1}{r_2} = -\sin n\theta'_2 \cos^{-\frac{n+1}{n}} n\theta'_2\,, \qquad r_2 = -\frac{\cos^{\frac{n+1}{n}} n\theta'_2}{\sin n\theta'_2}\,.$$

On obtient par exemple pour la parabole $\left(n = -\frac{1}{2}\right)$, une droite; pour le cercle ($n = 1$), une cissoïde de Dioclès: pour la ligne droite ($n = -1$), cette droite elle même.

Envisageons encore les spirales algébriques

$$r = \theta^n\,, \qquad \frac{1}{r} = \theta^{-n}\,.$$

La dérivée est $-n\theta^{-n-1}$. Nous écrivons donc

$$\frac{1}{r_2} n = \theta'^{-n-1}_2\,, \qquad r_2 = \frac{\theta'^{n+1}_2}{n}\,.$$

Le lieu des sommets est d'après cela une autre spirale algébrique d'un ordre supérieur d'une unité à celui de la proposée.

Par exemple, la spirale hyperbolique ($n = -1$) donne, comme lieu des sommets, un cercle ($n = 0$).

Soit enfin l'équation des coniques rapportées à leur foyer

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}(1 + e \cos \theta)\,.$$

La dérivée est $-\frac{ae}{b^2} \sin \theta$, nous écrivons donc en changeant le signe

$$\frac{1}{r_2} = \frac{ae}{b^2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{c}{b^2} \cos \theta\,.$$

Le lieu cherché est d'après cela

$$r_2 \cos \theta = \frac{b^2}{c}$$

c'est-à-dire la directrice relative au foyer considéré.

§ XXIV

Directrice en coordonnées intrinsèques

151. Reprenons ici l'usage des coordonnées intrinséques, afin de pouvoir envisager les courbes qui déjà nons ont été accessibles par cette voie (§ XVI), et en déterminer les surfaces sphérales équiradiales, dans lesquelles le rayon sphérique reste, comme ci-dessus, constamment égal au rayon *vecteur* r de cette ligne par rapport à un certain pôle, encore bien qu'elle soit représentée par son équation naturelle, entre son rayon *de courbure* ρ et son angle de contingence

$$\rho = F(\varepsilon).$$

En faisant passer par ce pôle deux axes rectangulaires, nous aurons

$$dx = ds \cos \varepsilon, \qquad dy = ds \sin \varepsilon;$$

$$x = \int_0^\varepsilon \rho \cos \varepsilon \, d\varepsilon, \qquad y = \int_0^\varepsilon \rho \sin \varepsilon \, d\varepsilon.$$

La sphère qui a son centre au point (x, y) et comme rayon r, sera représentée, avec les coordonnées courantes X, Y, Z par l'équation

$$\left(X - \int_0^\varepsilon F \cos \varepsilon \, d\varepsilon\right)^2 + \left(Y - \int_0^\varepsilon F \sin \varepsilon \, d\varepsilon\right)^2 + Z^2$$
$$= \left(\int_0^\varepsilon F \cos \varepsilon \, d\varepsilon\right)^2 + \left(\int_0^\varepsilon F \sin \varepsilon \, d\varepsilon\right)^2,$$

ou en développant

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\left(X \int_0^\varepsilon F \cos \varepsilon \, d\varepsilon + Y \int_0^\varepsilon F \sin \varepsilon \, d\varepsilon\right) = 0.$$

Si l'on passe aux coordonnées mixtes, on obtient cette formule

$$(153) \qquad \frac{R}{2 \cos^2 \lambda} = \int_0^\varepsilon F(\varepsilon) \cos (\varepsilon - \omega) \, d\varepsilon,$$

remarquable par sa grande simplicité et sa complète généralité.

Pour avoir l'enveloppe de cette sphère, prenons la dérivée par rapport au paramètre ε. Elle sera simplement

$$F(\varepsilon)\cos(\varepsilon-\omega)=0\,.$$

Mais F ne saurait être annulé d'une manière permanente. Il nous faut donc poser

$$\cos(\varepsilon-\omega)=0\,,\qquad \varepsilon-\omega=\frac{\pi}{2}\,.$$

Ce résultat est d'ailleurs conforme à ce qu'indique la figure 19 par son triangle OM_1A.

L'élimination est maintenant possible une fois pour toutes; et si nous reportons cette valeur de ε dans la formule (153), nous obtenons, pour la sphérale équiradiale d'une directrice quelconque, l'équation générale

$$(154)\qquad \frac{R}{2\cos^2\lambda}=\int_0^{\omega+\frac{\pi}{2}}F(\varepsilon)\cos(\varepsilon-\omega)\,d\varepsilon\,.$$

Le problème se trouve ainsi ramené aux quadratures.

152. Considérons comme exemple la cycloïde rapportée à son sommet

$$\rho=\cos\varepsilon\,.$$

Nous aurons successivement

$$\frac{2R}{\cos^2\lambda}=4\int_0^{\omega+\frac{\pi}{2}}\cos\varepsilon\,(\cos\varepsilon\cos\omega+\sin\varepsilon\sin\omega)\,d\varepsilon$$

$$=\int_0^{\omega+\frac{\pi}{2}}[\cos\omega\,(1+\cos 2\varepsilon)+\sin\omega\sin 2\varepsilon]\,d(2\varepsilon)$$

$$=\Big[\cos\omega\,(2\varepsilon+\sin 2\varepsilon)-\sin\omega\cos 2\varepsilon\Big]_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\omega+\frac{\pi}{2}}$$

$$=[\cos\omega\,(2\omega+\pi)-\cos\omega\sin 2\varepsilon+\sin\omega\cos 2\omega]+\sin\omega$$

$$=(2\omega+\pi)\cos\omega-\sin(2\omega-\omega)+\sin\omega\,,$$

et enfin

$$\frac{R}{\cos^2\lambda} = \left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\cos\omega .$$

On peut conduire un calcul semblable pour obtenir l'équation da la sphérale, absolument différente de celle-ci, qui serait déduite de la même directrice, rapportée non plus à son sommet mais à son point de rebroussement, sous la forme

$$\rho = \sin\varepsilon .$$

153. Envisageons maintenant l'épicycloïde rapportée, soit à son sommet, soit à son point de rebroussement, par l'une ou l'autre des équations

$$\rho = \cos q\varepsilon, \qquad \rho = \sin q\varepsilon .$$

Il suffira pour effectuer l'intégration (154) de décomposer en somme de sinus ou de cosinus le produit de facteurs. Il faut toutefois excepter de cette analyse l'hypothèse $q = 1$, car l'intégration conduit à diviser par $q - 1$. C'est pour cette raison que nous avons considéré directement ce cas, qui est celui de la cycloïde.

154. On a pour la chainette rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\varepsilon},$$

$$\int \frac{\cos(\varepsilon - \omega)}{\cos^2\varepsilon}\, d\varepsilon = \frac{\sin\omega}{\cos\varepsilon} + \cos\omega \operatorname{Log}\operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{R}{2\cos^2\lambda} = -1 + \cos\omega \operatorname{Log}\left(-\cot\frac{\omega}{2}\right).$$

Il vient pour la tractrice rapportée à son point de rebroussement

$$\rho = \operatorname{tang}\varepsilon,$$

$$\int \operatorname{tang}\varepsilon \cos(\varepsilon - \omega)\, d\varepsilon = -\cos(\varepsilon - \omega) + \sin\omega \operatorname{Log}\operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{R}{2\cos^2\lambda} = \cos\omega + \sin\omega \operatorname{Log}\left(-\cot\frac{\omega}{2}\right).$$

On a encore pour la chainette d'égale résistance rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos \varepsilon},$$

$$\int \frac{\cos(\varepsilon - \omega)}{\cos \varepsilon} d\varepsilon = \varepsilon \cos \omega - \sin \omega \operatorname{Log} \cos \varepsilon,$$

$$\frac{R}{2 \cos^2 \lambda} = \left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \cos \omega - \sin \omega \operatorname{Log} (-\sin \omega).$$

Ces diverses équations ne fournissent de valeurs réelles que pour les longitudes négatives; ce qui est d'ailleurs conforme à l'allure de ces trois directrices.

155. Envisageons enfin la développante de cercle d'ordre q, rapportée, ainsi que toutes les précédentes, à un même point de la circonférence. Elle a pour équation relative à ce point de rebroussement

$$\rho = \varepsilon^q.$$

L'intégration (154) de la fonction $\varepsilon^q \cos(\varepsilon - \omega)$ s'effectuera par parties, en réduisant successivement la valeur de l'exposant, qui est essentiellement positif. Il est inutile de développer ici ce procédé classique.

Je m'attacherai de préférence à déduire de cette même courbe une autre sphérale équiradiale absolument différente, en rapportant les rayons vecteurs au centre du cercle, et non plus au point de rebroussement. La configuration générale de la surface en acquièrera d'ailleurs plus d'harmonie.

Appelons à cet effet α l'azimut du point du cercle générateur qui (par une série de tangentes successivement rectangulaires les unes sur les autres, pour passer de chaque développante à la suivante), nous conduit au point caractérisé par ε sur la q^e développante. Les coordonnées rectangulaires de ce dernier peuvent s'exprimer de la manière suivante

$$x = \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \cos\left(\alpha - k\frac{\pi}{2}\right), \qquad y = \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \sin\left(\alpha - k\frac{\pi}{2}\right).$$

L'équation entre X, Y, Z de la sphère variable (après qu'on l'a, comme au N° 151, développée et débarrassée de la somme des

séries Σ qui se trouvent dans les deux membres), se réduit à

$$X^2+Y^2+Z^2-2X\sum_0^q\frac{\alpha^k}{k!}\cos\left(\alpha-k\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-2Y\sum_0^q\frac{\alpha^k}{k!}\sin\left(\alpha-k\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

ou en coordonnées mixtes

$$\frac{R}{2\cos^2\lambda}=\sum_0^q\frac{\alpha^k}{k!}\left[\cos\omega\cos\left(\alpha-k\frac{\pi}{2}\right)+\sin\omega\sin\left(\alpha-k\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$=\sum_0^q\frac{\alpha^k}{k!}\cos\left(\alpha-\omega-k\frac{\pi}{2}\right).$$

Prenons maintenant la dérivée par rapport au paramètre angulaire α

$$0=\sum_0^q\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}\cos\left(\alpha-\omega-k\frac{\pi}{2}\right)-\sum_0^q\frac{\alpha^k}{k!}\sin\left(\alpha-\omega-k\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\sum_0^q\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}\cos\left(\alpha-\omega-k\frac{\pi}{2}\right)+\sum_0^q\frac{\alpha^k}{k!}\cos\left[\alpha-\omega-(k-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Or le terme en α^{k-1} de la seconde somme a pour argument $\alpha-\omega-(k-2)\frac{\pi}{2}$. Cet angle diffère de π avec celui du terme correspondant de la première série. Leurs cosinus sont donc égaux et de signes contraires, et ces deux expressions se détruisent mutuellement. Il ne subsiste par conséquent, de tout l'ensemble, que l'unique terme en α^q de la seconde somme, car il n'a pas de correspondant. La formule se réduit dès lors à

$$\cos\left[\alpha-\omega-(q-1)\frac{\pi}{2}\right]=0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha-\omega-(q-1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},\qquad \alpha-\omega=q\frac{\pi}{2}.$$

L'équation de la sphérale équiradiale devient par la substitu-

tion de cette valeur dans celle de la sphère

$$\frac{R}{2\cos^2\lambda} = \sum_0^q \frac{\left(\omega + q\frac{\pi}{2}\right)^k}{k!} \cos(q-k)\frac{\pi}{2}.$$

Rapportons la, pour plus de simplicité, à un premier-méridien que nous aurons fait tourner, dans le sens négatif, de q quadrants. Si nous appelons Ω cette nouvelle longitude

$$\Omega = \omega + q\frac{\pi}{2}, \qquad \alpha = \Omega,$$

il viendra simplement

$$\frac{R}{2\cos^2\lambda} = \sum_0^q \frac{\Omega^k}{k!} \cos(q-k)\frac{\pi}{2}.$$

La trace équatoriale ($\lambda = 0$) de cette sphérale sera donc

$$\frac{R}{2} = \sum_0^q \frac{\Omega^k}{k!} \cos(q-k)\frac{\pi}{2}.$$

Cette équation présente une forme très simple; car le facteur $\cos(q-k)\frac{\pi}{2}$ a toujours pour valeur l'unité avec des signes alternatifs. Tous les termes $\frac{\Omega^k}{k!}$ seront donc de même parité, de signes alternés, et sans coefficients étrangers.

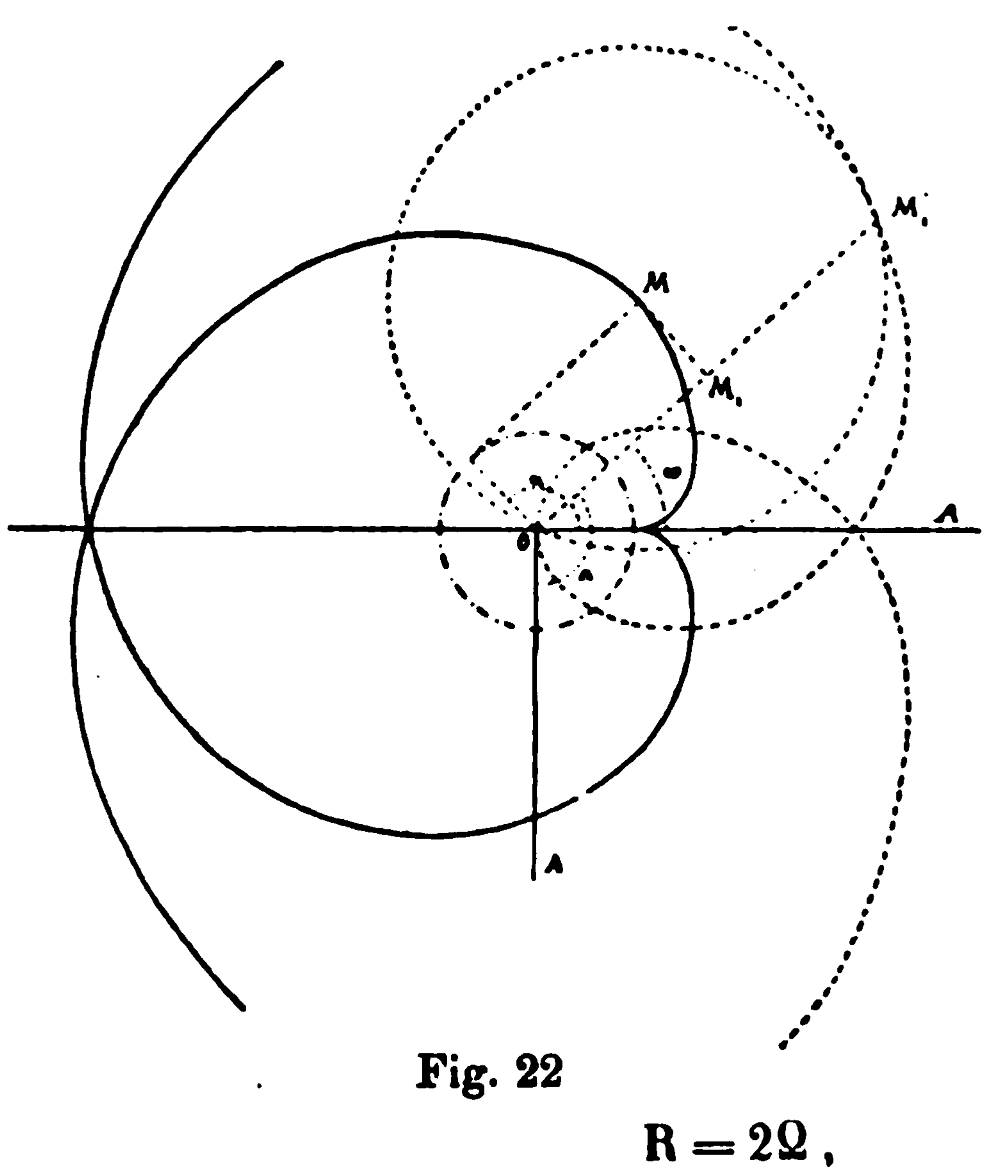


Fig. 22

Si l'on considère en particulier (fig. 22) la développante de cercle proprement dite ($q = 1$), la trace équatoriale devient

$$R = 2\Omega,$$

c'est-à-dire une spirale d'Archimède.

QUATRIEME PARTIE

Lignes de courbure, surfaces podaires

§ XXV

Lignes de courbure en coordonnées rectangulaires

156. Si l'on envisage les normales communes à une sphérale et à la sphère qui s'y raccorde suivant une caractéristique, elles forment un cône de révolution, dont le sommet occupe le point décrivant de la directrice. Ces droites se rencontrent donc consécutivement, et par suite la caractéristique est l'une des deux lignes de courbure en chacun de ses points.

La seconde doit être normale à celle-ci. Nous possédons par conséquent, dans le plan tangent, qui nous est connu, les deux directions des sections principales.

La tangente de la seconde ligne de courbure n'est autre que la génératrice NM_2 du cône de révolution circonscrit suivant la caractéristique. Cette droite se trouve en effet dans le plan tangent, et elle est normale au cercle de base du cône.

Connaissant ainsi la direction nM_2 de la tangente à la projection équatoriale de la ligne de courbure, nous pouvons entreprendre d'en former l'équation différentielle. Je traiterai cette question successivement en coordonnées rectangulaires, et dans le système polaire.

157. La sphérale nous est fournie par les deux équations (83), (84). Cette dernière représente le plan de la caractéristique qui correspond à l'abscisse α du point décrivant M. Si donc nous menons par l'origine un plan qui lui soit parallèle, il aura pour équation

$$X + YF' = 0.$$

Quant au plan tangent de la sphérale, il est perpendiculaire au rayon de la sphère, dont les cosinus directeurs sont proportionnels aux différences respectives des coordonnées (x, y, z) du point N, et de celles $(\alpha, F, 0)$ du centre M. Tels seront

donc les coefficients angulaires de l'équation du plan tangent

$$(155)\qquad (x-\alpha)X+(y-F)Y+zZ=0.$$

L'ensemble de ces deux relations représente la parallèle menée par l'origine à la tangente de la caractéristique, et l'on peut le mettre sous la forme

$$\frac{X}{zF'}=\frac{Y}{-z}=\frac{Z}{(y-F)-(x-\alpha)F'}.$$

Élevons par l'origine le plan perpendiculaire

$$zF'X-zY+[y-F-(x-\alpha)F']Z=0.$$

Il sera parallèle au plan qui serait conduit par N de manière à couper le plan tangent suivant la tangente de la ligne de courbure. L'ensemble de cette égalité et de (155) représente par conséquent la parallèle à cette tangente.

Nous en obtiendrons la projection équatoriale par l'élimination de Z entre ces deux formules, ce qui donne

$$X\{(x-\alpha)[y-F-(x-\alpha)F']-z^2F'\}$$
$$+Y\{(y-F)[y-F-(x-\alpha)F']+z^2\}=0.$$

De là le coefficient angulaire de la projection horizontale de la tangente cherchée

$$(156)\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{(x-\alpha)[y-F-(x-\alpha)F']-z^2F'}{(y-F)[y-F-(x-\alpha)F']+z^2}.$$

La ligne de courbure étant située sur la sphérale, les quatre quantités x, y, z, α doivent satisfaire à la fois aux deux équations (83), (84) qui la représentent. Nous sommes donc autorisés à en déduire z et α, pour en opérer ici la substitution. Celle de z peut se faire une fois pour toutes. Elle donne après toutes les réductions

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(y-F)[x-\alpha+(y-F)F']-\varphi^2F'}{(x-\alpha)[x-\alpha+(y-F)F']-\varphi^2},$$

expression que l'on peut encore simplifier au moyen de l'équa-

tion (83) sous la forme définitive

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-F)\varphi' + \varphi F'}{(x-\alpha)\varphi' + \varphi}. \tag{157}$$

Si maintenant, lorsque seront spécifiées dans chaque cas les fonctions F et φ, on résout cette même relation (83) par rapport à α pour en substituer ici la valeur, on aura, entre x, y, dx, dy, l'équation différentielle du premier ordre et du premier degré de la projection équatoriale de la seconde ligne de courbure de la sphérale.

158. Dans le cas le plus général, la trace de cette surface doit être l'une de ces lignes de courbure: car elle coupe orthogonalement, en raison de la symétrie de la figure par rapport à l'équateur, toutes les caractéristiques, aux points où elles traversent ce plan.

On peut le reconnaître dans nos formules. Si l'on fait en effet $z = 0$ dans l'équation (156), elle donne pour les points situés dans l'équateur

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\alpha}{y-F},$$

$$(x-\alpha)\,dx + (y-F)\,dy = 0,$$

montrant ainsi que l'élément de cette ligne, (de composantes dx, dy), est normal à la droite qui joint le point considéré (x, y) au centre (α, F) du grand cercle de la sphère. La ligne de courbure est donc tangente à ce cercle, dont l'enveloppe constitue la trace de la sphérale.

159. Convenons transitoirement de représenter pour abréger par les lettres G, H, K, L, M, N diverses fonctions de α qui nous sont connues. L'équation différentielle (157) pourra s'écrire

$$(x\varphi' + G)\,dy = (y\varphi' + H)\,dx.$$

D'autre part la relation (84) prend la forme

$$x = -yF' + K,$$

$$dx = -F'dy - (yF'' + K')\,d\alpha,$$

d'où, en substituant,

$$(-yF'\varphi'+L)\,dy=(y\varphi'+H)\left[-F'dy-(yF''+K')\right]d\alpha\,.$$

Il est très important de remarquer que le terme

$$-yF'\varphi'dy\,,$$

se trouve à la fois dans les deux membres et disparait de lui-même. Il reste alors une équation différentielle de la forme

$$(158)\qquad M\frac{dy}{d\alpha}+\varphi'F''y^2+Ny-HK'=0\,.$$

Les équations de ce type ont été intégrées par EULER, mais seulement dans le cas où l'on possède directement une solution particulière. Si nous supposons l'intégration effectuée avec une constante arbitraire C, cette valeur de y fournira, au premier degré, celle de x d'après la relation (84), et la projection de la ligne de courbure se trouvera représentée par les expressions des deux coordonnées en fonction de α. Lorsque l'élimination de ce dernier sera possible, on obtiendra l'équation définitive de cette famille de courbes, dont le paramètre sera C, de même que α est celui de la première.

160. Dans plusieurs cas très étendus, la restriction d'EULER disparait, et nous pouvons d'une manière générale ramener aux quadratures l'intégration de l'équation (158).

C'est d'abord lorsque le terme en y^2 s'évanouit, ce qui peut arriver de deux manières.

En premier lieu, pour $\varphi'=0$, ou $\varphi=\text{const.}$; ce qui se rapporte aux surfaces-tuyaux de directrices quelconques.

En second lieu, pour $F''=0$, c'est-à-dire $F=m\alpha+n$, indiquant une directrice rectiligne, quelle que soit la loi du rayon sphérique. En un mot, c'est le cas des surfaces de révolution de méridienne quelconque.

Dans ces deux circonstances, nous nous trouvons ramenés à une équation linéaire en y, que l'on sait intégrer au moyen de deux quadratures.

La seconde simplification de l'équation différentielle (158) concerne la disparition du terme indépendant de y; ce qui peut encore arriver de deux manières.

D'abord pour $K'=0$, ou $K=\text{const.}$ Cette circonstance est

facile à formuler[1]; mais ne semble pas mériter de retenir l'attention.

Il reste enfin la seconde solution $H = 0$, ou, en se reportant à l'équation (157)

$$F\varphi' - \varphi F' = 0\,, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{F'}{F}\,, \qquad \mathrm{Log}\,\varphi = \mathrm{Log}\,F + \mathrm{Log}\,B\,,$$

$$\varphi = BF\,,$$

c'est-à-dire précisement la condition vectorielle, avec une directrice et un module B quelconques.

Dans ces deux derniers cas, l'équation différentielle (158) devient

$$M\frac{dy}{da} + \varphi' F'' y^2 + Ny = 0\,,$$

ou, en la divisant par y^2

$$M\frac{\left(d\frac{1}{y}\right)}{da} - N\left(\frac{1}{y}\right) - \varphi' F'' = 0\,,$$

équation linéaire par rapport à $\frac{1}{y}$.

---

(1) Si l'on se reporte à la relation (84) pour préciser la forme de la fonction K, il vient, en représentant par $\frac{g}{2}$ la valeur de la constante

$$K = \alpha + FF' - \varphi\varphi' = \frac{g}{2}\,,$$

$$2\varphi\varphi' = 2FF' + 2\alpha - g\,,$$

$$\varphi^2 = F^2 + \alpha^2 - g\alpha\,.$$

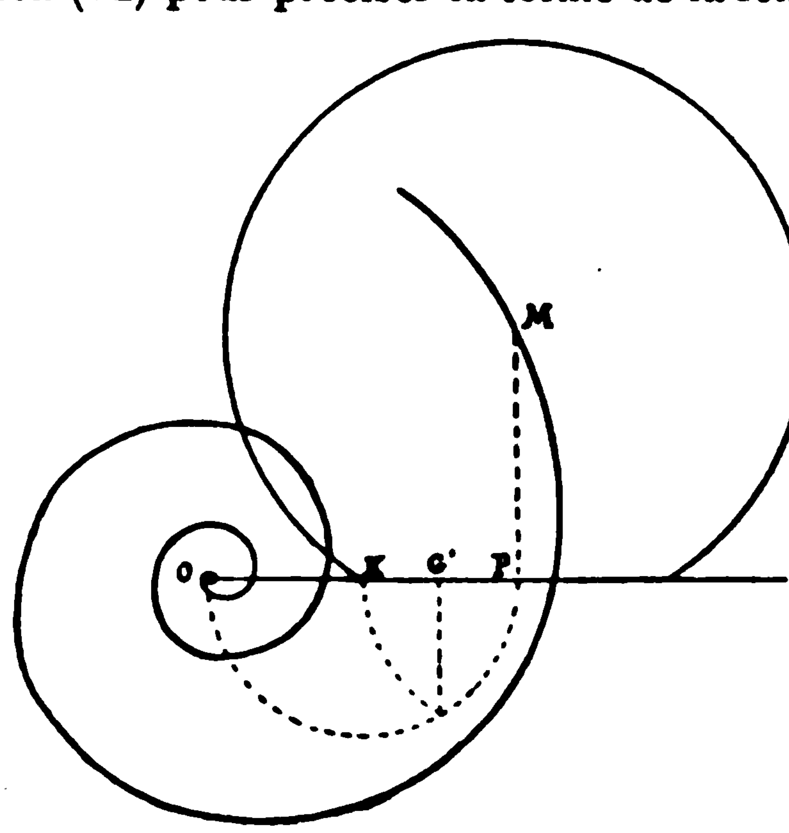


Fig. 23

Portons en OG (fig. 23) la longueur g, et par le point fixe G menons la verticale GH jusqu'à la rencontre de la circonférence décrite sur $OP = \alpha$ comme diamètre. Nous aurons en GP la longueur $\alpha - g$, et en PH la moyenne géométrique entre α et $\alpha - g$. En rabattant ce segment en PK, on obtiendra dans le carré de l'hypoténuse MK la somme des carrés $\overline{MP}^2 = F^2$, et $\overline{PK}^2 = \alpha(\alpha - g)$, c'est-à-dire φ^2. Telle est donc la construction du rayon sphérique $\varphi = MK$.

161. Attachons nous au cas des sphérales vectorielles pour le développer complètement. Le coefficient B disparait de luimême de l'équation (157) qui se réduit à

$$(xF' + F - \alpha F')\,dy = F'y\,dx\,,$$

tandis que (84) devient de son côté

$$(159)\qquad x = -yF' + \alpha + FF'\cos^2 b\,,$$

$$dx = -F'dy + d\alpha\left[-yF'' + 1 + (FF'' + F'^2)\cos^2 b\right].$$

Il vient dès lors en substituant

$$F(1 + F'^2\cos^2 b)\frac{dy}{d\alpha} = F'y\left[-yF'' + 1 + (FF'' + F'^2)\cos^2 b\right],$$

d'où, en divisant par y^2

$$\frac{F}{F'}(1 + F'^2\cos^2 b)\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{d\alpha} + \left[1 + (FF'' + F'^2)\cos^2 b\right]\left(\frac{1}{y}\right) - F'' = 0\,.$$

L'intégrale de cette équation linéaire obtenue par la méthode classique donne

$$(160)\quad y = \frac{e^{\int \frac{F'}{F}\left[\frac{1 + (FF'' + F'^2)\cos^2 b}{1 + F'^2\cos^2 b}\right]d\alpha}}{C + \int \frac{F'F''}{F(1 + F'^2\cos^2 b)}\cdot e^{\int \frac{F'}{F}\left[\frac{1 + (FF'' + F'^2)\cos^2 b}{1 + F'^2\cos^2 b}\right]d\alpha}.d\alpha}\,,$$

et l'équation de la seconde famille de lignes de courbure résultera de l'élimination de α entre (159) et (160), lorsque sera spécifiée la fonction F.

162. Pour présenter une application de cette méthode, considérons la parabole

$$y = x^2\,,\qquad F = \alpha^2\,,\qquad F' = 2\alpha\,,\qquad F'' = 2\,.$$

La première quadrature est alors

$$\int \frac{2d\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1 + 6\alpha^2\cos^2 b}{1 + 4\alpha^2\cos^2 b} = \mathrm{Log}\left(\alpha^2\sqrt{1 + 4\alpha^2\cos^2 b}\right).$$

La seconde devient d'après cela

$$\int \frac{4\alpha d\alpha}{\sqrt{1+4\alpha^2\cos^2 b}} = \frac{\sqrt{1+4\alpha^2\cos^2 b}}{\cos^2 b}.$$

L'intégrale de l'équation différentielle est donc

$$(161) \qquad y = \frac{\alpha^2\cos^2 b\sqrt{1+4\alpha^2\cos^2 b}}{C+\sqrt{1+4\alpha^2\cos^2 b}}.$$

Il vient dès lors (159)

$$x = \alpha + \frac{2C\alpha^3\cos^2 b}{C+\sqrt{1+4\alpha^2\cos^2 b}}.$$

L'équation (161) est du sixième degré à puissances paires de α, et peut par conséquent être résolue à l'aide des expressions du troisième degré. Il suffira de les substituer dans cette dernière relation, pour avoir entre x, y, C l'équation de la seconde famille de lignes de courbure, quelque soit le module vectoriel b.

163. Attachons nous spécialement au cas des sphérales *équilatères,* pour lesquelles le rayon sphérique reste constamment égal à l'ordonnée de la directrice.

Si nous faisons $\cos b = 0$, les deux quadratures peuvent s'effectuer *quelle que soit cette directrice.* La première devient en effet

$$\int \frac{F'}{F} d\alpha = \operatorname{Log} F, \qquad e^{\int \frac{F'}{F} d\alpha} = F,$$

et la seconde se réduit dès lors à

$$\int F'F'' d\alpha = \frac{F'^2}{2}.$$

L'intégrale de l'équation linéaire devient donc entièrement explicite

$$(162) \qquad y = \frac{2F}{F'^2+C}.$$

De son côté, la relation (159) se réduit à

$$x = \alpha - yF' . \tag{163}$$

Telles sont les deux équations finies entre lesquelles il suffira d'éliminer α.

164. Reprenons comme exemple de sphérale équilatère la parabole [1]

$$y = x^2 , \qquad F = \alpha^2 , \qquad F' = 2\alpha .$$

Les formules (162) (163) nous donnent alors

$$y = \frac{2\alpha^2}{4\alpha^2 + C} , \qquad x = \alpha - \frac{4\alpha^3}{4\alpha^2 + C} = \frac{C\alpha}{4\alpha^2 + C} ,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2\alpha}{C} , \qquad \alpha = \frac{Cy}{2x} , \qquad y = \frac{Cy^2}{2Cy^2 + 2x^2} ,$$

et finalement

$$\frac{x^2}{C} + y^2 - \frac{y}{2} = 0 .$$

Pour $C = 1$, et $C = \infty$, nous retrouvons distinctement les deux parties constitutives de la trace équatoriale (N° 128) de la sphérale étudiée ci-dessus, à savoir (N° 132) le cercle qui a son centre au foyer de la parabole (fig. 18), et la tangente au sommet.

Les autres valeurs de C donnent des ellipses ayant pour petit axe le diamètre de ce cercle dirigé suivant l'axe de la parabole.

Si l'on reporte cette valeur de x^2 dans l'équation (105) de la sphérale, il vient

$$z = y\sqrt{C - 1} .$$

---

[1] On ne doit pas en effet chercher la solution de ce cas limite dans la formule (161), en y faisant $\cos b = 0$; car nous avons été, au cours des calculs, conduits à diviser par $\cos b$.

Je ne m'arrêterai pas à développer un exemple analogue relatif à la parabole cubique $y = x^3$. L'équation (163) se réduit alors au second degré.

Les lignes de courbure sont donc renfermées dans une série de plans se mouvant à charnière autour de la tangente au sommet de la parabole directrice, depuis celui de l'équateur jusqu'à la position verticale. Elles sont par conséquent elles-mêmes des ellipses.

Leurs projections sur ce dernier plan seront donc encore d'autres ellipses, que l'on obtiendrait en substituant cette dernière valeur de y dans l'égalité (105).

On voit dès lors que cette sphérale équilatère fait partie du groupe des surfaces qui admettent deux systèmes plans de lignes de courbure.

§ XXVI

Lignes de courbure en coordonnées polaires

165. Reprenons la même recherche pour les sphérales vectorielles rapportées à des coordonnées polaires; à savoir r, θ pour le point décrivant M de la directrice; R, ω pour le point n qui parcourt la projection équatoriale de la seconde ligne de courbure; R, ω, λ pour le point N de la sphérale dans l'espace.

Nous avons vu que la recherche de l'équation de cette surface revient à l'élimination de θ entre les relations générales (110), (111). Nous admettons donc qu'an cours de cette opération, l'on a obtenu, en fonction des coordonnées R, ω, λ de N, l'expression de l'azimut θ du centre M de la sphère qui s'y raccorde ([1]).

La tangente à la projection de la ligne de courbure étant nM_2 (fig. 21), l'équation différentielle de cette courbe pourra s'écrire

$$(164)\qquad \frac{R d\omega}{dR} = \operatorname{tang} O n M_2 = \operatorname{tang}(M_1 n M_2 - M_1 n O),$$

à la condition d'en exprimer le second membre en R, ω seulement.

Puisque le point N appartient à la caractéristique de rayon k

---

([1]) Les valeurs (136), (137), (138) nous en fournissent un exemple en ce qui concerne le sphéro-nautile.

et de coordonnées ξ, z, nous avons

$$(165)\quad \operatorname{tang} M_1nM_2 = \frac{M_1M_2}{M_1n} = \frac{H}{\xi} = \frac{H}{\sqrt{k^2 - z^2}} = \frac{H}{\sqrt{k^2 - R^2 \operatorname{tang}^2 \lambda}},$$

En second lieu, le triangle M_1nO nous donne, par la proportion des sinus

$$(166)\qquad \frac{R}{r_1} \sin M_1nO = \sin OM_1n = \sin OM_1B'$$

$$= \cos OM_1M_2 = \cos(OMM_2 + MOM_1) = \cos(a + \theta - \theta_1).$$

L'angle a se déduira de l'équation de la directrice en fonction de θ. Quant à r_1 et θ_1, ils ont été déjà exprimés de même (86), (87), ainsi que H et k (118, 120).

En remettant dans la formule (164) toutes ces valeurs, et finalement celle de θ dont nous venons de parler ci-dessus, ainsi que celle de λ déduite de l'équation de la sphérale, il restera définitivement entre R, ω, dR, $d\omega$ l'équation différentielle du prepremier ordre et du premier degré de la projection équatoriale de la seconde ligne de courbure.

166. Développons cette marche pour le sphéro-nautile.

Je commence par rappeler les formules obtenues à son sujet, en me contentant de représenter dans chacune d'elles par des abréviations C_1, C_2, ..., les diverses constantes dont nous possédons explicitement l'expression en fonction de a et b; ainsi que par F_1, F_2, ..., diverses fonctions également connues.

Nous avons trouvé au N° 141

$$(139 \text{ bis})\qquad h = r \cos a \sin^2 b = C_1 r,$$

$$(140 \text{ bis})\qquad k = r \sin b \sqrt{1 - \cos^2 a \sin^2 b} = C_2 r,$$

$$(141 \text{ bis})\qquad H = r\,\frac{1 - \cos^2 a \sin^2 b}{\cos a} = C_3 r,$$

$$(144 \text{ bis})\qquad r_1 = r\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b} = C_4 r,$$

$$(145 \text{ bis})\qquad \theta - \theta_1 = \operatorname{arc} \sin\left(\frac{\sin a \cos a \sin^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}\right) = C_5,$$

et enfin (N° 163)

(166 bis) $$\sin M_1nO = \frac{r_1}{R}\cos(a+\theta-\theta_1),$$

$$= C_4\frac{r}{R}\cos(a+C_5) = C_6\frac{r}{R},$$

$$\operatorname{tang} M_1nO = \frac{C_6 r}{\sqrt{R^2 - C_6^2 r^2}},$$

(165 bis) $$\operatorname{tang} M_1nM_2 = \frac{H}{\sqrt{k^2 - R^2\operatorname{tang}^2\lambda}} = \frac{C_3 r}{\sqrt{C_2^2 r^2 - R^2\operatorname{tang}^2\lambda}}.$$

L'équation différentielle devient d'après cela

(164 bis) $$R\frac{d\omega}{dR} = r\frac{C_3\sqrt{R^2 - C_6^2 r^2} - C_6\sqrt{C_2^2 r^2 - R^2\operatorname{tang}^2\lambda}}{C_3C_6 r^2 + \sqrt{(R^2 - C_6^2 r^2)(C_2^2 r^2 - R^2\operatorname{tang}^2\lambda)}}.$$

Représentons la en abrégé par

$$\frac{R\,d\omega}{dR} = F_1(r, R, \lambda).$$

Elle renferme encore θ par le facteur r, en outre des coordonnées R, ω, λ. Mais nous possdéons deux expressions de ce paramètre (N° 138) à savoir

(137 bis) $$\theta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log}\left\{\frac{R}{\cos\lambda\cos^2 b}\left[\sqrt{\sin^2 a\cos^2\lambda + \cos^2 a\cos^2 b}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{\cos^2 a\cos^2\lambda - \sin^2 a\cos^2 b}\right]\right\} = F_2(R, \lambda),$$

ainsi que

(138 bis) $$\theta = \omega + \arcsin\left(\frac{\cos a}{\cos\lambda}\sqrt{\cos^2\lambda - \cos^2 b}\right) = \omega + F_3(\lambda).$$

Cette dernière nous permet de chasser transitoirement ω pour conserver seulement λ. Elle donne en effet

$$d\omega = d\theta - F'_3(\lambda)\,d\lambda = \left(\frac{\partial F_2}{\partial R}dR + \frac{\partial F_2}{\partial\lambda}d\lambda\right) - F'_3(\lambda)\,d\lambda.$$

Il vient d'après cela, en reportant ces valeurs dans F_1

$$\frac{dR}{R}\cdot F_1\left[e^{AF_2(R,\lambda)}, \quad R, \lambda\right] = \frac{\partial F_2}{\partial R}\, dR + \left[\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} - F'_3(\lambda)\right] d\lambda,$$

c'est-à-dire définitivement

$$\left(F_1 - R\,\frac{\partial F_2}{\partial R}\right) dR = \left(\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} - F'_3\right) d\lambda,$$

équation différentielle du premier ordre et du premier degré entre R, λ, dR, $d\lambda$.

Si on la suppose intégrée, avec une constante C, et qu'on l'adjoigne à l'équation du sphéro-nautile

$$F_2(R, \lambda) = \omega + F_3(\lambda), \tag{167}$$

qui résulte de (137 bis) et (138 bis), ou possèdera les deux équations de la seconde famille de lignes de courbure. Si l'on désire en particulier celle de la projection équatoriale dont nous nous sommes écartés momentanément, elle résulterait de l'élimination de λ entre ces deux relations.

La complication des calculs que nous venons d'esquisser semble à bon droit décourageante. Nous pouvons tout au moins présenter la solution complète ponr le cas du sphéro-nautile équiradial. Et cela suffira sans doute; car la netteté des propriétés relatives à ce cas jette une grande clarté sur l'allure de ces courbes dans les conditions générales.

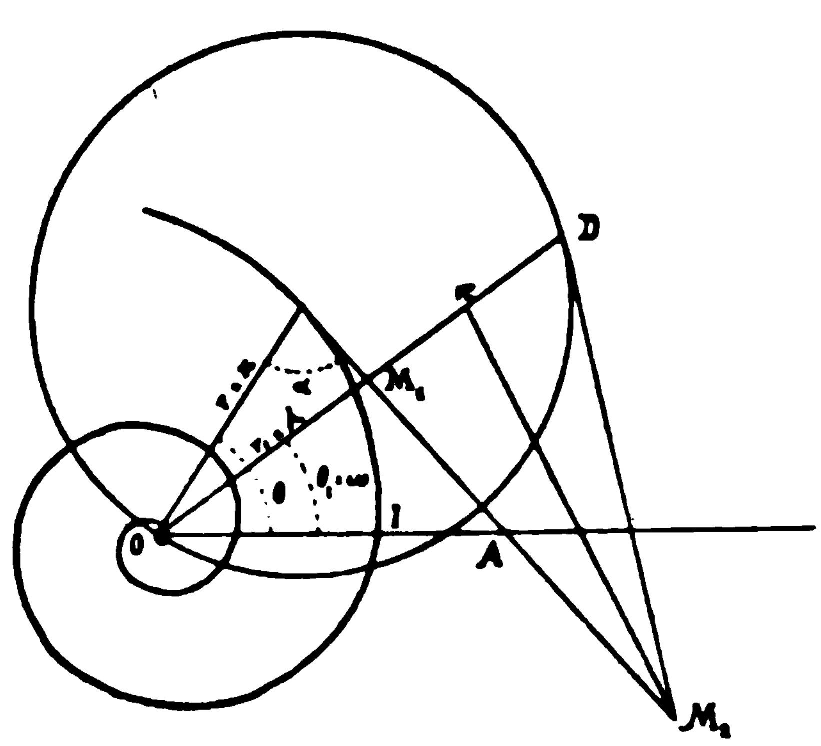


Fig. 24

167. Commençons par envisager la question pour des sphérales équiradiales de directrice quelconque. Il nous suffirait à cet égard de supposer B = 1 dans les résultats précédents, mais nous arriverons plus directement par la considération de la figure 24 spéciale à ce cas.

Elle nous donne immédiatement

$$\frac{\mathrm{R}d\omega}{d\mathrm{R}} = \operatorname{tang} \mathrm{O}n\mathrm{M}_2 = \frac{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}{\mathrm{M}_1 n} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{O}n - \mathrm{OM}_1} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R} - r\sin a}.$$

On a d'ailleurs

$$h = \mathrm{MM}_1 = r\cos a\,,$$

$$k = \mathrm{OM}_1 = r\sin a\,,$$

$$\mathrm{H} = \frac{k^2}{h} = r\frac{\sin^2 a}{\cos a}\,,$$

et par conséquent

$$\frac{\mathrm{R}d\omega}{d\mathrm{R}} = \frac{r\sin^2 a}{\cos a\,(\mathrm{R} - r\sin a)}.$$

Nous avons encore (126)

$$\sin a = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2}}, \qquad \cos a = \frac{\mathrm{F}'}{\sqrt{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2}},$$

$$d\omega = \frac{\mathrm{F}^2 + 2\mathrm{F}'^2 - \mathrm{F}\mathrm{F}''}{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2}\,d\theta,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{\mathrm{R}d\theta}{d\mathrm{R}} \cdot \frac{\mathrm{F}^2 + 2\mathrm{F}'^2 - \mathrm{F}\mathrm{F}''}{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2} = \frac{\mathrm{F}^3}{\mathrm{F}'(\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2} - \mathrm{F}^2)},$$

ou en renversant les fractions

$$\frac{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2}{\mathrm{F}^2 + 2\mathrm{F}'^2 - \mathrm{F}\mathrm{F}''} \cdot \frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}d\theta} = \frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}^3}\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2} - \frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}},$$

et en divisant par R

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'} \cdot \frac{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2}{\mathrm{F}^2 + 2\mathrm{F}'^2 - \mathrm{F}\mathrm{F}''}\,\frac{d\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)}{d\theta} - \left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right) + \frac{\sqrt{\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2}}{\mathrm{F}^2} = 0,$$

équation linéaire entre $\frac{1}{\mathrm{R}}$ et θ.

Écrivons la sous la forme abrégée

$$\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\theta} - U\left(\frac{1}{R}\right) + V = 0,$$

en représentant par les coefficients U, V, ces fonctions de θ

$$U = \frac{F'}{F} \cdot \frac{F^2 + 2F'^2 - FF''}{F^2 + F'^2}, \qquad V = U\frac{\sqrt{F^2 + F'^2}}{F^2}.$$

Elle aura pour intégrale

$$\frac{1}{R} = e^{\int U d\theta}\left(C - \int V e^{-\int U d\theta} d\theta\right).$$

Le problème se trouve donc ramené aux quadratures, et il ne restera plus qu'à éliminer θ dans chaque cas entre les deux équations

$$(168) \qquad \begin{cases} R = \dfrac{e^{-\int U d\theta}}{C - \int V e^{-\int U d\theta} d\theta}, \\ \omega = \theta + \operatorname{arc\,tang} \dfrac{F}{F'} - \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Si cette élimination reste impossible, nous possédons tout au moins les expressions explicites des deux coordonnées R, ω en fonction du paramètre auxiliaire θ.

168. Appliquons cette théorie au sphéro-nautile équiradial, en traitant a comme une constante

$$F = e^{A\theta}, \qquad F' = Ae^{A\theta},$$

$$F^2 + F'^2 = \frac{e^{2A\theta}}{\sin^2 a}, \qquad F^2 + 2F'^2 - FF'' = \frac{e^{2A\theta}}{\sin^2 a},$$

$$U = A, \qquad \int U d\theta = A\theta,$$

$$V = \frac{Ae^{-A\theta}}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sin^2 a} e^{-A\theta},$$

$$\int V e^{-\int U d\theta} d\theta = \frac{\cos a}{\sin^2 a} \int e^{-2A\theta} d\theta = -\frac{e^{-2A\theta}}{2 \sin a},$$

$$\frac{1}{R} = e^{A\theta}\left(C + \frac{e^{-2A\theta}}{2 \sin a}\right),$$

$$R = \frac{2 \sin a}{C e^{A\theta} + e^{-A\theta}},$$

$$\omega = \theta + a - \frac{\pi}{2}, \qquad \theta = \omega + \frac{\pi}{2} - a,$$

et enfin

$$(169) \qquad R = \frac{2 \sin a}{C e^{A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)} + e^{-A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)}}.$$

Pour $C = 0$, l'on retrouve la spirale (147) trace équatoriale de cette sphérale; et pour $C = \infty$, le pôle lui-même, auquel se réduit, ainsi que nous l'avons vu (N° 145), la seconde spirale-trace.

Avec toute autre valeur du paramètre C, on voit que R s'annule pour $\omega = \pm \infty$. La ligne de courbure est donc, dans ses deux sens, asymptote au pôle.

Elle comporte d'après cela un maximum d'éloignement de ce point, c'est-à-dire de la valeur de R, ou un minimum de son dénominateur. Et en effet le produit des deux termes qui le composent étant constant, leur somme atteint ce minimum au moment de leur égalité

$$C e^{A\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - a\right)} = e^{-A\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - a\right)},$$

$$C = e^{-2A\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - a\right)},$$

Si donc, au lieu de C, nous adoptons pour constituer le paramètre arbitraire de la seconde famille des lignes de courbure, cet azimut ω_0 du *sommet* de la courbe, l'équation deviendra, en y remplaçant C par sa valeur

$$(170) \qquad R = \frac{2 \sin a \,.\, e^{A\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} + a\right)}}{e^{A(\omega - \omega_0)} + e^{-A(\omega - \omega_0)}},$$

L'expression R_0 du rayon maximum est d'après cela (pour $(\omega = \omega_0)$

$$(171) \qquad R_0 = \sin a \,.\, e^{A\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - a\right)}.$$

Cette équation, si l'on y envisage R_0 et ω_0 comme des coordonnées courantes, représente le lieu géométrique des sommets. On y recounait celle de la projection de la ligne de faite (148).

Supposons que, pour étudier en son particulier chacune des lignes de courbure, on la rapporte à un axe polaire spécial pour elle, et passant par son sommet, il faudra it prendre à cet effet comme coordonnée azimutale

$$\Omega = \omega - \omega_0,$$

en déplaçant de l'angle ω_0 l'ancien axe polaire. L'équation de la projection prend alors cette forme très simple

$$R = \frac{2R_0}{e^{A\Omega} + e^{-A\Omega}}.$$

C'est celle de la *spirale de Poinsot*, ou de la projection de l'*herpolhodie-limite* qui correspond au cas où la distance du plan fixe au centre de l'ellipsoïde générateur est égale au demi-axe moyen de ce dernier.

La famille des secondes lignes de courbure du sphéro-nautile équiradial a donc la même projection équatoriale que ces herpolhodies spéciales, de rayons maxima gradués et disposés dans des directions progressivement variables.

La disposition des lignes de courbure elles-mêmes sur la surface devient dès lors très nette. En son point le plus élevé, chaque caractéristique est traversée normalement, et parallèlement à l'équateur par une de ces lignes, qui plonge à partir de là sur les deux versants, pour y serpenter d'une manière spiraloïde, asymptotiquement à l'équateur et au pôle.

169. Prenons comme second exemple la spirale sinusoïde

$$r^n = \cos n\theta,$$

$$F = \cos^{\frac{1}{n}} n\theta, \quad F' = -\cos^{\frac{1-n}{n}} n\theta \sin n\theta, \quad F'' = (\sin^2 n\theta - n)\cos^{\frac{1-2n}{n}} n\theta,$$

$$\frac{F}{F'} = -\cot n\theta\,, \quad \sqrt{F^2+F'^2} = \cos^{\frac{1-n}{n}} n\theta\,,$$

$$F^2 + 2F'^2 - FF'' = (n+1)\cos^{\frac{2(1-n)}{n}} n\theta\,,$$

$$U = -(n+1)\,\mathrm{tang}\, n\theta\,, \quad \int U d\theta = \frac{n+1}{n}\,\mathrm{Log}\cos n\theta\,,$$

$$e^{\int U d\theta} = \cos^{\frac{n+1}{n}} n\theta\,,$$

$$V = -(n+1)\sin n\theta \cos^{\frac{-1-2n}{n}} n\theta, \quad Ve^{-\int U d\theta} = -(n+1)\sin n\theta \cos^{\frac{-2-3n}{n}} n\theta,$$

$$\int Ve^{-\int U d\theta} d\theta = -\frac{1}{2}\cos^{-2\frac{n+1}{n}} n\theta\,.$$

$$\frac{1}{R} = \cos^{\frac{n+1}{n}} n\theta \left[C + \frac{1}{2}\cos^{-2\frac{n+1}{n}} n\theta \right],$$

et enfin

$$R = \frac{2\cos^{\frac{n+1}{n}} n\theta}{1 + 2C\cos^{2\frac{n+1}{n}} n\theta}\,.$$

On a d'autre part (124)

$$\mathrm{tang}(\theta - \omega) = \frac{F'}{F} = -\,\mathrm{tang}\, n\theta\,,$$

$$\theta - \omega = -n\theta\,, \qquad \theta = \frac{\omega}{n+1}\,,$$

et par conséquent l'équation définitive

$$(172) \qquad R = \frac{2\cos^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{n}{n+1}\,\omega\right)}{2C\cos^{2\left(\frac{n+1}{n}\right)}\left(\frac{n}{n+1}\,\omega\right) + 1}\,.$$

Pour $C = 0$, l'on retrouve la trace horizontale (128) de la sphérale.

170. Considérons enfin la spirale algébrique

$$F = \theta^n, \quad F' = n\theta^{n-1}, \quad F'' = n(n-1)\theta^{n-2},$$

$$\frac{F}{F'} = \frac{\theta}{n}, \quad \sqrt{F^2 + F'^2} = \theta^{n-1}\sqrt{\theta^2 + n^2},$$

$$F^2 + 2F'^2 - FF'' = \theta^{2n-2}[\theta^2 + n(n+1)].$$

$$U = \frac{n}{\theta}\left(1 + \frac{n}{\theta^2 + n^2}\right),$$

$$\int U d\theta = (n+1)\operatorname{Log}\theta - \operatorname{Log}(\sqrt{\theta^2 + n^2}),$$

$$e^{\int U d\theta} = \frac{\theta^{n+1}}{\sqrt{\theta^2 + n^2}},$$

$$V = \frac{n(\theta^2 + n^2 + n)}{\sqrt{\theta^2 + n^2}}\theta^{-n-2}, \quad Ve^{\int U d\theta} = n(\theta^2 + n^2 + n)\theta^{-2n-3},$$

$$\int Ve^{\int U d\theta} d\theta = -\frac{\theta^2 + n^2}{2\theta^{2n+2}},$$

et enfin

$$(173) \qquad R = \frac{2\theta^{n+1}\sqrt{\theta^2 + n^2}}{\theta^2 + n^2 + 2C\theta^{2n+2}}.$$

Il arrive donc cette circonstance singulière que l'intégration vient de réussir, quelque soit n, tandis que ce n'est que pour un nombre limité de cas spéciaux, bien qu'assez notable, que la résolvante (129) se prête à nous procurer l'équation de la sphérale. Contentons nous de rappeler les deux plus simples.

L'hypothèse $n = 0$ nous fournit une vérification. En effet elle indique comme directrice le cercle $R = 1$. La sphérale est donc un tore équiradial. Ses secondes lignes de courbure sont ses parallèles. Or la résolvante (129) donne ici $\theta = 0$, ce qui réduit à $R = \frac{1}{C}$ l'équation (173), et fournit ainsi en effet la famille des cercles appelés parallèles.

Pour obtenir un résultat nouveau, prenons encore la valeur $n = -1$, qui correspond à la spirale hyperbolique. Nous avons déterminé sa sphérale équiradiale (132). L'équation (173) donne alors

$$R^2 = \frac{4(\theta^2 + 1)}{(\theta^2 + 1 + 2C)^2},$$

et l'on en déduit la valeur

$$(174) \qquad \theta = \sqrt{\frac{2}{R^2} - (2C+1) \pm \frac{2}{R}\sqrt{\frac{1}{R^2} - 2C}},$$

qu'il suffit de substituer dans la formule (130), pour obtenir, entre R et ω, la projection équatoriale des lignes de courbure.

171. Les sphérales équiradiales jouissent, pour leurs lignes de courbure, d'une importante propriété.

Marquons (fig. 25) en OAC, $OA'_1C'_1$, $OA''_2C''_2$, ..., une

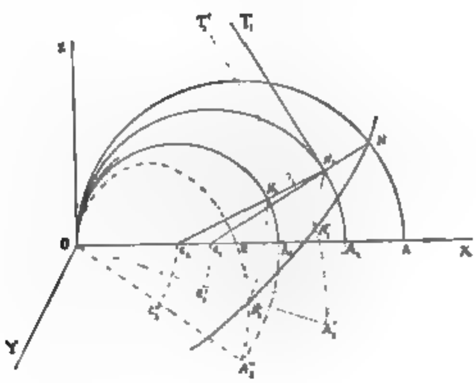


Fig. 25

suite de caractéristiques infiniment voisines. Ramenons les toutes au moyen de rotations C'_1C_1, C''_2C_2, ..., autour de l'axe zénithal, dans un même plan méridien en OAC, OA_1C_1, OA_2C_2, ... Traçons dans ce plan la trajectoire orthogonale $NN_1N_2N_3$... de ces nouveaux cercles, et cherchons la relation de cette courbe avec la ligne de courbure $NN'_1N''_2N'''_3$...

Le premier élément NN_1 est mené de N normalement à OA_1, c'est-à-dire suivant le rayon NN_1C_1. Le second sera N_1N_2 dirigé suivant le rayon $N_1N_2C_2$ du cercle consécutif, et ainsi de suite. Envisageons le plan $T_1N_1N'_1$ formé par la tangente N_1T_1 de la circonférence OC_1A_1 et l'arc $N_1N'_1$ de la rotation qui amènerait cette dernière dans sa véritable situation $OC'_1A'_1$. Cet arc élémentaire est normal au méridien ZOA, par suite à NN_1. D'autre part le rayon NN_1C_1 est perpendiculaire à la tangente N_1T_1. Donc NN_1 est abaissé de N perpendiculairement au plan $T_1N_1N'_1$; en second lieu, à partir de N_1 l'on méne dans ce plan $N_1N'_1$

normal à la tangente $N'_1T'_1$ de la ligne de courbure située dans ce même plan. D'après le théorème des trois perpendiculaires, NN'_1 sera normal à $N'_1T'_1$, et devient dès lors l'élément de cette ligne qui doit, sur la surface, couper orthogonalement les caractéristiques. La relation du rayon vecteur de l'espace ON'_1 avec sa latitude $N'_1OA'_1$ est donc, pour cette courbe, la même que celle des éléments correspondants ON_1 et N_1OA_1 de la trajectoire plane, puisqu'Ils sont respectivement égaux En d'autres termes, l'équation entre R et λ de la ligne de courbure (à joindre à celle de la sphérale pour représenter cette ligne) ne diffère pas de celle de la trajectoire plane qui relie ces mêmes éléments. Or celle-ci est immuable, et il suffit de la trouver une fois pour toutes; par conséquent *elle reste la même pour toutes las sphérales équiradiales, quelle que soit leur directrice.*

Rien de plus simple d'ailleurs que de déterminer cette trajectoire orthogonale des cercles qui, dans un même plan, passent par l'origine et ont leurs centres sur l'axe des abscisse. Ce sont les circonférences qui passent à l'origine et ont leurs centres sur l'axe des ordonnées. Traçons en effet (fig. 26) deux semblables cercles, ayant leurs centres en P et Q, et se coupant en N. Joignous NP, NQ, PQ. Les triangles PQN, PQO sont égaux comme ayant leurs trois côtés respectivement égaux. L'angle N est donc droit, comme l'est l'angle O. Par suite le rayon de l'un des cercles est perpendiculaire à celui de l'autre, c'est-à-dire tangent à ce dernier. Les deux circonférences sont dès lors orthogonales.

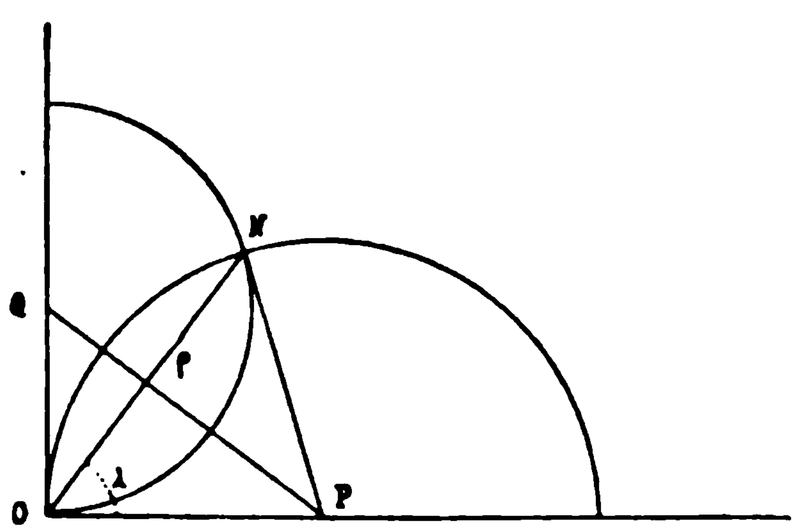


Fig. 26

172. Désignons par C le rayon OQ de l'un de ces cercles, on aura pour son rayon vecteur de l'espace

$$\rho = ON = 2OQ \cos QON = 2C \sin \lambda .$$

Mais d'autre part le rayon vecteur horizontal a pour valeur

$$R = On = \rho \cos \lambda = 2C \sin \lambda \cos \lambda = C \sin 2\lambda .$$

Telle est l'équation qui, sur une sphérale équiradiale quelconque, relie les coordonnées R, λ de la seconde ligne de courbure, et qu'il suffit de joindre à celle de la sphérale pour

représenter cette courbe. Or elle appartient à une sphère de rayon C, tangente à l'équateur au pôle. On obtient donc, pour une sphérale équiradiale quelconque, toutes les lignes de courbure du second système en la coupant par la famille des sphères qui passent au pôle tangentiellement à l'équateur.

Pour avoir la ligne de courbure qui passe en un point déterminé N de la sphérale, c'est-à-dire le centre de la sphére qui doit la contenir, il suffit de couper l'axe zénithal par le plan normal à cette courbe, à savoir le plan perpendiculaire à la génératrice NM_1 du cône circonscrit.

On peut d'après cela déduire l'équation de la ligne de courbure de celle de la sphérale, en y remplaçant λ par la valeur ci-dessus

$$(175) \qquad \sin 2\lambda = \frac{R}{C}.$$

D'ailleurs la latitude ne figure dans la formule (123) (d'où découle dans chaque cas l'équation de la sphérale elle-même) que par le facteur $\frac{R}{2\cos^2\lambda}$, qui prend la valeur

$$(176) \qquad \frac{2\cos^2\lambda}{R} = \frac{R}{1+\sqrt{1-\sin^2 2\lambda}} = \frac{CR}{C+\sqrt{C^2-R^2}}$$
$$= \frac{C}{R}\left(C-\sqrt{C^2-R^2}\right).$$

De là cette double conclusion :

1° L'on peut, si l'on possède l'équation de la sphérale équiradiale, éviter la double quadrature de la méthode précédente (N° 166), en se bornant à effectuer dans cette équation la substitution (176), qui procurera, entre R et ω, l'équation de la projection horizontale de la seconde famille, de paramètre C.

2° On peut inversement, s'il est impossible de déduire des formules (123) par élimination l'équation de la sphérale, ou si elle semble exiger des calculs plus compliqués, employer la méthode de la double quadrature pour obtenir entre R, ω, C l'équation équatoriale des lignes de courbure, puis alors y effectuer la substitution inverse (175)

$$C = \frac{R}{\sin 2\lambda},$$

pour avoir entre R, ω, λ l'équation de la sphérale.

Nous trouvons trois vérifications de ces deux énoncés en opérant, dans l'un et l'autre sens, le passage mutuel entre (127) et (172), (132) et (174), (146) et (169).

173. Je tiens à présenter en outre un exemple direct de la recherche des lignes de courbure sans intégration.

Envisageons pour cela comme directrice la spirale de Poinsot (N° 157)

$$r = \frac{1}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

Je saisis auparavant cette occasion pour indiquer d'une manière générale [1] comment l'introduction dans nos formules de l'inverse du rayon vecteur (qui nous a déjà parmis de simplifier la question du cône circonscrit) peut procurer le même avantage dans les formules fondamentales (123) pour la recherche de l'équation d'une sphérale équiradiale.

Si nous prenons l'équation (106) de la directrice sous la forme

$$\frac{1}{r} = f(\theta), \quad F = \frac{1}{f}, \quad F' = -\frac{f'}{f^2},$$

en introduisant en outre la quantité auxiliaire

$$v = \frac{\cos^2\lambda}{R},$$

les formules (123) deviennent

$$\cos(\theta - \omega) = \frac{f}{2v}, \quad \sin(\theta - \omega) = -\frac{f'}{2v}.$$

En ajoutant les carrés, nous obtenons une relation indépendante de ω

$$f^2 + f'^2 = 4v^2,$$

et en divisant membre à membre, une formule indépendante

[1] Voy N° 147, note 1.

de v, c'est-à-dire de R et λ

$$\operatorname{tang}(\theta - \omega) = -\frac{f'}{f}.$$

174. Ces égalités donnent pour la spirale de Poinsot

$$f = e^{\theta} + e^{-\theta}, \qquad f' = e^{\theta} - e^{-\theta},$$

$$4v^2 = (e^{\theta} + e^{-\theta})^2 + (e^{\theta} - e^{-\theta})^2,$$

$$2v^2 = e^{2\theta} + e^{-2\theta},$$

$$e^{4\theta} - 2v^2 e^{-2\theta} + 1 = 0.$$

Résolvons cette équation, en laissant les doubles signes implicitement attachés aux racines, et décomposant les radicaux superposés en radicaux simples. Il vient ainsi :

$$e^{\theta} = \sqrt{v^2 + \sqrt{v^4 - 1}} = \sqrt{\frac{v^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{v^2-1}{2}},$$

d'où

$$e^{\theta}\sqrt{2} = \sqrt{v^2+1} + \sqrt{v^2-1},$$

$$e^{-\theta}\sqrt{2} = \sqrt{v^2+1} - \sqrt{v^2-1},$$

$$e^{\theta} + e^{-\theta} = \sqrt{2(v^2+1)},$$

et par conséquent

$$\cos(\theta - \omega) = \frac{f}{2v} = \sqrt{\frac{v^2+1}{2v^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)},$$

$$\theta = \omega + \operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)},$$

$$\sqrt{2(v^2+1)} = e^{\omega + \operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{v^2}\right)}} + e^{-\omega - \operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{v^2}\right)}}.$$

Si donc on remplace dans cette formule v par sa valeur

$$\frac{1}{v} = \frac{R}{\cos^2\lambda},$$

on aura l'équation de la sphérale équiradiale entre R, ω, λ.

Si au contraire on substitue pour v l'expression

$$\frac{1}{v}=\frac{2C}{R}(C-\sqrt{C^2-R^2}),$$

on obtiendra l'équation de la projection horizontale de la seconde famille de lignes de courbure de cette sphérale entre R, ω, C.

§ XXVII

Surfaces podaires

175. Proposons nous de trouver la surface podaire d'une sphérale absolument quelconque, par rapport au pôle. Ce choix spécial ne restreint pas d'ailleurs la généralité de la recherche pour un point arbitraire du plan de la directrice, puisqu'on peut toujours y rattacher comme pôle l'équation de cette courbe.

Envisageons à part le groupe spécial de plans tangents qui, le long d'une même caractéristique, sont communs à la surface, à la sphère variable, et au cône circonscrit. L'angle d'ouverture $2c$ de ce dernier nous est connu d'une manière générale (114). Si nous abaissons du pôle une perpendiculaire sur chacun de ces plans, ces droites dessineront dans l'espace un nouveau cône de révolution, dont l'angle d'ouverture $\pi-2c$ sera supplémentaire du celui du précédent, et l'axe parallèle à la tangente de la directrice en son point décrivant. Les intersections des génératrices de ce second cône avec les plans tangeuts perpendiculaires formeront une certaine ligne C, et le lieu de ces courbes, lorsque M parcourt la directrice, constituera la surface podaire cherchée. L'une des deux équations de cette ligne sera donc celle du cône supplémentaire en question. Nous pouvons aisément lui en adjoindre une seconde.

En effet la projetante OP du pôle O sur l'un des plans tangents du cône circonscrit, et la droite qui, dans ce plan, joint le pied P au sommet M_2 de ce cône, forment un angle droit inscrit sur la droite fixe OM_2. Le point P appartient donc à la sphère qui aurait OM_2 pour diamètre; et par conséquent la courbe C toute entière se trouve sur cette sphére, dont l'équation formera la seconde relation cherchée.

Développons ces formules, en nous limitant, comme ci-dessus, aux directrices planes.

176. Le centre de la sphére se trouve au milieu du rayon vecteur $OM_2 = r_2$ (149) de la courbe lieu géométrique du sommet du cône circonscrit à la sphérale. Elle a donc pour équation

$$\left(x - \frac{r_2}{2}\cos\theta_2\right)^2 + \left(y - \frac{r_2}{2}\sin\theta_2\right)^2 + z^2 = \left(\frac{r_2}{2}\right)^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - r_2(x\cos\theta_2 + y\sin\theta_2) = 0,$$

$$R^2(1 + \operatorname{tang}^2\lambda) - r_2R(\cos\omega\cos\theta_2 + \sin\omega\sin\theta_2) = 0,$$

(177) $$\frac{R}{\cos^2\lambda} = r_2\cos(\omega - \theta_2),$$

relation dans laquelle on remettra pour r_2, θ_2, leurs valeurs (149) (150) en fonction de θ.

177. Formons en second lieu l'équation du cône supplémentaire dont le sommet se trouve au pôle.

Son axe parallèle à la tangente de la directrice fait l'angle $\theta + a$ avec l'axe polaire. Il admet donc comme équation

$$y = x\operatorname{tang}(\theta + a).$$

L'angle générateur $c' = \frac{\pi}{2} - c$ de ce cône a pour sinus le cosinus de c (114)

$$\sin c' = \sqrt{1 - \frac{\varphi'^2}{F^2 + F'^2}}.$$

Or $\sin c'$ exprime le rapport de deux distances: 1° celle du point (x, y, z) du cône supplémentaire à son axe de révolution; 2° celle $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ de ce même point au pôle. L'axe de figure ayant pour équations

$$x\sin(\theta + a) - y\cos(\theta + a) = 0, \qquad z = 0,$$

la première de ces longueurs a comme expression

$$\sqrt{[x\sin(\theta + a) - y\cos(\theta + a)]^2 + z^2}.$$

De là l'équation de ce cône

$$[x\sin(\theta + a) - y\cos(\theta + a)]^2 + z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\left(1 - \frac{\varphi'^2}{F^2 + F'^2}\right),$$

ou en coordonnées mixtes

$$\sin^2\lambda + \cos^2\lambda \sin^2(\theta - \omega + a) = \frac{F^2 + F'^2 - \varphi'^2}{F^2 + F'^2},$$

$$\cos\lambda \cos(\omega - \theta + a) = \frac{\varphi'}{\sqrt{F^2 + F'^2}},$$

$$\omega - \theta = \text{arc tang}\,\frac{F}{F'} + \text{arc cos}\left(\frac{\varphi'}{\cos\lambda\,\sqrt{F^2 + F'^2}}\right). \tag{178}$$

Telles sont (177) (178) les deux équations de la courbe podaire C. En éliminant entre elles le paramètre θ, on obtiendra celle de la surface podaire.

178. Le calcul se simplifie pour les sphérales vectorielles. En premier lieu les formules (149) (150) qui expriment r_2, θ_2 se réduisent à (151), (152) et donnent à l'équation (177) la forme

$$\frac{R}{\cos^2\lambda} = -\frac{F^2}{F'}\sin(\omega - \theta).$$

En même temps l'égalité (178) devient

$$\omega - \theta = \text{arc tang}\,\frac{F}{F'} + \text{arc cos}\left(\frac{F'\sin b}{\cos\lambda\,\sqrt{F^2 + F'^2}}\right).$$

179. Supposons enfin qu'il s'agisse du sphéro-nautile, en considérant a comme constante. Ces dernières relations deviennent alors

$$\frac{R}{\cos^2\lambda} = -e^{A\theta}\,\text{tang}\,a \sin(\omega - \theta),$$

$$\omega - \theta = a + \text{arc cos}\left(\frac{\cos a \sin b}{\cos\lambda}\right),$$

d'où en substituant la valeur de θ

$$\frac{R}{\cos^2\lambda} =$$

$$\text{tang}\,a \sin\left[a + \text{arc cos}\left(\frac{\cos a \sin b}{\cos\lambda}\right)\right] . e^{A\left[\omega - a - \text{arc cos}\left(\frac{\cos a \sin b}{\cos\lambda}\right)\right]}.$$

Telle est la surface podaire du sphéro-nautile d'indice vectoriel quelconque b.

§ XXVIII

Surfaces antipodaires

180. On sait d'après le théorème de MAC-CULLAGH [1], que si, d'une surface quelconque représentée par M sur la figure schématique 27, on prend la transformée M_1 par rayons vecteurs réciproques, puis la podaire M_2 de M_1, et enfin la transformée M_3 de M_2 par rayons vecteurs réciproques, la proposée M est elle même la podaire de M_3.

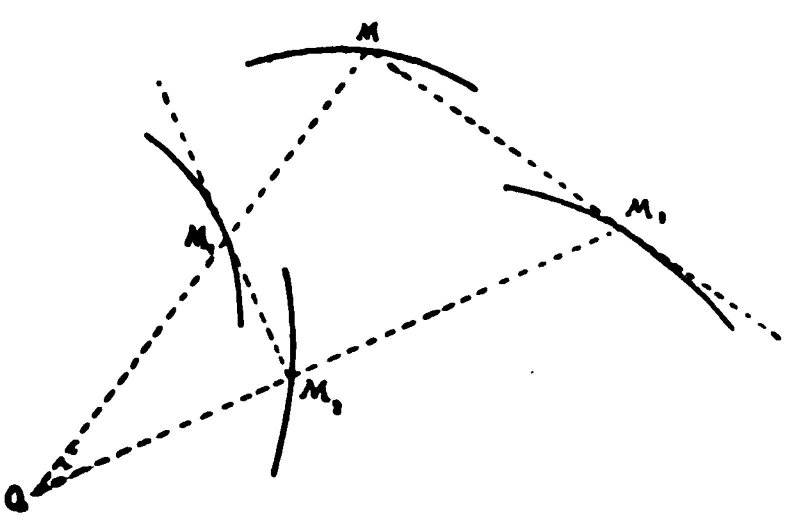


Fig. 27

Imaginons que M soit une sphérale, que nous supposerons vectorielle [2] et de directrice quelconque. En appliquant à son équation les formules générales de la transformation, nous obtiendrons celle de M_1. D'après le théorème fondamental du N° 117, elle sera elle-même une sphérale vectorielle de même indice. La théorie précédente (§ XXVII) nous permet donc de connaitre sa podaire M_2. Puis les formules de la transformation réciproque en déduiront M_3. Mais cette dernière surface M_3 est l'antipodaire de M. Nous possédons ainsi la marche qui nous permettra d'obtenir l'équation de l'antipodaire d'une sphérale vectorielle quelconque.

181. Appliquons la au sphéro-nautile, dont nous avons l'équation générale (137, 138). Je la représenterai en abrégé par

$$(179) \qquad f(R, \omega, \lambda) = 0 .$$

---

[1] Dont M. HUMBERT m'a communiqué une nouvelle et très élégante démonstration, encore inédite.

[2] Il nous serait facile de formuler une méthode applicable à une loi quelconque φ du rayon sphérique; mais je supprimerai ce développement, puis que la formule vectorielle nous suffit pour l'application au sphéro-nautile.

Supposons, pour fixer les idées, cette surface tournoyant dans le sens sinistrorsum.

Le rayon vecteur de l'espace

$$\rho = \frac{R}{\cos\lambda},$$

donne pour la transformation

$$k^2 = \rho\rho' = \frac{RR'}{\cos^2\lambda}, \tag{180}$$

car la latitude λ est la même pour les deux rayons, ainsi que la longitude ω. Il vient donc

$$R = \frac{k^2 \cos^2\lambda}{R'},$$

et la transformée M_1 aura pour équation

$$f\left(\frac{k^2\cos^2\lambda}{R'}, \omega, \lambda\right) = 0.$$

Nous savons (N° 116) qu'elle représente un sphéro-nautile identique, mais procédant dextrorsum.

La surface podaire M_2 nous est connue d'après ce qui précède (N° 164). Représentons la en abrégé par

$$F(R', \omega, \lambda) = 0,$$

La transformée réciproque M_3 de celle-ci sera de son côté (180)

$$F\left(\frac{k^2\cos^2\lambda}{R}, \omega, \lambda\right) = 0,$$

et fera connaître l'antipodaire cherchée du sphéro-nautile (179).

§ XXIX

Surfaces normopodaires

182. Au lieu d'abaisser du pôle, comme au § XXVII, des perpendiculaires sur les divers plans tangents d'une sphérale

quelconque, menons par ce point un plan perpendiculaire à chacune des normales de cette surface. Nous appellerons *normopodaire* le lieu géométrique de leurs intersections.

L'une quelconque de ces droites joint le point N (x, y, z) de la sphérale au point décrivant M ($r\cos\theta$, $r\sin\theta$, zéro) de la directrice. Elle a donc pour équations

$$(181)\qquad \frac{X - r\cos\theta}{x - r\cos\theta} = \frac{Y - r\sin\theta}{y - r\sin\theta} = \frac{Z}{z},$$

et le plan qu'on lui mène perpendiculairement par l'origine

$$(182)\qquad (x - r\cos\theta)X + (y - r\sin\theta)Y + Zz = 0.$$

On déterminera les coordonnées X, Y, Z de l'intersection en fonction de x, y, z, θ, en adjoignant à ces trois égalités l'équation de la directrice ainsi que les formules (108), (109) qui représentent la sphérale. Il suffira dès lors, pour avoir l'équation de la normopodaire, d'effectuer l'élimination des cinq paramètres entre ces six relations. .

183. Si l'on substitue dans la dernière (184) les valeurs de X, Y déduites des deux précédentes, il vient

$$(183)\qquad [(x - r\cos\theta)^2 + (y - r\sin\theta)^2 + z^2]Z$$
$$+ [(x - r\cos\theta)\cos\theta + (y - r\sin\theta)\sin\theta]rz = 0.$$

Or l'équation (106) de la sphère variable réduit à φ^2 le coefficient de Z; et cette même relation développée sous la forme (107)

$$\rho^2 - 2r(x\cos\theta + y\sin\theta) + r^2 = \varphi^2,$$

(en désignant par ρ le rayon vecteur de l'espace) nous donne pour le coefficient de rz (183)

$$x\cos\theta + y\sin\theta - r = \frac{\rho^2 - r^2 - \varphi^2}{2r}.$$

Il vient donc finalement

$$Z = z\,\frac{\varphi^2 + r^2 - \rho^2}{2r},$$

et par suite

$$(184) \qquad X = \frac{x(\varphi^2 + r^2 - \rho^2) + r(\varphi^2 - r^2 + \rho^2)\cos\theta}{2\varphi^2},$$

$$Y = \frac{y(\varphi^2 + r^2 - \rho^2) + r(\varphi^2 - r^2 + \rho^2)\sin\theta}{2\varphi^2}.$$

184. Ces formules générales se simplifient lorsqu'il s'agit d'une sphérale équiradiale. Si l'on fait en effet $\varphi = r$, il reste seulement

$$(185) \qquad X = x\left(1 - \frac{\rho^2}{2r^2}\right) + \frac{\rho^2}{2r}\cos\theta,$$

$$Y = y\left(1 - \frac{\rho^2}{2r^2}\right) + \frac{\rho^2}{2r}\sin\theta,$$

$$Z = z\left(1 - \frac{\rho^2}{2r^2}\right).$$

Supposons l'équation de la directrice résolue sous la forme ordinaire, et rattachons y l'angle variable

$$\tang a = \frac{F}{F'}, \qquad \sin a = \frac{F}{\sqrt{F^2 + F'^2}}, \qquad \cos a = \frac{F'}{\sqrt{F^2 + F'^2}}.$$

Les équations de la sphérale deviennent de leur côté

$$(186) \qquad \omega = \theta + a - \frac{\pi}{2},$$

$$(187) \qquad R = 2F\sin a\cos^2\lambda.$$

On en déduit identiquement

$$\rho^2 = \frac{R^2}{\cos^2\lambda} = 2RF\sin a,$$

$$x = R\cos\omega = R\sin(\theta + a), \qquad y = R\sin\omega = R\cos(\theta + a),$$

d'oú, en développant ces expressions trigonométriques

$$(188)\begin{cases} X = R\left[\left(2-\dfrac{R\sin a}{F}\right)\sin a\cos\theta+\left(1-\dfrac{R\sin a}{F}\right)\cos a\sin\theta\right], \\ Y = R\left[\left(2-\dfrac{R\sin a}{F}\right)\sin a\sin\theta-\left(1-\dfrac{R\sin a}{F}\right)\cos a\cos\theta\right], \\ Z = R\,\text{tang}\,\lambda\left(1-\dfrac{R\sin a}{F}\right). \end{cases}$$

185. La longitude ω se trouve par là définitivement chassée de nos formules, et la question se réduit à l'élimination de R, λ, θ entre les quatre relations (187), (188).

Pour y procéder, convertissons les coordonnées rectangulaires X, Y, Z, du point quelconque de la normopodaire en coordonnées mixtes R', ω', λ', que nous distinguons par les accents de celles du point N de la sphérale. Il vient ainsi après réductions

$$(189)\begin{cases} R'\cos(\theta-\omega') = X\cos\theta+Y\sin\theta = \left(2-\dfrac{R\sin a}{F}\right)R\sin a, \\ R'\sin(\theta-\omega') = X\sin\theta-Y\cos\theta = \left(1-\dfrac{R\sin a}{F}\right)R\cos a, \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire

$$(190)\qquad \frac{R^2\sin a}{F}-2R+\frac{R'\cos(\theta-\omega')}{\sin a}=0,$$

$$\frac{R^2\sin a}{F}-R+\frac{R'\sin(\theta-\omega')}{\cos a}=0.$$

En retranchant membre à membre, nous obtenons cette valeur de R en fonction de θ et des nouvelles coordonnées

$$(191)\quad R=R'\left[\frac{\sin(\theta-\omega')}{\cos a}-\frac{\cos(\theta-\omega')}{\sin a}\right]=R'\frac{\cos(\theta+a-\omega')}{\sin a\cos a}.$$

Si d'autre part l'on divise membre à membre les égalités (189), il vient

$$\text{tang}(\theta-\omega')=\cot a\,.\,\frac{F-R\sin a}{2F-R\sin a},$$

c'est-à-dire une seconde relation entre R et θ, distincte de la précédente, puisque l'une renferme R' et l'autre F.

En éliminant R entre ces deux formules, nous formerons une *résolvante* définitive qui ne contiendra plus que θ, et pourra déterminer ce paramètre en fonction de R', ω'. Il vient ainsi

$$F[(\cos a - 2\tang(\theta-\omega')] = R\frac{\cos(\theta-\omega'+a)}{\cos(\theta-\omega')}.$$

et en substituant la valeur (191) de R

$$(192)\qquad R'\cos^2(\theta+a-\omega')$$
$$= F\cos a\left[\cos(\theta-\omega')\cos a - 2\sin(\theta-\omega')\sin a\right].$$

186. Nous pouvons obtenir, en θ, une seconde résolvante de même nature.

Il vient en effet, d'après la valeur (188) de Z, qui n'a pas encore été employée

$$R'\tang\lambda' = R\tang\lambda\left(1-\frac{R\sin a}{F}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{R^2\sin a}{F} - R + R'\tang\lambda'\cot\lambda = 0.$$

d'où, en comparant à l'égalité (190)

$$(193)\qquad \cot\lambda = \frac{\sin(\theta-\omega')\cot\lambda'}{\cos a}.$$

Nous aurons en conséquence d'après (187), (191)

$$\frac{R'\cos(\theta+a-\omega')}{\sin a\cos a} = R = 2F\sin a\cos^2\lambda = 2F\sin a\frac{\cot^2\lambda}{1+\cot^2\lambda},$$

$$\cot^2\lambda = \frac{R'\cos(\theta+a-\omega')}{2F\sin^2 a\cos a - R'\cos(\theta+a-\omega')}.$$

Si l'on substitue la valeur (193), on obtient définitivement

$$(194)\qquad R'\cos(\theta+a-\omega') = \frac{2F\sin^2 a\cos a\sin^2(\theta-\omega')}{\sin^2(\theta-\omega')+\cos^2 a\tang^2\lambda'}.$$

Telle est cette seconde résolvante en θ seul, distincte de la précédente, puisque'elle renferme λ'.

187. A ces deux résolvantes en θ, nous en pouvons adjoindre une troisième, qui n'en sera plus distincte, et ne pourrait que remplacer l'une d'elles; mais qui présentera ce caractère intéressant de ne plus renfermer la fonction F, dont la caractéristique aura ainsi disparu *en apparence*, puisque F' a déjà cessé de jouer un rôle dans nos formules, mais qui, bien entendu, continue d'exercer *implicitement* son influence par l'intermédiaire de a. Il est donc bon de signaler cette relation, *immuable* dans sa forme, pour toutes les recherches de normopodaires de sphérales équiradiales quelconques.

Il vient à cet égard, en divisant membre à membre (192) et (194)

$$(195) \qquad 2\sin^2 a \sin^2(\theta-\omega')\cos(\theta-\omega'+a)$$
$$=[\cos\theta-\omega'+a]-\sin(\theta-\omega')\sin a][\sin^2(\theta-\omega')+\cos^2 a \operatorname{tang}^2\lambda']=0.$$

La normopodaire se trouve donc finalement représentée, entre les coordonnées R', ω', λ' et le paramètre θ par les trois équations (192) (194) (195) qui se réduisent au fond à deux, entre lesquelles il suffirait d'éliminer θ, lorsque sera spécifiée l'expression F, qui définit la directrice dans chaque cas (1).

188. Appliquons cette méthode au sphéro-nautile équiradial.

Le résultat se trouve très directement préparé, puisque nous n'avons qu'à considérer a comme une constante. La relation (195) ne renferme plus alors, dans ce cas spécial, θ que par l'angle $\theta-\omega'$. Si l'on développe les calculs, elle prend la forme:

$$\begin{aligned}
&\sin^6(\theta-\omega')\\
&+[\operatorname{tang}^2\lambda'(1+\cos 2a)(2-\cos 2a)-\cos^2 2a]\sin^4(\theta-\omega')\\
&+[\operatorname{tang}^2\lambda'(1+3\sin^2 a)-2\cos 2a]\operatorname{tang}^2\lambda'\cos^2 a\sin^2(\theta-\omega')\\
&-\operatorname{tang}^4\lambda'\cos^4 a=0\,,
\end{aligned}$$

équation du troisième degré par rapport à l'inconnue $\sin^2(\theta-\omega')$.

(1) Il n'y a pas lieu de se poser le problème inverse des normopodaires, de même que le § XXIX résont celui des podaires, car il ne serait pas déterminé.

Représentons en abrégé par $f(\lambda')$ la valeur de $\theta - \omega'$ que nous fourniraient les formules classiques de cette résolution, nous aurons

$$\theta = \omega' + f(\lambda'),$$

et en remplaçant dans la formule (194) F par $e^{A\theta}$

$$R' = f_1(\lambda')\, e^{Af(\lambda')} \,.\, e^{A\omega}.$$

On y reconnait l'équation d'une surface nautiloïde dérivée de la même spirale logarithmique que la proposée. Son profil méridien se trouve représenté, dans le plan ZOX ($\omega' = 0$), entre les coordonnées polaires ρ et λ', par l'équation

$$\rho = \frac{f_1(\lambda')\, e^{Af(\lambda')}}{\cos \lambda'}.$$

§ XXX

Surfaces céritoïdes

189. La notion des surfaces nautiloïdes peut sembler, à première vue, comporter une extension, sur la vraie portée de laquelle il ne sera pas inutile de préciser les idées. C'est encore le règne animal qui peut en suggérer la pensée. Les collections paléontologiques présentent en effet, à l'époque tertiaire, et en particulier pour l'étage éocène du calcaire grossier, de nombreux restes du genre cérite (famille des cériticlés) dont le représentant le plus remarquable est le *cerithium giganteum*. C'est un fossile, en forme de cornet, qui montre, dans les grandes lignes de sa structure, les circonvolutions d'une cônhélice, avec amplification progressive de la section génératrice guidée par elle, analogue à celle des nautiloïdes.

On peut donc être porté à voir là une généralisation du mode de description de ces dernières surfaces. Cependant cette manière de voir ne constitue à proprement parler qu'une simple apparence. Il n'y a pas au fond, pour le géomètre, une famille de *surfaces céritoïdes* essentiellement distincte des nautiloïdes. Nous ne sortons pas en réalité de cette dernière classe.

Ce n'est pas à dire cependant que cette considération doive être écartée sans examen, et sans retenir un instant l'attention. La conception et l'appellation des céritoïdes peuvent rendre certains services. Elles sont de nature (à coup sûr pour l'ar-

tiste, et même dans une certaine mesure pour le géomètre), à porter de premier jet plus de clarté dans l'esprit, que la fusion, un peu forcée, des deux classes de surfaces, qu'il nous faut commencer par expliquer.

190. Considérons (fig. 28) dans le plan du premier méridien (1) le profil $C_0 n_0 N_0$, qui engendre un cérítoïde en se réduisant sur lui-même vers le pôle, ou s'amplifiant au contraire dans le sens opposé, autour de son centre de similitude C_0 qui décrit une cônhélice, suivant la loi logarithmique envisagée jusqu'ici. Nous obtenons une série de positions de ce point ...., C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, ..., dans les révolutions successives du méridien mobile.

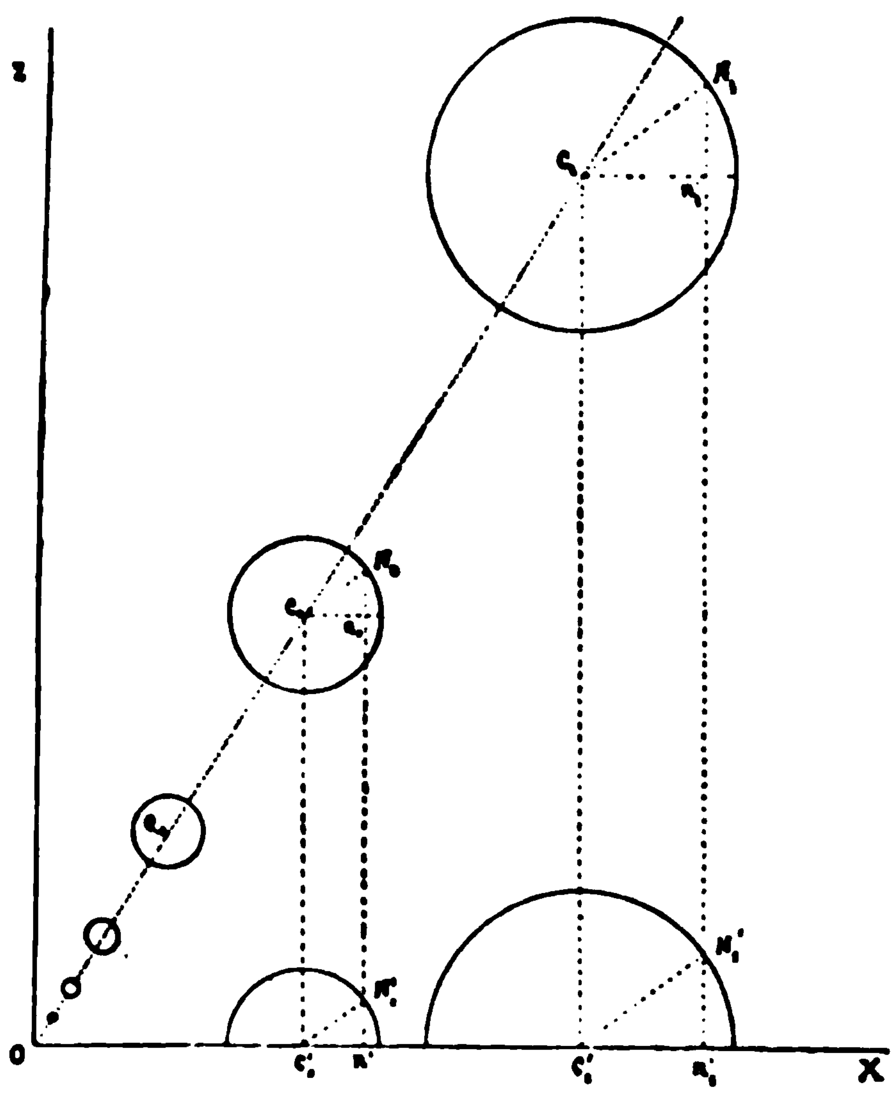


Fig. 28

Rapprochons de cette surface le nautiloïde ordinaire qu'engendrerait, suivant le plan équatorial mené par le sommet O de la cônhélice, une figure $C'_0 n'_0 N'_0$, identique à la précédente, et dont le centre de déformation homothétique C' décrit une spirale logarithmique de même loi amplificative.

Substituons maintenant à la génératrice $C'_0 n'_0 N'_0$ de ce nautiloïde auxiliaire la *génératrice composite* $C'_0 C_0 n_0 N_0$ formée d'un *piédestal* $C'_0 C_0$ surmonté de la figure $C_0 n_0 N_0$ identique à $C'_0 n'_0 N'_0$. Ce piédestal se dilatera pour son propre compte dans le même rapport que les dimensions verticales ou horizontales de l'une et l'autre figure, ou encore que le rayon vecteur OC'_0 de la spirale logarithmique. La surface engendrée par le ***mouvement purement nautiloïde du profil composite à piédestal*** $C'_0 C_0 n_0 N_0$ ne

(1) Il a été expliqué (N° 32) que la génération par une courbe quelconque, plane ou gauche, peut toujours, dans cet ordre de questions, être ramenée à l'emploi d'un profil-méridien.

différera en rien de celle que produit le *mouvement directement céritoïde de la génératrice proposée* $C_0n_0N_0$.

191. Nous pouvons donner à cet aperçu plus de précision, de manière à formuler l'équation générale des surfaces céritoïdes.

Considérons en effet, au bout d'une révolution complète, la section $C'_0n'_0N'_0$ à son retour dans le premier méridien suivant $C'_1n'_1N'_1$. Comparons les, en cet instant, avec la situation céritoïde $C_1n_1N_1$ de $C_0n_0N_0$.

L'ordonnée $N_1n'_1$ d'un point du céritoïde se compose de $N_1N'_1$ et de $N'_1n'_1$. Cette dernière partie constitue l'ordonnée du nautiloïde proprement dit, à savoir (17)

$$N'_1n'_1 = e^{2A\pi} \,.\, \Psi\left(On'_1 \,.\, e^{-2A\pi}\right).$$

Quant au segment $N_1N'_1 = C_1C'_1$ il est égal à la hauteur initiale $h = C'_0C_0$ du piédestal, amplifiée dans le même rapport

$$N_1N'_1 = h \,.\, e^{2A\pi}.$$

Il vient donc pour l'ordonnée z du céritoïde

$$z = N_1n'_1 = e^{2A\pi}\left[h + \Psi\left(Re^{-2A\pi}\right)\right].$$

Le raisonnement que nous venons de faire pour une révolution entière, afin de mieux utiliser la figure tracée dans le premier méridien, convient évidemment à un angle quelconque de rotation ω. Nous aurons donc comme équation générale du céritoïde, en fonction de la hauteur h que possède le piédestal en traversant, pour $\omega = 0$, le premier méridien

$$z = e^{A\omega}\left[h + \Psi\left(Re^{-A\omega}\right)\right].$$

On voit clairement dès lors, qu'il suffit, pour revenir à l'équation des nautiloïdes (17), de considérer comme un unique symbole fonctionnel $\Psi_1(\alpha)$ le binôme $h + \Psi(\alpha)$.

192. On pourrait éprouver quelque surprise, presque une déception, en voyant ainsi s'évanouir, quand on la serre de près, une généralisation qui semblait promettre un intérêt analogue à celui du passage des surfaces de révolution aux hélicoïdes, par l'adjonction au phénomène rotatif de cette même composante de translation suivant l'axe. Mais il est facile de faire ressortir la différence profonde qui sépare ces deux cas.

Dans les surfaces de révolution, toutes les trajectoires sont planes; aucune n'y possède la double courbure. Pour l'hélicoïde, toutes deviennent gauches. Dans les nautiloïdes, au contraire, les trajectoires sont déjà gauches. Ce sont des cônhélices. C'est à titre exceptionnel que les seuls points situés dans l'équateur y parcourent des spirales logarithmiques. Il est donc tout simple que l'adjonction de la composante de translation les dénature au fond beaucoup moins. Ce n'est plus alors qu'une simple question de degré. Cette introduction ne fait que modifier l'angle des cônhélices. C'est comme si les pas de toutes les hélices d'un hélicoïde augmentaient d'une même longueur; on ne sortirait pas par là de la catégorie des hélicoïdes.

Toutefois le point de vue céritoïde, ainsi réduit à sa juste valeur, ne semble pas devoir disparaître du langage des applications. On trouvera toujours plus claire la conception directe du mouvement d'un profil s'élevant en vrille autour d'un axe, que celle de l'adaptation factice à ce profil d'un piédestal pour imprimer à l'ensemble le mouvement nautiloïde plan. Sous cette réserve, cette considération du piédestal est bien cependant la voie à suivre dans chaque cas pour former l'équation de ces surfaces.

193. Je me contenterai à cet égard d'un seul exemple, auquel se rapporte précisément la figure 28, dans laquelle la génératrice est supposée circulaire.

Il suffira pour cela d'employer l'équation de la circonférence dont le centre occupe le sommet du piédestal h. Elle nous est fournie par le triangle OCN, supposé tracé dans un méridien de longitude ω

$$\overline{\mathrm{CN}}^2 = \overline{\mathrm{ON}}^2 + \overline{\mathrm{OC}}^2 - 2\overline{\mathrm{ON}}\,.\,\overline{\mathrm{OC}}\cos\mathrm{NOC}.$$

L'angle NOC est l'excédent $\eta_1 - \lambda$, par rapport à la latitude λ du point N, de l'angle fixe η que fait avec l'équateur OC ([1]). En second lieu, ON représente le rayon vecteur de l'espace $\dfrac{\mathrm{R}}{\cos\lambda}$. On a encore

$$\mathrm{OC} = \frac{\mathrm{OC}'}{\cos\eta} = \frac{e^{\mathrm{A}\omega}}{\cos\eta}.$$

(1) Dans ces conditions, tang η_1 mesure la hauteur h du piédestal au moment où sa projection passe par le point I de la spirale logarithmique directrice.

Enfin CN est le rayon Br, ou $Be^{A\omega}$ de la circonférence génératrice.

Il vient d'après cela

$$B^2e^{2A\omega}=\frac{R^2}{\cos^2\lambda}+\frac{e^{2A\omega}}{\cos^2\eta}-2\frac{R}{\cos\lambda}\cdot\frac{e^{A\omega}}{\cos\eta}\cos(\lambda-\eta),$$

ou en multipliant par $e^{-2A\omega}\cos^2\eta$

$$\left(\frac{Re^{-A\omega}\cos\eta}{\cos\lambda}\right)^2-2\left(\frac{Re^{-A\omega}\cos\eta}{\cos\lambda}\right)\cos(\lambda-\eta)+1-B^2\cos^2\eta=0,$$

et en résolvant:

$$\frac{Re^{-A\omega}\cos\eta}{\cos\lambda}=\cos(\lambda-\eta)\pm\sqrt{\cos^2(\lambda-\eta)+B^2\cos^2\eta-1},$$

c'est-à-dire enfin

$$R=e^{A\omega}\cdot\frac{\cos\lambda}{\cos\eta}\left[\cos(\lambda-\eta)\pm\sqrt{\sin^2 b\cos^2\eta-\sin^2(\lambda-\eta)}\right].$$

Telle est l'équation du céritoïde à front méridien circulaire. On y retrouve, pour l'hypothèse $\eta=0$, l'équation (6) du nautiloïde à front méridien circulaire.

194. La section droite serait déterminée par le plan normal à la cônhélice directrice. Elle se rapprochera d'autant plus d'une forme ronde, que ce plan sera lui-même plus voisin du méridien, c'est-à-dire η de zéro, et a de $\frac{\pi}{2}$; ou enfin que l'on emploiera des spirales et des cônhélices plus lentes.

Pour assurer définitivement à la surface ce que nous avons appelé (N° 101) le caractère des corps arrondis, il faudrait envisager le *sphéro-cérite*, c'est-à-dire la sphérale vectorielle qui a pour directrice une cônhélice. Contentons nous d'en effectuer le calcul pour l'hypothèse équiradiale.

L'équation de la sphère variable

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,$$

se réduit à

$$x^2+y^2+z^2-2(\alpha x+\beta y+\gamma z)=0.$$

On a d'ailleurs

$$\alpha = e^{A\theta} \cos\theta\,, \qquad \beta = e^{A\theta}\sin\theta\,, \qquad \gamma = e^{A\theta}\operatorname{tang}\eta\,,$$

et par suite:

$$\rho^2 - 2e^{A\theta}(x\cos\theta + y\sin\theta + z\operatorname{tang}\eta) = 0\,,$$

$$\frac{\rho^2}{2R} = e^{A\theta}\left[\cos(\theta-\omega) + \operatorname{tang}^2\eta\right].$$

La dérivée de cette équation par rapport à θ nous donne

$$Ae^{A\theta}\left[\cos(\theta-\omega) + \operatorname{tang}^2\eta\right] - e^{A\theta}\sin(\theta-\omega) = 0\,.$$

Mais on tire de la précédente

$$\cos(\theta-\omega) = \frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}} - \operatorname{tang}^2\eta\,,$$

d'oú en substituant ici

(196) $$\sin(\theta-\omega) = A\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}}\,.$$

Il vient donc en ajoutant les carrés

$$A^2\left(\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}}\right)^2 + \left(\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}} - \operatorname{tang}^2\eta\right)^2 = 1\,,$$

$$\frac{1}{\sin^2 a}\left(\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}}\right)^2 - 2\operatorname{tang}^2\eta\left(\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}}\right) + \operatorname{tang}^4\eta - 1 = 0\,,$$

$$\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}} = \sin^2 a\left[\operatorname{tang}^2\eta \pm \sqrt{\operatorname{tang}^4\eta - \sin^2 a(\operatorname{tang}^4\eta - 1)}\right],$$

et enfin

(197) $$\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}} = C\,,$$

si nous représentons pour abréger par C la valeur constante

$$C = \sin a\left(\sin a\operatorname{tang}^2\eta \pm \sqrt{1-\cos^2 a\operatorname{tang}^4\eta}\right).$$

En substituant dans la relation (196), il nous vient

$$\sin(\theta-\omega) = AC\,, \qquad \theta = \omega + \operatorname{arc}\sin AC\,,$$

et d'autre part (197)

$$e^{A\theta} = \frac{1}{2C} \cdot \frac{\rho^2}{R} = \frac{1}{2C} \cdot \frac{R}{\cos^2 \lambda},$$

d'où en remettant cette valeur de θ

$$R = 2C \cos^2 \lambda \,.\, e^{A\,(\omega + \text{arc sin AC})}.$$

Lorsque l'on suppose $\eta = 0$, la constante C se réduit à $\sin a$; AC à $\cos a$; arc sin AC à $\frac{\pi}{2} - a$. Il vient dès lors simplement

$$R = 2 \sin a \cos^2 \lambda \,.\, e^{A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)},$$

et l'on retrouve l'équation (146) du sphéro-nautile équiradial.

195. Terminons cette longue étude par la propriété suivante. *La surface réciproque d'un sphéro-cérite vectoriel quelconque par rapport à son pôle est un sphéro-cérite égal, mais de sens interverti.*

Appliquons en effet le théorème fondamental du N° 116. La réciproque de la cônhélice directrice sera une cônhélice symétrique, puisque ce mode de transformation conserve les angles. La nouvelle directrice, qui doit lui être semblable, sera donc une cônhélice identique à celle-ci, mais déviée sur son cône. Quant au rapport vectoriel, on sait qu'il est conservé sans altération.

Plus généralement, enveloppons le plan d'une spirale logarithmique sur un cône quelconque, (et non plus de révolution), ayant son sommet au pôle de cette courbe. Traçons sur ce cône la transformée par rayons vecteurs réciproques de la ligne gauche ainsi obtenue, puis une ligne homothétique de celle-ci. Enfin développons la surface conique. Cette dernière courbe se transformera en une nouvelle spirale logarithmique égale à la première, mais de sens contraire. En effet l'enroulement, la transformation, l'homothétie, le déroulement constituent quatre opérations qui conservent les angles. Celui de la courbe avec son rayon vecteur doit donc rester constant.

Construisons maintenant, pour les deux lignes coniques comme directrices, avec un même module vectoriel, deux sphérales. Ces deux surfaces, d'après le théorème fondamental (N° 116) seront les transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques. La proposition précédente n'est donc plus qu'un cas particulier de celle-ci, relatif au cône de révolution.

SURVIVANCES DU RÉGIME COMMUNAUTAIRE EN PORTUGAL

(Abrégé d'une monographie inédite)

PAR

A. A. DA ROCHA PEIXOTO

**Membre correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Lisbonne,
Aide-Naturaliste à l'Académie Polytechnique de Porto,
Rédacteur en chef de la *Portugalia***

Il subsiste encore en Portugal, comme en d'autres pays européens, de nombreux vestiges du régime agraire communaliste. C'est principalement dans la *Serra* (la Montagne) — car, dans la *Ribeira* (la Plaine) il ne s'est perpétué que des résidus fractionnés et dilués — que la possession individuelle, exclusive et héreditaire du sol coexiste avec le domaine collectif d'une ou plusieurs zones territoriales, et, intermédiairement, avec les autres formes de transition évolutive depuis le régime pastoral jusqu'à la libre et pleine propriété.

Une grande partie des dizaines de milliers d'hectares de terre portugaise en friche est soumise à l'*administration légale* des «juntes» paroissiales. Mais en fait, tout ce qui se rapporte soit à la jouissance, soit au mode de tirer parti des terres incultes est soumis à la délibération, non des «juntes» ni d'autres pouvoirs hiérarchiques, mais bien aux suffrages des assemblées de tous les intéressés. Les terres en friches ne produisent guère que des pâturages, des bruyères et des bois à brûler, ceux-là mis à profit indistinctement par tous les habitants de l'endroit possesseurs de bétail, et les produits forestiers répartis proportionnellement entre tous les feux. Il arrive donc que, si des raisons de convenance collective le conseillent, l'assemblée des

voisins décide la prohibition du droit de pâturage, des émondes et tailles sur certaines surfaces déterminées, lesquelles, sous ce régime éphémère, sont appelées, dans le *Barroso*, *«coutados»*. Sans égard ni observance des formules établies, certaines étendues de terres incultes ont été vendues, et le produit destiné à des dépenses d'intérêt commun, par exemple la réparation de l'église principale ou d'une chapelle, la construction d'un lavoir, la restauration d'un moulin ou d'un four banal, l'exploitation des eaux pour les fontaines publiques, l'établissement d'un cimetière. Cependant la désamortisation en masse des biens communaux n'a pas été tentée et ne le sera pas, par suite de l'impossibilité où sont les peuples de renoncer à des droits traditionnellement communautaires et intrinsèquement dictés par des circonstances orographiques, climatiques et économiques. Ce n'est que temporairement que l'on tolère ou que l'on permet, à des habitants indigents ou dont la moisson est insuffisante, la culture accidentelle ou transitoire de petits lots des terres en friches collectives, qui sont alors labourés, puis *queimados* (brûlés) et ensuite semés en seigle, la récolte de cette céréale retournant ultérieurement au régime commun. Du reste, la collectivité y trouve profit, puisque non seulement la production céréalifère s'accroît, mais les terrains ainsi mis en valeur fournissent ensuite de meilleurs prés et des bruyères plus abondantes.

Ces notions générales données, il convient maintenant de spécifier, sans entrer pourtant dans de trop grands détails, (que n'admettraient pas les limites de cette brève étude) quelques aspects de ce régime de communauté survivant, lequel réside principalement dans la possession collective du terroir, dans la répartition équitable du bien commun et dans les formes selon lesquelles il est mis à profit ou cultivé.

A Pitões, déjà sur la lisière du plateau de Barroso et en face du massif du Gerez, les terres de propriété individuelle sont insuffisantes pour la production céréalifère nécessaire. Il faut donc approprier, des terres en friches, la superficie complémentaire. A cette fin la population se réunit en novembre, discutant et convenant quel terrain il faut choisir pour les *cavadas* (labours), attendu que, tous les ans, et par suite de la faible fertilité régionale, la rotation des cultures s'impose de rigueur. Après le choix du local par l'assemblée, le peuple procède à la démarcation des glèbes qui reviendront à chacun, et l'on commence la distribution des lots par l'habitant de l'une des extrémités du village. Toutefois, on procède d'abord au choix de la *cavada* de l'église, c'est-à-dire, du terrain qui lui sera destiné,

et il convient que tous, et jusqu'au bout, travaillent dans cette part dont le produit intégral est destiné *para Deus* (à Dieu). Ceci rappelle la coutume hellénique, puis romaine, de la division de la terre en lots pour la fondation d'une cité, la distribution ne se faisant qu'après que l'on avait mis à part les lots attribués aux divinités. (DAREMBERG & SAGLIO).

Le labour effectué, et comme on n'a rien à craindre du bétail jusqu'en mai, la zone n'a pas besoin de garde. Mais quand survient la *ferranha,* c'est-à-dire quand les graminées fructifient, nouvelle réunion du peuple afin d'ouïr les propositions ayant trait à la garde des défrichements. Pour empêcher les animaux de détruire les cultures, on adjuge la surveillance à celui qui s'offre moyennant le plus petit nombre de boisseaux du produit, lequel est responsable, jusqu'au temps de la moisson, des préjudices occasionnés par les bestiaux.

La moisson se réalise selon le bon plaisir de chacun, mais pourtant à des jours assez rapprochés.

Néanmoins le charroi ou *carreja*, c'est-à dire le transport de la récolte à domicile, est marqué pour tous et en un jour fixé par tous. Pour la raison suivante: avant le charroi, il faut vérifier le produit, ce dont se chargent le gardien et deux voisins; tout le monde a donc, dans son lot, disposé le seigle en *pousadas,* chacune d'elles présentant cinq gerbes de récolte; et comme le nombre de boisseaux pour lequel a été adjugée la garde doit être proportionnellement réparti, il convient de vérifier, équitablement, ce que chacun a effectivement retiré. DE JUBAINVILLE parle d'une analogie lointaine tirée d'un texte archaïque, rapportant que les vaccaei, peuple celtibère établi dans le bassin du Douro et occupant une partie de l'ancien royaume de Léon, partageaient tous les ans la terre arable, et distribuaient malgré tout, en parts égales et après la moisson, le produit effectif de la récolte.

Comme l'ancien germain dont parle Tacite, l'homme ne possède pas la terre: il n'a la propriété que de ce qu'elle donne. (FUSTEL DE COULANGES.)

Sur le versant «transmontain» du Marão certaines localités réunies en *chamados,* qui sont les assemblées locales, délibèrent sur les lots à diviser dans la terre en friche sur lesquels on ira chercher, pour la saison, le genêt indispensable au fumier. On discute d'abord: le terrain est maigre en genêts; ceux-ci sont encore trop jeunes. Mais une fois fixée la zône choisie par la majorité, on marque le jour de l'*affazer* (travail). Quant à la division, dans certains endroits elle se fait en proportion des biens du cultivateur, car celui qui possède le plus a le plus

besoin de fumier pour ses champs; dans d'autres, les lots sont répartis également.

Au jour marqué tous les hommes du village vont à la montagne, où s'effectue, au cordeau, le mesurage du polygone choisi. Une fois la superficie délimitée, soit, par exemple, un rectangle, sur l'un des côtés se placent, avec leurs houes, les représentants des ménages; du côté opposé un autre homme, considéré et expérimenté, vérifie si les habitants sont bien placés; il les fait s'eloigner ou se rapprocher, s'il est nécessaire, pour que la distribution soit juste. Jusqu'au moment où, la jugeant exacte, il crie à haute voix: *Bem está!* (C'est bien) — et tous, comme un seul homme, donnent un coup de houe en terre. En grand cela ressemble à une ligne pointillée; et chaque «point» marque l'extrémité des lots. Le tirage au sort, qui suit, se fait en écrivant tous les noms sur des bulletins qu'un enfant tire successivement. Au premier nom revient le premier lot et ainsi de suite, tous et chacun respectant ce que le sort a décidé.

Pareillement, dans certaines communes belges des Ardennes, le terroir collectif est divisé annuellement en autant de parcelles qu'il y a de ménages. Une fois tirées au sort, chacun alors nettoie, *brûle*, fume et sème. En certaines localités le *maire*, avec des arpenteurs jurés, apporte le cordeau, le *reeb* germain, qui est destiné aussi à effectuer les démarcations. (Laveleye).

Ces assemblées populaires et locales, qui tombent rapidement en désuétude, et surtout aux basses altitudes, impriment au début tout leur caractère aux vestiges de mode de vie communaliste. Dans le vaste pays plat de St. Vincent (*Chã de S. Vicente*), dans la Serra das Alturas, et les autres localités des «Terres de Barroso», les *coutos*, ou réunions des agrégats communaux, ont lieu, d'ordinaire, dans la maison du four banal, sur une place, sur le parvis, près de la croix et, en général, après la messe. A l'avance, et en règle générale, deux ou trois hommes préviennent les habitants, sous la détermination préable du *regedor* (1), annonçant de nouveau, le jour même, à son de trompe ou de corne, l'approche de l'assemblée. C'est alors que se résolvent les réformes et réparations, et encore, en partie, que se rend la justice, soit sur des plaintes au sujet de terrains communs indûment absorbés par autrui, soit au sujet de l'irruption du bétail dans le domaine privé des réclamants.

---

(1) Autorité de la commune qui correspond, à peu près, au maire.

Deux arbitres, nommés aussitôt, enquêtent et, dans le dernier cas, signalent le préjudice, fixant l'indemnité. Et celle-ci est payée sans réserves, vu que, à son tour, le délinquant pourra aussi *réclamer justice.*

Si la population désire unanimement une amélioration d'intérêt général, l'assemblée décide, établissant les charges compatibles. Le hameau de Villarinho avait son siège paroissial à Negrões et il désirait vivement une chapelle qui lui eût évité la course dominicale. On décida l'édification, et certains habitants eurent à s'acquitter, en proportion de leurs moyens, du transport des matériaux de construction; d'autres durent s'acquitter, toujours équitablement, de la fourniture des chaumes pour le toit; l'argent nécessaire au payement des maçons fut *réparti* parmi les autres; et finalement chacun nourrissait et logeait les artisans, à la journée, sans qu'on perdît de vue, bien entendu, les capacités individuelles de l'hôte. Enfin et pour tant de messes annuelles, tant d'habitants auraient à payer un nombre égal de boisseaux, la charge passant à d'autres l'année suivante, puis à d'autres, et ainsi de suite, *andando á roda* (à tour de rôle).

Dans les localités des bords des Serras da Nogueira, de Bornes et à Montesinho, les *conselhos* (assemblées) sont déterminés par les *regedores,* sollicités au préalable par les *homens do accordo* (les notables); les sessions sont annoncées à son de cloche à l'église, à la prison, ou à son de crécelle. Les voisins des hameaux étant réunis, ils prennent connaissance de l'époque des contributions, de la vaccine projetée et nécessaire des bestiaux, des réparations à faire aux chemins et aux fontaines; on frappait d'une amende les propriétaires des animaux qui causaient des dégâts dans les *coutados* (terrains défendus) et l'on notait les absents sans motif valable pour leur imposer une amende au bénéfice de ceux qui étaient présents et travaillaient. L'habitant chargé des avis jouissait de privilèges compensateurs: il n'apportait pas son aide aux réparations, il ne pouvait être chargé des arrestations, il ne fournissait pas le logement aux troupes...

Les *conselhos* de la Terra de Miranda, qui se tenaient aussi après la messe conventuelle, décidaient non seulement des réparations et des *coutarias*, des près et des bois, mais également de la culture des biens des saints. Certains, effectivement, possèdent des prairies et d'autres terres: Notre Dame du Naso est propriétaire à Povoa; le Saint-Sacrement est propriétaire à Villa Chã; les Ames du purgatoire, ici et à Palaçoulo. Les frais de culture de ces terres sont communales; et si le saint ne pos-

sède rien, on choisit alors, dans le terrain en friche, quelques *belgas* (glèbes) pour la moisson, comme à Cercio, destinées à Notre Seigneur J.-C. Tout le monde travaille avec ardeur, pour le culte et pour la fête.

Les mêmes motifs, la répartition des eaux, les semailles, les réparations à l'église, la susbtitution du taureau local forcent aux *ajuntos* du Minho, assemblées pareilles annoncées préalablement, à Soajo, à Parada do Monte et à Cidadelhe au son de la *carrapita* (buccin, le *Triton nodiferus,* Lamk.). C'est encore avec cette trompe que l'on notifie les réunions aux gens de Germil et de l'Ermida, de la Serra da Amarella; le *regedor* et ses auxiliaires y assistent, et pour harmoniser les intéressés dans la liquidation des litiges, se trouvent les six notables les plus respectés, qui sont les *homens do accordo.* Ceux qui manquent payent une amende, opportunément applicable en messes à St. Roch, pour que ce dernier protège le *vivo,* c'est-à-dire le bétail, ou à d'autres dépenses collectives nécessaires. Même un juge nommé tout exprès recueille l'argent, auquel s'ajoute le produit du charbon fabriqué par la commune. Et indépendamment des assemblées régulières, d'autres extraordinaires réunissent, par aventure, les voisins: les incendies, relativement fréquents dans la montagne, provoquent toujours une réunion à une heure avancée de la nuit; tout le monde marche pour les dominer, pour la préservation des *rouços* (bruyères), des ruchers et des bestiaux.

A Lindoso les réunions sont encores nombreuses, les débats opiniâtres, les sessions lentes et parfois prorogées. Au son de la *corna,* qui est le buccin appelé aussi dans d'autres endroits le *carrapito,* les habitants sont prévenus. De chaque ménage assiste une personne sous peine, en cas d'absence non légitime, de la traditionnelle amende; mais si le sujet à discuter est capitale la famille tout entière se présente. Les semailles des seigles et des maïs, la garde des raisins par échelle et la vendange générale sont, comme les autres affaires déjà connues, des motifs de considérations et de décisions communautaires. Cependant l'un des plus importants est le congrès où l'on fixe les deux jours de la fauchaison. Le délai est court car les lots ou *cabeceiros* étant petits et, à l'intérieur du terrain, unis les uns aux autres, si on isolait les moissons, les récoltes des *pães* (céréales) limitrophes seraient foulées et gâtées.

Les opinions sont divisées: les uns jugent que la récolte n'est pas mûre à point; les autres, par précaution, ont cueilli dans le champ plusieurs épis, sur la mâturation des quels ils fondent leur assertion. Le débat se poursuit, les groupes se sépa-

rent, mais la majorité l'emporte, les récalcitrants finissant par tomber d'accord. Le laps de temps fixé, on fauche, jusqu'à midi de la 1ère journée, le seigle; le soir, on laboure et on met à terre le maïs; le lendemain le labour continue; et enfin on transporte les seigles dans les granges. Pour que tout le monde se rende au travail, et à la même heure, la corne sonne; si quelqu'un commence plus tôt, il doit payer une amende et une forte amende; pour terminer le travail autre son de corne; et si quelqu'un se retarde, nouvelle amende.

Depuis des temps lointains et imprécis ce sont des règlements qui, dans les diverses localités du Gerez, statuent sur les pâturages et, accessoirement, établissent encore les lois sur les autres aspects du communisme silvicole et agraire. Quelques uns de ces diplômes, fort intéressants, ayant des siècles d'anticipation sur des institutions toutes nouvelles qui, en partie et sans le savoir, tentent de se rapprocher d'eux, ont été publiés intégralement depuis peu dans le seconde tome de la *Portugalia* (Porto, 1907), et se rapportent à Villarinho da Furna, Covide, Rio Caldo et Villar da Veiga. Mais comme l'occasion n'est pas propre à des commentaires détaillés, il suffit de noter que les *concelhos* municipaux ont transformé une partie de ces conventions en ordonnances municipales, de même que les *homens do accordo*, ou les *seis da fala* sont devenus, en général, le *regedor* et d'autres personnes parmis les plus pondérées et les plus expérimentées. L'adaptation aux circonstances actuelles, avec les sophismes obligés, est rappelée par notre paganisme populaire avec les apparences chrétiennes.

Les réunions se font, à S. João do Campo, par exemple, avec une parfaite régularité; une personne de chaque maison y assiste; les femmes qui, n'ayant pas de mari, possèdent *fazenda*, c'est-à-dire du bétail, y participent; on met à l'amende les absents, la peine étant aggravée en cas de récidive; on discute les réparations, les moissons, le battage sur *a eira commum* (l'aire banale) et principalment le pâturage à l'intérieur du périmètre alpestre; et en dernière instance les *homens do accordo* décident. Dans les assemblées on impose les amendes à ceux qui ne montent pas dans la montagne à leur tour, à ceux qui conduisent le troupeau général dans des endroits non désignés, à ceux qui indûment auraient défriché des bois. S'il survenait des divergences ou consultait les *escripturas* (règlements) anciennes — et réellement, en général, elles prévoyaient tout; et si un abus était d'importance le *juiz* (juge) ou président interrogeait sur la pratique du délit, l'accusé s'avançait en se découvrant et en expliquant les faits, les *homens do accordo* délibéraient et indi-

quaient au juge s'il devait ou condamner, ou absoudre. Si le produit des amendes, des aumônes et des offrandes se trouvait insuffisant pour les solemnités èt les réparations, on convoquait une assemblée pour que tout le monde allât faire du charbon, afin d'obtenir, par la vente à la *Ribeira*, l'argent qui manquait.

La résistance d'une telle solidarité, le Gouvernement Portugais l'a rencontrée quand le Gerez, il y a vints ans, est entré dans le régime forestier. C'est à Villar da Veiga que commença la réaction, s'étendant à S. João do Campo, Covide et Rio Caldo; tous marchent et on démolit les ponts et travaux publics, afin de démontrer de cette manière la traditionnelle possession inaliènable et imprescriptible de ce que l'on voulait leur usurper. De nuit divers émissaires parcourraient les paroisses, surveillant les étables pour voir si on les avait détruites ou altérées. Le peuple de Furna ayant même décidé, dans une convocation, que, en guise de protestation, personne ne travaillerait dans les forêts de l'État, un des habitants rompit le pacte et tous rouèrent de coups le malheureux! Tous: pour que l'on ne pût mettre sur personne une responsabilité individuelle (Tude de Souza, in *Portugalia*).

C'est l'État qui céda. En garantissant la liberté des pâturages et des bois, l'antiquité juridique d'un droit original se trouvait implicitement reconnue.

Il serait très facile de rapprocher beaucoup de cas similaires, en les cherchant dans les Asturies, le Léon, la Catalogne et l'Andalousie (Altamira, Costa, Lezon, etc.). En diverses localités de l' Italie également, où subsistent les assemblées et le même régime, les biens des communes sont gérés par des conseils identiques, *Consiglio di vicini*, et l'harmonie des intérêts des familles avec ceux de la communauté est parfaite. (Laveleye). Dans les Pyrénées, pour ne rappeller qu'un cas en France, c'est dans les assemblées populaires que se discutent et se résolvent toutes les affaires locales et même, avec équité, que se répartissent les impôts. (Taine).

Le développement de cet aperçu, inexécutable dans les limites imposées à cet écrit, sera réalisé opportunement avec de nombreux détails comparatifs et inédits. Mais pour une meilleure connaissance élémentaire des restes d'un régime social archaïque, il convient de faire encore allusion à certains aspects supplémentaires et dérivés. L'un deux, certainement, est celui qui concerne les *vezeiras*, c'est-à-dire les réunions du bétail local que l'on mène paître sous la garde d'un montagnard. A Campo do Gerez, comme dans toutes les autres localités de la montagne, les bêtes à cornes paissent sur la montagne de mai à la

St. Michel; c'est ce que déterminent les *escripturas* consuétudinaires. Cependant il y a l'*ajunto;* et pour commencer, le pasteur va chaque jour sur la hauteur. Dans les premiers temps les vaches vont à Leonte; à la St. Jean elles changent pour le Telheirão; à la fauchaison elles descendent au village, puis retournent au Prado. Les vaches de Villarinho da Furna, pour ne plus donner qu'un exemple, vont en troupeau à Abegoaria, près de Portela do Homem; à la St. Jean elles sont détachées pour le Vidoal, à Amarella, et aussi pour Chão da Fonte; puis elles descendent à Ramisquedo et, vers le mois de septembre, retournent encore à Abegoaria. La fin du pâturage et le *fresco* (fraîcheur) du temps expliquaient les mutations. (Voir aussi Alberto Sampaio, in *Portugalia,* t. I).

A Covide — pour montrer combien l'échelle de garde est équitable — celui qui a deux vaches prend son tour une fois par ronde et se repose l'autre; celui qui en a quatre, prend son tour dans chaque ronde; celui qui en a six est de garde deux jours dans une ronde et un jour dans la suivante; celui qui a huit vaches, est de garde deux jours à chaque ronde, etc. Le pâtre, avant de recevoir les vaches, les compte toutes; si l'une d'elles manque, c'est son prédécesseur qui la cherche. Ce dernier donne à souper à son remplaçant, comme l'ordonne la *escriptura.*

Les gens de Lindoso, qui parfois laissent les vaches paître sans berger, quand ils décident de former la *vezeira* commencent le tour de garde par l'habitant *d'uma ponta* (de l'un des bouts) du village. Sur les hauteurs il y a des *curros* fixes, *paúlos* ou *terrões,* c'est-à-dire des terrains clos où l'on enferme le bétail, et une hutte où le pasteur dort et fait sa cuisine. La hutte est ronde et pointue, le lit est de fougère et de bruyère, et les étables, dont il y a plusieurs, ainsi que les *cercados* (enclos), appartiennent aux gens *avezeirados* (associés).

Pour les troupeaux du plateau *barrosão* chaque propriétaire passe autant de jours sur la montagne qu'il possède de paires de vaches. La dernière nuit il passe la garde à son successeur mais reste avec lui, ne se retirant que le matin. Ils procèdent tous deux au comptage des têtes: si quelqu'une manque durant la nuit qu'ils passent réunis, ils la payent tous deux; si c'est le jour, quand le pâtre est seul, c'est lui qui la paye; si c'est le loup qui la mange sans que le pâtre l'ait vu, il paye également; s'il l'a vu, il ne paye rien..... et autres règles qu'il serait oiseux de préciser maintenant. Également à Tourém, autre localité *barrosã* mais frontière, le troupeau est gardé par tous, chacun devant autant de jours de garde qu'il possède de

paires de bêtes. La garde commence par un habitant de l'extrémité de la paroisse, et ce dernier, au retour, passe le tour à son voisin.

Ce régime pastoral s'applique aux veaux, aux chèvres, aux *chibarros* ou *reichêlos* (boucs), aux brebis et aux *marranchos* (porcs). Selon les zones, cependant, le pourcentage de têtes qui détermine les jours d'occupation de chacun varie. Ainsi, à Campo do Gérez, pour chaque dix brebis, dix chèvres ou dix boucs, c'est un jour de garde; et déjà à Covide, un peu plus bas, la même période se détermine pour qui a 20 têtes de chèvres. A Córtinhas de Brufe et à Cutéllo, à Amarella, le troupeau de chèvres est de quarante et de vingt par journée de garde; et à Soajo chaque montagnard ne prend son tour qu'une fois, qu'il ait peu ou beaucoup de bétail.

Dans la Serra do Extremo le régime est mixte: il existe la *vezía* (réunion du bétail local) pour le *vivo* du mont, chèvres et moutons, les bêtes se réunissant au son matinal du buccin; chaque propriétaire est de garde pendant un nombre de jours porportionnel à la quantité de têtes qu'il possède. Mais il arrive aussi que certains laboureurs font paître leur bétail sous la garde de leurs valets.

A Cabreira montent les troupeaux de chèvres de St. Vicente de Campos et de Zebral, à raison de vingt et dix par journée respectivement. Celui de Zebral est si vaste que parfois il *couvre le soleil;* et par suite le tour se prend non par homme mais par maison, de sorte que trois et quatre personnes de la famille suivent les bêtes. Sur les mêmes monts, mais non si haut, se dirigent également les troupeaux de brebis de Ruivães.

Cette garde des troupeaux diverge clairement de ce qui se pratique pour les vaches. Les chèvres ou brebis montent le matin, après l'appel à son de trompe ou par la voix du pâtre qui passe pour inviter à *deitar a fazenda* (lacher le bétail). Avec son bissac, *sacola, taleiga* ou *surrão* où il emporte sa nourriture pour la journée et le baton ou la houlette, le pâtre marche derrière le bétail, réuni d'abord à l'une des extrémités du village. Toutes les bêtes se distinguent par des marques sur les oreilles, les cornes ou les cuisses. Elles paissent pendant le jour, les chèvres plus haut que les bêtes à laine. Et à la brune elles retournent aux parcs sans qu'il soit besoin que les conducteurs du troupeau leur désignent les bergeries. Les chèvres regardent vaguement avec curiosité et avec douceur; mais leurs physionomies, tristes et résignées, sont intelligentes (Taine).

Une apparente divergence égalise pourtant plus encore le régime montagnard des pâturages. A Alhões, dans la Serra de

Montemuro, les bêtes sont toujours *em vigia* (sous garde), sauf s'il y a de la neige ou du mauvais temps. Celui qui a vingt bêtes va une journée tous les dix jours; et celui qui en possède vingt-quatre va une journée tous les cinq jours; s'il est indigent, n'en comptant à peine que six, son tour arrive tous les dix-huit jours; et l'espace est de trente-six, si le misérable n'en a que trois. Toutes les bêtes sont divisées en groupes ou *vigieiros;* l'on en compte neuf dans la localité. L'inventaire se fait deux fois par an: à la tonte et à la St. Michel; et pour la surveillance et la division équitable, il y a même des procès-verbaux.

Déjà le bétail de la Gralheira n'a pas de surveillance. Chacun s'occupe de son bétail sur une partie du terrain en friches. Mais une autre portion importante est louée par le peuple, pendant deux mois, aux pasteurs venus du côté de l'Estrella et environs, de Nellas et de Casal Sancho, de Santa Comba et de Canas de Senhorim. C'est la transhumance, derniers et éternels vestiges de l'Age reculé de la Terre vague — puisque «au début la terre n'était à personne» (Oliveira Martins). Cependant les pasteurs paient à la paroisse une somme stipulée d'avance, bien que le plus grand avantage pour le montagnard soit encore la fumure que les ovidés transhumants laissent sur le local.

Dans l'Extremo également tous ceux qui possèdent des juments se forment en une association qui entretient l'étalon; celui-ci est logé et nourri, chez chaque sociétaire, un nombre de jours proportionel aux biens de l'hôte en bêtes chevalines.

Enfin, un régime similaire appliqué aux porcs tend à prendre fin dans le Traz-os-Montes. A peine dans quelques localités subsiste l'usage d'envoyer quotidiennement dans certains champs les troupeaux de porcs locaux, mais conduits par un *pòrqueiro* (porcher) mercenaire, aussi appelé, comme un vestige de l'antique usance, le *vizeireiro.*

Pour les chèvres et les porcs à l'engrais telles sont encore les coutumes en vigueur dans certaines régions des Appennins (Laveleye). Et dans la montagne française, le même régime et les mêmes époques marquent l'état d'identiques collectivités pastorales (Baudrillart).

Or, les vaches constituant la principale richesse mobilière des hauteurs, — en bouvillons, en lait, en travail et en partie des engrais — le montagnard ne manquerait pas de prendre d'efficaces mesures, et dans le même esprit communiste, sur un certain élément essentiel pour la production des bêtes d'élévage. Il y a donc le taureau ou les deux *taureaux du peuple.* Dans une réunion, la vente de celui qui existait étant résolue,

on décide l'acquisition du remplaçant, que l'on obtient par une imposition qui retombe sur tout le monde, mais dans la proportion des vaches que possède chaque habitant de la montagne. Dans les villages des *concelhos* de Montalegre et de Boticas, presque en totalité *barrosãs*, il existe, fréquemment déjà, une étable, une prairie — *lamas do touro* — et un grenier à foin. Chacun fournit le foin, ayant en vue, pour la quantité à fournir, le nombre de têtes possédées. Et ou bien les hommes de la commune, à tour de rôle, vont chaque jour faire prendre l'air au taureau, ou bien quelqu'un se charge de le mener paître dans son pré particulier, en échange des engrais ou d'autres privilèges. Néanmoins, il existe des localités où il n'y a point d'étable pour le taureau du peuple. Il est donc hébergé dans l'étable de chaque ménage autant de jours que l'on y compte de paires de vaches.

A Covide et dans la Carvalheira, qui est encore dans le cercle du Gérez, on suit pour les taureaux le même régime *barrosão;* et à Campo, de mai à septembre, il va à la montagne, avec les vaches, passant en hiver dans la ferme de chaque voisin autant de jours que le logeur possède de bêtes à cornes. Ce dernier lui fournit à déjeûner, l'envoie ensuite avec quelqu'un de la maison passer la journée dans une *bouça do povo* (friche du peuple) et le soir lui donne le souper. Mais à Cutèllo chaque montagnard l'entretient une année. Se l'animal meurt ou s'il faut le vendre, comme le produit ne serait pas suffisant, on impose le peuple en proportionnant la contribution à ses biens en bêtes à cornes.

La coutume va se perdant et en maintes localités on ne s'occupe déjà plus du taureau reproducteur, comme à Castro Laboreiro et à Miranda do Douro. Dans cette dernière commune il a même existé autrefois, comme en d'autres villages transmontains, le *berrão* (le verrat) du peuple. Aujourd'hui, ou c'est un propriétaire qui prête le taureau ou l'on paye en nature ou en argent la saillie. Et c'est ainsi avec les temps que tombera dans l'oubli cet admirable concert des populations pour l'acquisition de cet indispensable coopérateur de leur fortune, tirant de la terre elle-même presque épuisée les moyens de réaliser le dit achat: à Germil, c'était souvent avec le *charbon du peuple* que le nouveau taureau entrait dans la localité.

Ce charbon de la commune, au quel parfois il a été fait allusion, pourvoit à bien des déboursés: solemnités religieuses, cire pour l'église, travaux locaux, tributs. Quand l'un quelconque de ces besoins publics l'exige, on convoque une assemblée et l'on distribue les terrains à *brûler*, à Amarella, trois par trois,

et l'on stipule que chacun devra présenter au *juiz* (président de confrérie) de l'église, par exemple, un panier de combustible. Le peuple se rend alors à la *coutada* (bois) et effectue la *queimada* (incendie) ou *estórgada*, de sorte à obtenir une denrée de vente ou d'échange qui, en règle générale, suffit à couvrir le besoin urgent. Du reste, et dans la terre vague non prohibée, chacun peut fabriquer du charbon pour son propre compte, le vendre pour sa gouverne, ou, comme cela se passe parmi diverses populations de Castro Laboreiro, aller l'échanger en Galice, et même en Portugal, par d'autres denrées. Pour soi-même le montagnard n'a pas besoin de bois transformé: les bois sont distribués en nature et proportionnellement après une réunion qui, à Tourém, est convoquée à son de cloche et s'effectue sous le branchage d'un châtaignier. Puis on répartit avec équité le genêt sauvage, la bruyère et le chêne.

La permanente et impérieuse nécessité des irrigations, ou pour les récoltes de mai à fin août, ou pour les pâturages, détermine, outre d'ingénieuses machines d'hydraulique agricole populaire, dont on parlera opportunement, le même esprit communiste pour la division des eaux de jouissance commune. Tous les habitants les utilisent et font leurs dérivations des sources et fontaines situées sur la hauteur, dérivant tumultuairement par les ravins et les sillons. Mais, lorsqu'approche l'époque de l'irrigation forcée, la convocation a lieu et alors dans l'assemblée on résout les désobstructions, les captations, les *guias* (directions), les déviations nécessaires, le temps d'irrigation étant réglé par heures, demi-journées et journées proportionnellement aux besoins de chacun. Le régime des *poçadas* (1) ou *poças*, dans le Gerez, est encore en vigueur selon les préceptes des ancêtres, fidèlement respectés et suivis. Et parallèlement apparaissent, encore comme des vestiges manifestes, les *poças* de groupes d'héritiers, l'irrigation de *torna e torna* (2), etc.

Avec le régime hydrographique se trouve naturellement liée la mouture. Montesinho possède, par exemple, deux moulins du peuple. N'importe qui mout dans l'un d'eux, lequel en hiver est, manifestement, suffisant pour tout le monde. En été une combinaison, jamais méprisée, régle les intérêts individuels. Cependant, dans d'autres localités les moulins appartiennent à des groupes d'héritiers. A S. João do Campo celui qui existe

(1) Sources que l'on empêche de couler au moyen d'un petit mur.

(2) Eau publique avec laquelle arrose celui qui arrive le premier, et dès qu'il se retire, un autre la détourne dans son champ.

appartient à dix-huit; néanmoins, dans la transition, le régime communal est encore partiellement en vigueur; l'on procède dans le groupe à l'*encaminhar das aguas* (acheminement des eaux), au *picar das mós* (repiquer les meules) et à d'autres réparations comme on effectuerait les labours dans la communauté primitive. On tire au sort pour le tour. Et comme dans ce cas encore les temps sont égaux, la régularisation du service se limite à l'ordre des successeurs.

Logiquement, au moulin commun est lié le *four du peuple*, si fréquent encore sur le plateau *barrosão*. Comme il appartient à tous, ses améliorations et ses réparations sont proportionnés aux biens des participants, selon l'unité fondamentale et régulatrice de la vache — comme dans les communautés agraires primitives, germaniques, italo-grecques et autres (LAVELEYE).

Dans ce four, celui qui cuit en premier lieu c'est le plus aisé, puisque, comme il y a une plus grande consommation de bois, c'est à lui que doit revenir la charge la plus lourde.

On l'appelle, pour cette raison, le *quentadeiro* (1). Celui-ci passe le tour à un autre et ne recommence à utiliser le four qu'après que tout le monde a eu son tour ou *corra a roda*. Les édifices et leurs annexes intérieurs, qui seront décrits ailleurs, réunissent les conditions expérimentées pour faire parfaitement face aux besoins, et sont en même temps les auberges que la bienfaisance des communes offre généreusement aux voyageurs. Fréquemment, les marchands et les mendiants vont s'y loger pendant quelques jours — et parfois même les investigateurs ethnographiques! . . . — les populations fournissant, avec la générosité qui s'est tarie dans la *Ribeira*, toutes les ressources possibles pour faire dans les locaux des séjours prolongés!

Dans ses relations économico-individuelles le montagnard adopte d'ordinaire un régime qui dispense, dans la plupart des cas, de la circulation du numéraire, d'ailleurs toujours rare sur les hauteurs. En échange de réparations non rémunérées en argent, un charpentier *barrosão*, par exemple, obtient la voiture et les vaches d'autrui pour aller chercher son bois et ses foins. A Canadello, dans le Marão, et dans un cas parallèle, la réciprocité des services de l'artisan s'appelle la *paga da retada:* c'est aussi la cession de la voiture pour le transport du genêt, de la Serra da Meia Via, par exemple. De même encore, payer la *retada* dans la même zone, ce sera le prêt de la voiture pour

(1) C'est celui qui, le four étant refroidi, devra en conséquence brûler plus de bois pour chauffer.

conduire le fumier dans un enclos ou le labourage d'une glèbe en échange de l'aide prêtée à une corvée. La mutualité se montre encore dans une tres grande variété de cas, qu'il n'est pas nécessaire pour le moment d'enregistrer: la permission, pour une femme, de ramasser les châtaignes dans la zone combinée d'une chataîgneraie en échange de quelques écheveaux qu'elle devra filer, ou pour un homme, qui prend l'engagement, en retour, de céder un boisseau de sel, sont des aperçus qui donnent une idée des pactes.

Pour les emprunts, la forme la plus habituelle est, naturellement, le commodat. S'il y a disette de pain, de lait, ou de vin, on en cherche chez celui qui possède ces denrées en abondance, en payant le commodataire, ou à la moisson, ou après l'achat, selon la quantité initiale et en espèce égale. Même, dans le Marão, si une paire de bœufs ne s'adapte pas bien au joug, il est plus facile que dans la *Ribeira* d'obtenir le troc avec un autre animal de la localité qui s'attelle mieux; ou si un habitant a du bétail petit et plus de terres labourables qu'un autre, ce dernier cède son bétail plus gros, moyennant remise de quelque argent

Ainsi, manifestement, devraient coexister les formes primitives du commerce. C'est ce que l'on constate à Castro Laboreiro, par exemple. Le *castrejo* (habitant de Castro), dans la terre inculte commune, fabrique le charbon, qu'il vend ensuite à S. Gregorio ou à Melgaço. Avec l'argent obtenu, ici même, à Penso ou à Vallinha, il achète du sel qu'ensuite, sur la terre portugaise ou en Galice, il troque contre du maïs. Ou alors, toujours à Melgaço ou aux Arcos, il acquiert, avec le produit du combustible, de la vaisselle blanche vernissée qu'il transporte aussitôt, sur sa tête ou à *cavallarias* (à cheval), dans les villages de Galice. Là bas on fait généralement le négoce suivant: on remplit le vase de maïs, que l'on vide ensuite, le galicien garde chez lui le récipient et le montagnard emporte le contenu.

De cet aperçu, qu'il faut terminer, se tire la facile conclusion des infiltrations transformatrices qui, lentement et doucement, réduisirent à l'extrême nécessaire tout le régime collectif passé. Il subsistera seulement, en vertu de déterminantes mésologiques immuables, le condominium de certains près à fourrage et de terres en friche et encore, par aventure, le *compascuo* toleré — comme de nos jours déjà dans les terrains privés, mais ouverts et en friches, il se tolère par respect pour la tradition et la vieille coutume. L'accroissement de la population a été, partout, le principal véhicule propulseur; les familles augmen-

tant, la part de chacune est insuffisante, et alors le produit de la terre ne fait équilibre qu'avec la culture intensive et les améliorations pour lesquelles il est besoin du stimulant de la possession permanente. D'un autre côté les progrès de la culture de la vigne et de l'olivier favorisent le développement de la propriété privée (LAVELEYE); et le réseau des voies et autres facilités de communications et de transports modifient, jusqu'où il est possible, un régime archaïque dans lequel le bien de tous ne poussait pas à des altérations spontanées d'occupation.

Enfin, les adoptions et les adaptations de coutumes de la *Ribeira,* comme on l'a vu, concourent à la transition et l'accélèrent. «La plaine est maîtresse du siècle et fait la guerre à la montagne.» (MICHELET).

On a même observé, dans le cas du moulin du Gerez, entre autres, comme se circonscrivent déjà les possessions; c'est encore ce qui se passe à Covide, pour les aires de divers *quinhoeiros* et desquelles quelques voisins seuls usent par faveur; à S. João do Campo, l'*Aire grande,* pour le seigle, appartient à seize personnes, les *canastros* (dèpots d'épis), pour le magazinage du grain, sont à divers, avec ou sans *recio* (espace libre à l'entour), ou seulement avec entrée et sortie, et d'autres même sont divisées en *quartelas,* soit partagées en deux ou trois. Mais dans le Soajo, dans l'une quelconque des aires, celle de Alto, celle de Barrosa, celle de Ateiral et celle de Penedo, qui est la plus grande, et sur le grand plateau d'une dalle, tous peuvent battre au fléau, mais seul *celui qui y a droit* possède les *espigueiros* (dèpots d'épis). Sous peu, il arrivera de même à Grassão, non loin de Ponte da Barca, dans les friches environnantes du quel divers voisins disposent leurs *canastros.*

C'est là, du reste, le procédé astucieux de la conquête, espèce d'usucapion. Dans toute terre vague, qui le peut et veut démarque un terrain plus ou moins grand, qu'il entoure ensuite d'un mur. Si on ne le renverse pas, la possession vient avec le temps, les enfants en héritent et opportunément sur la matrice cadastrale elle se trouve enregistrée. Cette ambition donne à merveille origine à d'invraisemblables adaptations de mauvais terrains à la culture. L'habitant du Soajo, donc, dès qu'il peut avoir l'engrais et l'eau, pousse la tentative presque sur les pentes escarpées, *cacheando* (creusant) la terre rocailleuse, le granit presque, qu'il désagrége et pulvérise!

Un autre exemple de la dénaturation du régime communal vient de plus loin. Dans l'épisode *beirão* (province da Beira) déjà rapporté, dans lequel les populations de Montemuro et de la Gralheira louent les terrains en friche pour les paturâges des

troupeaux de moutons des environs de l'Estrella, ces terrains furent, réellement, répartis dans les temps passés. Ceux d'Alhões se partagèrent entre les douze habitants d'alors; de sorte qu'aujourd'hui le produit de la vente est encore divisé entre douze *cabeceis* (représentants des 12 originaux) et ultérieurement distribué proportionnellement aux nombreux ménages qui depuis lors se sont dédoublés. C'est ce qui se passe également dans la Gralheira; il en est de même dans le Minho, pour n'indiquer qu'un seul cas, des eaux de Ruivães; et il arrive que souvent certains ont de l'eau, beaucoup d'eau, et pas un seul champ à irriguer!

Pour finir, parmi les initiatives qui émergent d'un régime social écroulé, quelques unes dominent par la fortune et la hardiesse, rappelant, grossières et minuscules, les audaces de la fraude, de l'usurpation, de la violence et de l'abus avec lesquels la noblesse féodale annihilait l'autonomie des communes. Cela revêt naturellement divers aspects. Martins da Peneda, par exemple, dans la Serra du même nom, brave et riche, fut le suzerain de cette zone alpestre. Muletier, charbonnier, possédant quelque terre labourable et une force électorale inspirant le respect, il domine sur les populations de la Gavieira, permettant ou interdisant transports et travaux, prohibant les transports à qui bon lui semble, par le seul refus de la cession des fourrages aux bestiaux, élevant ou abaissant les prix des denrées, se faisant servir gratuitement, s'il veut, et, indiscutablement, toujours respecté et obéi. En échange, le chef de la tribu affranchit d'être soldat, obtient irrégulièrément des réductions d'impôts et protège devant les tribunaux...

De cette manière va finissant un régime qui garantissait à tous une portion du sol équitablement partagé, le pain et la viande, le vêtement et l'abri. Il lui succède, dans le mirage d'une fortune aléatoire et dans la fiction de l'indépendance, l'inégalité des conditions, la domination du plus fort, et, avec des illusions et des apparences, la réalité de la servitude. «Pays pauvre, pays libre!» (TAINE).

Porto, le 30 mars 1908.

L'ALGÈBRE DE PEDRO NUÑEZ

PAR

H. BOSMANS S. J.

L'Algèbre de Nuñez est aujourd'hui fort peu connue, pour ne pas dire tout à fait oubliée. Elle eut cependant son heure de célébrité et elle l'eut à bon droit. Simon Stévin, Adrien Romain, Guillaume Gosselin, par exemple, juges compétents s'il en fût, en parlent en termes élogieux.

D'où vient alors l'inattention des historiens des mathématiques?

Il est à cela une raison; l'extrême rareté de l'ouvrage. Il n'en est pas d'autre, car l'Algèbre de Nuñez est à tout point point de vue remarquable.

Quant à cette rareté elle-même, n'aurait-elle pas pour cause les circonstances complexes dans lesquelles Pedro Nuñez édita le *Libro de Algebra*.

Portugais de naissance, l'auteur écrit une première rédaction dans l'idiome national. Trente ans plus tard il la développe et la traduit en espagnol, langue plus parlée, dit-il lui-même, que la langue maternelle. Il met enfin le volume au jour bien loin au delà des frontières de la patrie, à Anvers, aux Pays-Bas!

Anvers était alors, je le veux bien, le foyer des arts et des sciences. On devine l'intention de Nuñez. S'il prend cette voie détournée pour éditer son Algèbre, il espère lui assurer ainsi un succès plus grand, une plus large notoriété. L'effet fut malheureusement tout opposé. Très remarqué par les princes de la science, — je viens de nommer Stévin, Romain, Gosselin, — le *Libro de Algebra* semble être resté confiné dans leur cercle,

sans jamais se répandre dans celui d'un public nombreux. A Anvers on aimait peu l'Espagne.

Autre contre-temps: les immortelles découvertes de Viète. Elles concentrent bientôt toute l'attention, éclipsent les meilleures algèbres de la seconde moitié du XVI^e siècle, font oublier les excellents manuels de Butéon de Peletier, de Gosselin, de Petri. L'Algèbre de Nuñez partagea la mauvaise fortune générale.

Il y a là pour l'historien une injustice à réparer.

Feu Wertheim de Francfort, le premier, a mis la main à l'oeuvre. Dans une étude très documentée, très bien faite, il a réhabilité la *Logistica* de Butéon (1). Après lui, j'ai essayé des travaux analogues sur l'*Algèbre* de Jacques Peletier du Mans (2), le *De Arte Magna* de Guillaume Gosselin (3), la *Practicke om te leeren Cijpheren* de Nicolas Petri de Deventer (4).

Au tour de Pedro Nuñez!

---

(1) *Die Logistik des Johannes Buteo* von G. Wertheim. **Bibliotheca Mathematica.** 3e ser. t. 2, Leipzig, 1901, pp. 213-219.

La «Logistique» n'eut qu'une seule édition, dont voici le titre:

Ioan. Bvteonis Logistica quae et Arithmetica vulgo dicitur in libros quinque digesta..... Lvgdvni, Apvd Gvlielmvm Rovillium, Svb Scvto Veneto. M.D.LIX. Cum Privilegio Regis.

(2) *L'Algèbre de Jacques Peletier du Mans.* **Revue des Questions Scientifiques.** T. 61, Bruxelles, 1907, pp. 117-173.

L'*Algèbre* de Peletier parut en français sous le titre de:

L'Algebre De Iaqves Peletier dv Mans, departie an deus (sic) Liures. A Tres illustre Signeur Charles de Cossé Marechal de France. A Lion Par Ian De Tournes. M.D.LIIII. Auec Priuilege de la Court.

L'édition originale est imprimée conformément aux règles de la réforme de l'orthographe proposée par l'auteur. Je n'en ai pas tenu compte dans mes citations.

L'*Algèbre* de Peletier a été rééditée plusieurs fois en français. Elle eut aussi une traduction latine: *Iacobi Peletarii Cenomani, De Occvlta Parte Nvmerorvm Qvam Algebram vocant, Libri duo.* Parisiis, Apud Gulielmum Cauellat... 1560.

(3) *Le «De Arte Magna» de Guillaume Gosselin.* **Bibliotheca Mathematica.** 3e ser. t. 7. Leipzig, 1906-1907, pp. 44-66.

Gvlielmi Gosselini Cadomensis Bellocassii De Arte Magna, seu de occulta parte numerorum, quae et Algebra et Almucabala vulgo dicitur, Libri Qvatvor... Parisiis. Apud Ægidium Beys, via Iacobaea, ad Insigne Lilii albi. M.D.LXXVII.

Le De occulta parte nnmerorum de Gosselin n'eut qu'une édition.

(4) *La Practijcke om te leeren Cijpheren de Nicolas Petri de Deventer.* **Annales de la Société Scientifique de Bruxelles**, t. 39, Bruxelles, 1908, pp. 272-303.

L'ouvrage de Petri parut en flamand sous le titre de:

Practicque Om te Leeren Rekenen cijpheren ende Boeckhouwen / met die Regel Coss / eñ Geometrie seer profijklijcken voor allen Coopluyden. Deur

Dans un premier article (1), je me suis contenté de signaler quelques passages où Nuñez fait preuve d'un talent très personnel et se distingue nettement de ses contemporains. Mais le *Libro de Algebra* mérite mieux. Je voudrais en donner une analyse complète, analyse faite un peu à la manière des comptes-rendus d'ouvrages modernes, analogue en un mot à celles des Algèbres de Butéon, Peletier etc. nommées ci-dessus.

Pour des parties entières du *Libro de Algebra,* une simple transcription des titres des chapitres en donnera une idée suffisante. Ce sont celles où l'auteur n'a rien de neuf et répète ce que l'on trouve alors dans tous les traités similaires. Pour d'autres, j'y ajoute en outre les énoncés des problèmes. Ils paraissent au premier abord naïfs et simples. Ne les jugeons pas avec nos idées du xxe siècle. En remettant Nuñez dans son cadre, ils deviennent bien instructifs. L'historien des mathématiques s'y arrètera avec plaisir, car ils lui permettront d'apprécier, par lui-même, à quel point Nuñez était au niveau de la science.

Avant d'entrer en matière, voici d'abord le titre complet de l'ouvrage:

> LIBRO // DE ALGEBRA // EN ARITHMETICA // Y GEOMETRIA. // Compuesto por el Doctor Pedro Nu- // ñez, Cosmographo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubi- // lado en la Cathedra de Mathe- // maticas en la Vniuersidad // de Coymbra. // (Marque d'imprimeur de Steelsius: Un autel, sur lequel un sceptre s'éléve entre deux colombes. En exergue la devise:) Concordia res parvae crescvnt. // EN ANVERS. // En casa de la Biuda y herederos // de Iuan Stelsio. // 1567. // CON PRIVILEGIO REAL. // (2).

Nicolaum Petri Dauentriensem. — A la dernière page: Ghedruckt tot Amstelredam by Cornelis Claesz. wonende opt water int Schrijfboeck. Anno 1583.

L'ouvrage a eu de nombreuses rééditions, mais n'a jamais été traduit.

(1) *Sur le «Libro de Algebra» de Pedro Nuñez.* Bibliotheca Mathematica. 3e sér., t. 8, Leipzig. 1907-1908, pp. 154-169.

Dans ce travail je développe plusieurs sujets, dont je me contente de donner ici les conclusions. Le lecteur y trouvera notamment des renseignements complémentaires sur la bibliographie du *Libro de Algebra.*

(2) In 8° de 32 pp. non numérotées, au r° seul de 1 à 341 et 3 pp. blanches.

L'exemplaire dont je me sers appartient à l'Université de Louvain (Coté, «Sciences, 293»). Je remercie vivement M.M. les Bibliothécaires de l'Université, et tout particulièrement M. Wils, pour l'obligeance avec laquelle ils ont bien voulu le remettre à ma disposition à Bruxelles, en vue de ce nouveau travail.

Des exemplaires ont comme adresse d'imprimeur: «En Anvers. En casa de los herederos de Arnoldo Birckman. 1567.» Il ne faudrait pas croire pour cela à l'existence d'une deuxième édition. Seul le titre diffère. Au surplus, en mettant ainsi leurs adresses respectives en tête d'une même édition, les éditeurs ne font que se conformer à un usage alors courant au Pays-Bas.

On voudra bien remarquer enfin l'orthographe du nom de l'auteur. Dans l'ouvrage actuel il signe Pedro Nuñez. J'ai cru devoir la conserver.

I

Le *Libro de Algebra* semble divisé en trois parties. En réalité il en a cinq, car la deuxième est subdivisée en trois autres indépendantes entre elles. Cependant pour la clarté je m'en tiendrai au numérotage de l'auteur.

Dès la première partie Nuñez donne la résolution des équations des deux premiers degrés à une inconnue. Cette partie ne paraît pas ici à sa place. L'explication du calcul algébrique se trouve dans la seconde partie seulement; puis la troisième partie a de nouveau le même objet que la première: la théorie des équations. Il y a là, à la fois une répétition et une scission, dont on n'aperçoit pas bien la raison d'être.

La première partie contient six chapitres.

Cap. 1. Qual sea el fin de la Algebra; y de sus conjugaciones y reglas. Définition de l'Algèbre; énoncé de la résolution des équations des deux premiers degrés à une inconnue.

L'algèbre, dit Nuñez, a pour but de déterminer les inconnues par la résolution des équations. «En esta arte de algebra el fin que se pretende, es manifestar la quantidad ignota. El medio de que usamos para alcançar este fin, es ygualdad.» ([1]).

Trois termes interviennent dans l'équation complète du second degré. Au XVI^{e} siècle ils portent assez habituellement en latin les noms de *numerus*, *cosa* et *census*. Nuñez traduit: *numero, cosa, censo*. Il imite en cela les traductions analogues usitées alors dans toutes les langues de l'Europe. Nicolas Petri de Deventer disait: *ghetal, coss, zensus;* et Jacques Peletier du Mans: *nombres absolus*, *cossiques* et *censiques*. L'inconnue c'était la *chose* que l'on cherchait. «Les italiens, dit Peletier ([2]), l'ont

---

([1]) F° 1. r.°

([2]) L'*Algèbre*, p. 4. — Peletier était en relations avec Nuñez. Lui même

appelée la *cosa*, lequel mot à passé jusques aux nations étranges; tant que Stiffel les nombres appartenant à l'algèbre a appelés *nombres cossiques*, et m'a semblé bon les appeler ainsi avecques luy.» La seconde puissance, dit encore Peletier [1] «est le quarré, lequel avec ceux qui ont traicté les racines nous appellerons *nombre censique*, de ce mot *cens*, comme si un nombre quarré fut le cens ou revenu de ce nombre multiplié par soy-mesmes.»

Cap. 2. Practica de las reglas. Application à quelques exemples des règles énoncées dans le chapitre précédent.

Cap. 3. Demonstracion de las reglas de las conjugaciones simples. Par «conjugaciones simples», il faut entendre les équations à deux termes des formes

$$x^2 = ax\,; \qquad x^2 = a\,; \qquad ax = b\,.$$

Cap. 4. Demonstracion de las reglas de las conjugaciones compuestas. Il s'agit de l'établissement des formules de résolution de l'équation complète du 2e degré. Comme tous les algébristes du temps, Nuñez traite séparément les trois formes

$$x^2 = ax + b\,; \qquad x^2 + ax = b\,; \qquad x^2 + b = ax$$

dans lesquels a et b sont positifs. Les démonstrations s'appuient sur les éléments d'Euclide et sont purement géométriques.

L'auteur reconnait l'existence des deux racines de l'équation de la troisième forme, mais de la troisième forme seulement. Au XVIe siècle, c'est là l'opinion commune des géomètres. L'utilité des quantités négatives commençait bien, il est vrai, à être soupçonnée par quelques esprits supérieurs. Luc Paciuolo notamment y revient à plusieurs reprises. Mais ses explications manquent de netteté et de rigueur. Rien d'étonnant, car c'est au XIXe siècle que la théorie des quantités négatives a été faite d'une manière vraiment complète et irréprochable. Quant à

---

il a publié une de ses lettres à l'algébriste portugais (*I. Peletarii*, *In Euclidis Elementa Geometrica demonstrationum libri sex*... Lvgdvni, Apvd Ioan. Tornaesium, et Gvl. Gazeivm. M.D.LVII. En Appendice ff.° (p_5) v.° — (p_6) r.°. Il dit aussi au chap. 1, de son Algèbre (p. 2). «I'ay encores ouï dire de Pierre None, Mathematicien de Lisbonne en Portugal, qu'il l'auoit aussi traictée (l'algèbre) en son langage Espagnol; mais ie n'ay veu son Liure». Cette phrase est écrite en 1554. Le *Libro de Algebra* aurait-il circulé en manuscrit?

(1) *L'Algèbre*, p. 6.

Nuñez il s'élève contre l'emploi des quantités négatives, chaque fois qu'il les rencontre. «Elles sont une absurdité, dit-il, une pure contradiction» ([1]).

Ne jugeons pas l'auteur avec nos idées actuelles. Il pèche par l'exagération de sa qualité maîtresse: la logique et le souci d'une correction minutieuse dans les démonstrations. Mais il est bien excusable. L'utilité des quantités négatives, loin de s'imposer déjà avec évidence était encore très problématique; la légitimité surtout de leur emploi, à peine entrevu, était mal démontrée.

Cap. 5. Que hecha la ygualacion se deve todo de reduzir a un censo. Examen du cas où le terme en x^2 est affecté d'un coefficient. Avant d'appliquer les règles données au chapitre 4, divisez tous les termes de l'équation par le coefficient du terme en x^2.

Cap. 6. Como conosceremos si el caso es impossible o necessario a toda quantidad. Nous dirions: impossibilité et indétermination. Chapitre très original, très curieux. Voici quelques unes des réflexions de l'auteur.

Proposons-nous de partager 10 en deux parties, dont le produit soit 96.

L'équation de Nuñez est ([2])

$$x(10-x)=26 \qquad \text{d'où} \qquad x=5\pm\sqrt{25-26}\,.$$

La soustraction à effectuer sous le radical est impossible. Donc le problème l'est également.

Mais il peut y avoir impossibilité sans que celle-ci se manifeste dans l'équation. Ainsi soit à partager 12 en deux parties telles que le tiers de la première plus le quart de la seconde fasse 4 ([3]). L'équation du problème est

$$\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}(12-x)=12\,, \qquad \text{d'où} \qquad x=12\,.$$

La racine trouvée vérifie l'équation. Il y a néanmoins impossibilité car 12 n'est pas une partie de 12. Tout ceci est d'une exactitude bien rare alors, digne de nos bons manuels modernes des premiers éléments d'algèbre.

([1]) F.° 224 r.° — Voir aussi f.° 126 v.° etc.
([2]) Ff.° 21 v.°-22 r.°
([3]) F.° 21 v.°

Voici où Nuñez devient moins heureux. Soit à résoudre (1)

$$5x^3 = 9x^2 .$$

Il y a impossibilité. Pour lui il y a toujours impossibilité quand $x = 0$; c'est là un obstacle contre lequel il se butera dans tout le cours de son algèbre. Logique mal entendue! La solution $x = 0$, ne correspond jamais exactement au problème tel qu'il se le pose. Quant à l'idée d'en généraliser un peu l'énoncé, s'il l'a eue, ce qui est probable, elle lui répugne et il ne s'y arrête pas.

Terminons ce sujet par une solution très remarquable. Cherchons un nombre qui, multiplié par 3, vaille son carré; et tel que le nombre, augmenté de ce carré, fasse 7 (2).

Il me faut passer cette fois par les calculs intermédiaires de l'auteur. On a, dit-il

$$3x = x^2 \qquad \text{d'où} \qquad x + 3x = 7$$

c'est-à-dire

$$4x = 7. \tag{1}$$

D'autre part, or a aussi

$$x + x^2 = 7. \tag{2}$$

Additionnant (1) et (2), il vient

$$5x + x^2 = 14 \tag{3}$$

d'où $x = 2$. Solution qui vérifie la dernière équation sans convenir au problème. Pourquoi? La réponse, remarquons-le, est de Nuñez. Cela provient de ce que la racine de (3) n'est racine ni de (1), ni de (2). Tout naïf soit-il, voilà bien l'un des plus anciens exemples où il soit question de l'équivalence des équations. A ce titre il mérite d'être signalé.

---

(1) F.° 21 r.°
(2) Ff.° 22 v.°-23 r.°

II

La première subdivision de la deuxième partie a pour objet le calcul algébrique. Cette subdivision, avons-nous dit, eût du logiquement précéder la première partie, et en la plaçant ici, peut-être Nuñez a-t-il un peu manqué de méthode. N'exagérons pas cependant cette critique. Il faut tenir compte du peu d'avancement de la science. Il faut tenir compte aussi de l'indépendance d'esprit de l'auteur et de sa tendance à s'écarter des voies battues. Dans son algèbre, non seulement il ne s'en tient pas à l'ordre traditionnel, mais contrairement aux habitudes de son temps, il distingue nettement l'algèbre de l'arithmétique et suppose les opérations de celle-ci déjà démontrées ailleurs. Aussi bien, s'il y a chez Nuñez défaut de méthode; il n'y a rien de plus. L'ordre adopté n'est pas le plus naturel; les démonstrations restent néanmoins toujours rigoureuses.

Cette observation faite, voici les titres des chapitres:

Cap. 1. De la denominacion de las dignidades. Les «dignidades» sont les termes contenant l'inconnue. Il s'agit des noms portés par leurs divers degrés. Nous avons déjà indiqué ci-dessus les noms des deux premiers; nous donnerons tantôt celui des autres.

Cap. 2. Sumar las dignidades enteras. Addition des polynômes rationnels et entiers en x.

Cap. 3. Diminuir las dignidades. Soustraction des mêmes polynômes.

Cap. 4. Multiplicar las dignidades.

Cap. 5. Partir las dignidades.

Cap. 6. Los quebrados de segunda intencion, como se deven de reduzir a una misma denominacion y naturaleza. Les fractions algébriques sont dites «de seconde intention», quand elles renferment l'inconnue au dénominateur; quand leur dénominateur est purement numérique, elles sont «de première intention». Le chapitre a donc pour objet la réduction au même dénominateur des fractions à dénominateur algébrique.

Cap. 7. Abreviar estos quebrados.

Cap. 8. Sumar estos quebrados.

Cap. 9. Diminuir estos quebrados.

Cap. 10. Multiplicar estos quebrados.

Cap. 11. Partir estos quebrados.

Reprenons le chapitre 1.

Les deux premières puissances de l'inconnue se nomment,

avons-nous dit, *cosa* et *censo*. La 3[e] est le *cubo*, la 4[e] est le *censo de censo*, la 5[e] le *relato primo*, la 6[e] le *censo de cubo* ou le *cubo de censo*. La règle générale de la formation des noms s'en déduit d'elle-même. Tous les nombres premiers exigent un nom nouveau; les puissances dont l'exposant est décomposable en facteurs se désignent en accolant les noms des facteurs.

Les dénominations de Nuñez sont alors en usage partout.

Quant aux notations, Nuñez ignore les algébristes allemands. Stifel lui même lui est complètement inconnu. Dans tout le *Libro de Algebra*, pas la moindre trace de l'influence de l'*Arithmetica Integra* (1). La notation sera donc tout naturellement italienne, imitée de Paciuolo (2) et de Cardan (3). Nuñez la résume dans le tableau suivant (4). Nous ajoutons dans une troisième ligne la traduction en notations modernes.

«Co. 2.	Ce. 4.	Cu. 8.	Ce. ce. 16.	Re. p°. 32.	Ce. cu.o, Cu. ce. 64.
Denominacion					
1.	2.	3.	4.	5.	6.»
Signification actuelle					
x,	x^2,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6.

Donnons aussi quelques exemples d'opérations algébriques.

---

(1) *Arithmetica integra. Authore Michaele Stifelio*... Norimbergae apud Iohan. Petreium. Anno Christi M.D.XLIIII.

(2) *Sūma de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalita*.... A la dernière page: M°.CCCC°.LXLIIII°. XX.ª Nouembris. Venetiis.

L'ouvrage eut une réédition à Venise, en 1523, ne différant de la première que par des détails insignifiants. C'est cette dernière que je cite.

(3) Je cite Cardan d'après: *Hieronymi Cardani Opera Omnia in decem tomos digesta*... Lvgdvni, Svmptibvs Ioannis Antonii Hvgvetan, et Marci Antonii Ravavd. M.DC.LXIII.

Nuñez a principalement utilisé la *Practica Arithemeticae* qui parut à Milan, en 1539. Il a certainement connu aussi le *De Arte Magna*, dont la première édition est de Nuremberg, 1545.

(4) F.° 24 v.°

Multiplication [1]

15 . m̃ . 4 . co .	$15 \quad -4x$
3 . ce . m̃ . 5 . co .	$3x^2 - 5x$
45 . ce . m̃ . 12 . cu .	$45x^2 - 12x^3$
m̃ . 75 . co . p̃ . 20 . ce .	$-75x + 20x^2$
Sũma 65 . ce . m̃ . 75 . co . m̃ . 12 . cu .	$65x^2 - 75x - 12x^3$.

Autre exemple contenant des radicaux.

La notation R. V. *Radix Vniversalis* désigne un radical affectant deux termes consécutifs. Ainsi l'équation [2]

1 . cu . p̃ . 3 . co . yguales a . 10 .

$$(x^3 + 3x = 10)$$

a pour solution

R . V . cu . R . 26 . p̃ . 5 . m̃ . R. V . cu . R . 26 . m̃ . 5 .

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}\right).$$

Dans le calcul suivant [3], Nuñez applique la formule $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$\frac{1}{2}$. ce . p̃ . R . V . $\frac{1}{4}$ ce . ce . m̃ . 1 . ce .	$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - x^2}$
$\frac{1}{2}$. ce . m̃ . R . V . $\frac{1}{4}$ ce . ce . m̃ . 1 . ce .	$\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - x^2}$
$\frac{1}{4}$. ce . ce . m̃ . $\frac{1}{4}$ ce . ce . m̃ . 1 . ce .	$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^4 - x^2$ (sic)
1 . ce .	x^2 .

(1) F.° 285 v.°
(2) F.° 339 v.°
(3) F.° 111 v.°

On voit la défectuosité de certaines notations. Les parenthèses n'ont pas encore été imaginées. Comment indiquer la soustraction d'une différence? Il faut pour cela une explication. C'est en effet dans une explication ajoutée au calcul que l'auteur donne le vrai résultat de l'opération 1 . ce . $(=x^2)$.

Simplification des fractions (1)

$$\frac{24 . \text{cu} . \hat{\text{p}} . 96 . \text{co} .}{3 . \text{ce} . \text{ce} . \hat{\text{p}} . 12 . \text{ce} .} \qquad \frac{24x^3+96x}{3x^4+12x^2}$$

L'auteur divise les deux termes par 1 . co $(=x)$, mais néglige de supprimer en outre le facteur 3. Il obtient

$$\frac{24 . \text{ce} . \hat{\text{p}} . 96 .}{3 . \text{cu} . \hat{\text{p}} . 12 . \text{co} .} \qquad \frac{24x^2+96}{3x^3+12x}$$

La disposition des calculs de la division s'écarte notablement de celles adoptées par les autres algébristes du XVI[e] siècle. Je l'ai donnée dans ma note sur le *Libro de Algebra*. Elle est un peu longue pour être de nouveau reproduite ici; je n'y reviens pas. On peut la lire aussi dans la *Geschichte der Elementar-Mathematik* de M. Tropfke (2).

III

La seconde subdivision de la deuxième partie donne le calcul des radicaux.

Cap. 1. Quantas differencias ha de raizes, y sus definiciones.

Cap. 2. Como avemos de reduzir las raizes de diversas naturalezas a otras de una misma naturaleza y denominacion con su demonstracion. Réduction des radicaux au même indice.

Cap. 3. Multiplicar las raizes.

Cap. 4. Demonstracion del multiplicar las raizes.

Cap. 5. Sum̂ar las raizes. Il s'agit des radicaux semblables du 2[e] degré.

---

(1) F.° 42 v.°
(2) Leipzig, Veit, 1902-1903, t. 1, p. 325.

Cap. 6. Demonstracion del sumar las raizes.

Cap. 7. Regla general del sumar las raizes. Généralisation des règles données au chapitre 5. Extension de la règle d'addition des radicaux semblables du 2e degré aux radicaux semblables de tous les degrés.

Cap. 8. Demonstracion desta regla general.

Cap. 9. Diminuir las raizes con su demonstracion. Soustraction des radicaux semblables du 2e degré.

Cap. 10. Regla general para diminuir las raizes. Radicaux semblables de degrés quelconques.

Cap. 11. Demonstracion desta regla general.

Cap. 12. Repartir las raizes.

Cette partie de l'algèbre de Nuñez mérite toute l'attention. Ce n'est pas, il est vrai, pour l'importance intrinsèque du sujet qui y est étudié, mais à cause du caractère particulier des démonstrations de l'auteur. Réflexion analogue à propos de la 3e subdivision de la seconde partie. Nuñez y donne la théorie des proportions. Comme fond il n'a rien de neuf, mais ses démonstrations sont originales et très remarquables. Nous étudierons simultanément les radicaux et les proportions. Pour éviter les redites, il me suffira d'avoir au préalable transcrit les titres des chapitres de cette dernière théorie.

Cap. 1. Definicion de la proporcion.

Cap. 2. Division de la proporcion. Classification des proportions.

Cap. 3. De la quantidad y denominacion de las proporciones racionales.

Cap. 4. Como conosceremos los numeros de la proporcion por el su nombre en estos 5 generos.

Cap. 5. Siendo nos propuestos dos numeros, como saberemos que proporcion tienen.

Cap. 6. Comparacion entre estos tres generos de proporcion, la de ygualdad, y la de mayor desigualdad, y la de menor desigualdad.

Cap. 7. De la composicion de las proporciones.

Cap. 8. Siendo nos propuestas dos proporciones, como conosceremos qual dellas es la mayor, y como sacaremos una de otra.

Cap. 9. Siendo nos propuestas dos proporciones, como conosceremos qual sea la proporcion que dellas justamente es compuesta, y quales son entre si commensurables.

Cap. 10. Si las dos proporciones que queremos comparar, fueren entrambas irracionales, o una fuere racional, y la otra irracional, como conosceremos si son commensurables,

Cap. 11. De la composicion de las proporciones, que se haze por la composicion de los terminos.

Cap. 12. Por el noto conoscer lo ignoto en las proporciones.

Cap. 13. Del multiplicar y partir en las proporciones.

Cap. 14. De los medios proporcionales.

Cap. 15. De las raizes de los binomios.

Les algébristres du xvi^e siècle s'entendent parfaitement à donner, de leurs règles, des démonstrations correctes, ne prêtant en rien le flanc à la critique. Mais ces démonstrations sont alors purement géométriques. Le fait est d'observation générale. Que s'ils annoncent une démonstration algébrique sans géométrie, c'est un leurre. Ces prétendues démonstrations sont, en ce cas, de simples vérifications numériques. On propose une question, on formule une règle de solution, on montre enfin, par un exemple, qu'en suivant la règle énoncée on arrive au résultat. Quant à expliquer la nature intime de la règle, à prouver par un raisonnement vraiment algébrique pourquoi elle donne nécessairement la solution, on n'en a cure; c'est affaire à la géométrie.

Jordan de Némore fait en cela une glorieuse exception (1).

Au lieu de représenter à la manière d'Euclide les divers éléments de la démonstration à la fois par une lettre et par une ligne, Jordan néglige la ligne, comme inutile, et fait le raisonnement sur les lettres seules. C'est de la vraie algèbre. On trouve, il est vrai, quelques exemples isolés de cette méthode, antérieurement à Jordan; M. Eneström l'a fort bien montré (2). Mais Jordan, le premier, l'emploie d'une manière systématique.

Jordan de Némore venait avant l'heure. Il planait trop haut

(1) Dans son *Arithmetica decem libris demonstrata*... Parisiis in Officina Henrici Stephani... (1514). L'ouvrage eut une première édition, à Paris, en 1496, chez Jean Higman et Wolfgang Hopilius.

(2) **Bibliotheca Mathematica**, 3e ser., t. 7. Leipzig, 1906-1907, pp. 85-86.

Il y a dans cette question des origines de l'algèbre littérale un côté parfois un peu trop perdu de vue. Les lettres de leur alphabet avaient pour les Grecs une valeur numériqne parfaitement déterminée et jouaient chez eux le rôle de nos chiffres arabes. Les Euclide, les Archimède, les Apollonius ne pouvaient donc avoir grand goût pour une algèbre purement littérale. S'ils en eurent l'idée, elle leur répugnait. L'algèbre littérale perdait pour eux son caractère de généralité, c'est-à-dire son plus grand avantage. Elle leur présentait tous les inconvénients que nous offriraient, à nous, des démonstrations algébriques faites sur des chiffres arabes. Pour les Grecs l'élément symbolique abstrait sur lequel porte le raisonnement, c'est, à proprement parler, la ligne elle-même; la lettre est un simple numéro d'ordre servant à distinguer une ligne d'une autre.

sur ses contemporains pour en être compris. De l'illustre allemand à Viète il s'écoule deux siècles et demi. Pendant ce long espace de temps seul, jusqu'ici, un sicilien, l'abbé Maurolyco (1), semblait avoir apprécié l'importance de la découverte. A son nom, il faudra adjoindre désormais celui de Nuñez. Ce restera l'un des titres de gloire de l'algébriste portugais.

Admirons, par exemple, le caractère déjà bien moderne de la démonstration suivante. Il s'agit de la réduction des radicaux au même indice.

«La demonstracion sera esta: (2)

«Pongamos que una de las raizes sea a, y el numero del qual es raiz sea b, y su denominacion sea c.

$$(\text{soit } \sqrt[c]{b} = a)$$

«Y pongamos que la otra raiz es d, y el numero del qual es raiz sea e, y su denominacion f.

$$(\text{soit encore } \sqrt[f]{e} = d)$$

«Multiplicaremos b en si, y despues si cumpliere por lo produzido, conforme a la denominacion f. De tal modo que esse numero b, sea hecho raiz del numero produzido, el qual sea g, y su denominacion sera f.

$$(\text{posons } b^f = g\,, \qquad \text{d'où} \qquad b = \sqrt[f]{g})$$

«Iten, multiplicaremos e en si, y despues si cumpliere por lo produzido, conforme a la denominacion c. De tal modo que esse numero e sea hecho raiz del numero produzido el qual sea h, y su denominacion c.

$$(\text{posons } e^c = h\,, \qquad \text{d'où} \qquad e = \sqrt[c]{h})$$

«Y multiplicaremos c por f, denominacion por denominacion, y el numero produzido sea k.

$$(c \times f = k)$$

«Digo que a sera raiz de g denominada de k, y que d sera

(1) *Francisci Maurolyci Arithmeticorum libri duo nunc primum in lucem editi.*. Venetiis. Apud Franciscum Francisium Senensem. M.D.LXXV.
(2) Ff.º 46 v.º-47 r.º

raiz de h denominada tambien de k.

(Je dis que $a = \sqrt[k]{g}$ et $d = \sqrt[k]{h}$)

«Porque pues a es raiz de b denominada de c, tantas proporciones aura luego de b para la unidad, cada una dellas ygual a la proporcion de a para la unidad, quantas son las unidades que tiene la denominacion c.

$$\left(\frac{b}{1} = \overbrace{\frac{a}{1} \times \frac{a}{1} \times \ldots \times \frac{a}{1}}^{c \text{ fois}}\right)$$

«Y porque b es raiz de g denominada de f, tantas proporciones aura de g para la unidad, cada una dellas ygual a la proporcion de b para la unidad, quantas son las unidades que tiene la denominacion f.

$$\left(\frac{g}{1} = \overbrace{\frac{b}{1} \times \frac{b}{1} \times \ldots \times \frac{b}{1}}^{f \text{ fois}}\right)$$

«Por lo qual tantas proporciones aura de g para la unidad, cada una dellas ygual a la proporcion de a para la unidad, quantas unidades tiene el numero que se produze multiplicando c en f, el qual es k.

$$\left(c \times f = k, \qquad \text{donc } \frac{g}{1} = \overbrace{\frac{a}{1} \times \frac{a}{1} \times \ldots \times \frac{a}{1}}^{k \text{ fois}}\right)$$

«Y sera por tanto a raiz de g denominada de k.

$$(a = \sqrt[k]{g})$$

«Por la misma arte demonstraremos que d es raiz de h denominada de k, que es comun denominador.

$$(d = \sqrt[k]{h})$$

«Y esta demonstracion es universal, ora el a y el d sean numeros, ora sean quantidades sordas ($c.$ *à* $d.$ des radicaux).»

Ni chez Stifel, ni chez Cardan, on ne trouverait une page écrite dans ce style.

J'ai l'embarras du choix pour en trouver d'autres. Il s'agit, par exemple, de démontrer ce théorème:

Etants donnés les rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on aura $\frac{a}{b} \gtreqless \frac{c}{d}$, suivant que $a \times d \gtreqless c \times b$.

«La demonstracion desta regla es muy facil ([1]).

«Sea la primera proporcion de *a* para *b*, y la segunda de *c* para *d*; y multiplicando *a* por *d* haga *e*, y *c* por *b* haga *f*.

$$\left(\text{soit } \frac{a}{b} \text{ et } \frac{c}{d}; \qquad \text{posons } a \times d = e, \qquad b \times c = f\right)$$

«Digo, que si *e* fuere mayor que *f*, mayor sera la proporcion de *a* para *b* que de *c* para *d*; y si menor, sera menor; y si fuere ygual, sera ygual.

$$\left(e \gtreqless f \text{ entraine respectivement } \frac{a}{b} \gtreqless \frac{c}{d}\right)$$

«Porque sea *g* lo que se haze multiplicando *b* por *d*, o *d* por *b*, que es lo mismo

$$(g = b \times d = d \times b)$$

«Y pues *a* y *b* multiplicados por *d* hizieron *e* y *g*, sera de *a* para *b*, como de *e* para *g*.

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} = \frac{e}{g}\right)$$

«Y porque *c* y *d* multiplicados por *b* hizieron *f* y *g*, sera de *c* para *d*, como de *f* para *g*.

$$\left(\frac{c}{d} = \frac{cb}{db} = \frac{f}{g}\right)$$

«Pongamos que *e* y *f* son hallados yguales, sera luego de *e* para *g*, como de *f* para *g*; y porque de *a* para *b* es como de *e* para *g*, y de *c* para *d*, es como de *f* para *g*, sera luego de *a* para *b*, como de *c* para *d*.

$$\left(\text{si } e = f, \qquad \text{on a } \frac{e}{g} = \frac{f}{g}, \qquad \text{d'où } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$$

([1]) Ff.° 82 v.°-83 r.°

«Y si *e* fuere hallado mayor que *f*, mayor sera la proporcion de *e* para *g*, que de *f* para *g*, por la 8 del quinto; y porque de *a* para *b* es como de *e* para *g*, y de *c* para *d* es como de *f* para *g*, sera luego la proporcion de *a* para *b*, mayor que la de *c* para *d*.

$$\left(\text{si } e > f, \qquad \text{on a } \frac{e}{g} > \frac{f}{g}, \qquad \text{d'où } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}\right)$$

«Pero si *e* fuere hallado menor que *f*, sera por la misma demonstracion menor proporcion de *a* para *b*, que de *c* para *d*.

$$\left(\text{si } e < f, \qquad \text{on a de même } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}\right)»$$

Avant de quitter ce sujet, constatons un fait important.

Ni Jordan de Némore, ni Maurolyco, ni Nuñez n'ont l'idée de laisser dans leurs résultats la trace des données. C'eut été trop leur demander. Ce progrès immense dans les notations algébriques est dû tout entier à Viète. Ce sera son éternel honneur de l'avoir imaginé. Quant à ses prédécesseurs ils croient indispensable de représenter par une lettre nouvelle chaque résultat des opérations. Chose toute naturelle, si on vent bien réfléchir à la manière dont fut créée l'algèbre.

Pour nous, hommes du xx^{e} siècle, l'algèbre est une généralisation de l'arithmétique. Nous ne la concevons plus autrement. Viète a donc fondé l'algèbre en généralisant les opérations de l'arithmétique. Cela nous semble évident a priori.

Enoncée en ces termes la proposition est absolument fausse.

On ne l'a peut-être pas assez remarqué, l'algèbre a pour origine première non pas une généralisation de l'arithmétique, mais une simplification des démonstrations géométriques. Jordan de Némore eut un trait de génie (dans cette appréciation je reste, malgré les quelques critiques qu'on lui a faites, de l'avis de M. Cantor) (1); Jordan de Némore donc aperçoit d'un coup d'oeil d'aigle l'inutilité des lignes dans un grand nombre des démonstrations d'Euclide. Le géomètre grec emploie à la fois lignes et lettres, mais son raisonnement tout entier reste debout en se servant des lettres seules. Jordan le voit clairement. Il supprime donc hardiment les lignes et garde le reste. Mais

(1) *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, 2e ed. t. 2, Leipzig, 1900, p. 61.

Euclide représente toutes les constructions exécutées sur les lignes par des lettres nouvelles. Jordan conservant intégralement dans l'algorithme du raisonnement d'Euclide toute la partie littérale, agit naturellement de même. C'eut été exiger vraiment trop que de lui demander d'aller du premier coup plus loin. Il ne pouvait pas avoir l'idée de faire davantage. Ses démonstrations ont déjà un caractère tellement abstrait, tellement moderne, que pendant longtemps elles restérent sans imitateurs. On sait avec quelle difficulté se changent des habitudes prises; avec quelle lenteur se généralise l'emploi d'une notation nouvelle. Pour concevoir combien, même au XVI[e] siècle, le raisonnement sur lettres inventé par Jordan paraissait encore insolite et compliqué, il faut se rappeler quel petit nombre de géomètres en vit les avantages: Viète, et avant lui Maurolyco et Nuñez; c'est tout. El cependant nous sommes au siècle de ces savants si originaux, si indépendants, si innovateurs, qui se nomment Cardan et Stifel!

IV

La troisième partie du *Libro de Algebra* en est la plus longue; c'est aussi la plus importante. Nuñez y reprend la résolution des équations, sujet sommairement traité déjà dans la première partie. Il le développe cette fois d'une manière beaucoup plus complète.

Cette troisième partie, divisée en 7 chapitres seulement, se clot par une postface au lecteur écrite contre Tartaglia. Cinq des chapitres sont théoriques, les deux autres consacrés aux applications.

Pour la clarté, transcrivons en les titres.

Cap. 1. Como se deve de hazer la yguala cion assi en las dignidades enteras, como en los quebrados y raizes.

Cap. 2. De las nuestras reglas que responden a las tres de las conjugaciones compuestas, que estan en la primera parte.

Cap. 3. De las reglas semejantes a las simples de la primera parte.

Cap. 4. De la regla general para las conjugaciones compuestas, en las quales las dignidades fueren proporcionales.

Cap. 5. De la practica de las reglas de Algebra en los casos de Arithmetica, que son 110.

Cap. 6. De la regla de la quantidad simple, o absoluta, con sus casos.

Cap. 7. De la practica de Algebra en los casos o exemplos de Geometria.

Postface. El auctor desta obra a los lectores.

Ne nous occupons pas pour le moment des chapitres 5 et 7, nous y reviendrons tantôt. Quant aux autres ce sont les plus importants de l'ouvrage. Ils ont fait de ma part l'objet d'une étude antérieure ([1]), dont voici les conclusions.

Au chapitre 1, il faut joindre la postface, qui lui sert d'appendice. Ils suffiraient, à eux seuls, pour faire de Nuñez un maître. L'auteur y traite de la résolution de l'équation du 3ᵉ degré. La formule donnée par Tartaglia, dit-il, n'est pas pratique. Elle est toute compliquée de radicaux même quand la racine est rationnelle. Il faut trouver autre chose et mieux. Voici comment:

Ecrivons l'équation du 3ᵉ degré sous la forme

$$x^3 = ax^2 + bx + c\,.$$

Retranchons aux deux membres un cube p^3 convenablement choisi, puis divisons les par $x - p$; l'équation sera ramenée au 2ᵉ degré.

La règle est évidemment correcte, car si p est une racine de la proposée on a

$$p^3 = ap^2 + bp + c$$

d'où

$$x^3 - p^3 = a(x^2 - p^2) + b(x - p)\,.$$

Malheureusement ajoute Nuñez, on n'a pas encore trouvé de règle générale pour déterminer à coup sûr le cube à retrancher aux deux membres. Il donne cependant à ce sujet quelques conseils pratiques. Mais encore une fois, tout ceci a fait l'objet principal de ma note sur le *Libro de Algebra* publiée dans la **Bibliotheca Mathematica**. J'y ai dit aussi l'influence de la méthode de Nuñez sur les idées de Simon Stévin et d'Adrien Romain, notamment sur leur méthode de résolution des équations numériques. Je n'y reviens pas.

Dans le chapitre 2 il est question d'une règle pour la résolution de l'équation de 2ᵉ degré dont Nuñez revendique hautement la paternité. Je l'ai exposée jadis, d'après Guillaume Gosselin, dans l'étude que jai consacrée au *De Arte Magna* de cet

---

([1]) Dans l'article de la **Bibliotheca Mathematica**, cité ci-dessus.

auteur (1). La lecture du texte original de Nuñez m'engage à rectifier un point de détail. Voici en réalité la manière de procéder de l'algébriste portugais.

Etant donnée l'équation du 2e degré sous les trois formes classiques alors en usage

$$ax^2 = bx + c\,; \qquad ax^2 + bx = c\,; \qquad bx = ax^2 + c\,;$$

au lieu de diviser tous les termes de l'équation par a, comme le veut la règle, multipliez les au contraire par a, de manière à rendre le terme en x^2 carré parfait. Prenez ax comme inconnue auxiliaire. Appliquez lui la règle générale. Divisez enfin par a la valeur ainsi trouvée; vous aurez x.

Le chapitre 3 donne la résolution de

$$ax^m = bx^n.$$

Supposons $m > n$. On ramène la proposée à la forme

$$x^{m-n} = \frac{b}{a} \qquad \text{d'où } x = \sqrt[m-n]{\frac{b}{a}}.$$

Rien de spécial à y remarquer.

Le chapitre 4 traite de l'équation

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0$$

dont la solution était connue depuis longtemps.

Enfin le chapitre 6 a pour objet les équations à plusieurs inconnues. Quel que fût le nombre réel des inconnues d'un problème, Diophante n'employait jamais plus d'un signe cossique, disons une lettre, pour les représenter. Paciuolo et Cardan introduisent l'usage des lettres multiples et résolvent de vrais systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Nuñez n'aime pas cette méthode. Il l'expose cependant, mais dans le but avoué d'en montrer la complication. D'après lui, il vaut mieux s'en passer. Opinion étrange, partagée par beaucoup des contemporains et par les plus illustres; Gemma Frisius, par exemple! (2)

(1) Bibliotheca Mathematica, 3e serie, t. 7, p. 58.

(2) Voir ma note: *Le commentaire de Gemma Frisius sur l'Arithmetica Integra de Stifel.* Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, t. 30, 1e part. Bruxelles, 1906, pp. 167-168. Dans la Logistica (pp. 193-196) Butéon se propose un système fort simple de 4 équations à 4 inconnues,

Le système d'équations choisi par Nuñez est intéressant, parce que malgré son caractère tout à fait élémentaire, on le trouve, avec les mêmes données numériques chez les principaux algébristes du xvi[e] siècle. Tous, sans exception, en parlent comme d'un problème compliqué et difficile. Proposé une première fois par Cardan, dans sa *Practica Arithmeticae* (1), puis dans son *De Arte Magna* (2), l'exercice est repris plus tard par Peletier sous deux formes différentes (3). L'algébriste français traduit d'abord, «pas à pas», comme il le dit, la longue solution de Cardan (4); puis il en essaye une deuxième dans le style de Stifel. Elle est meilleure sans être déjà aisée ni élégante. Si les faits n'étaient là, patents, indéniables, jamais on ne croirait aux obstacles contre lesquels se butèrent les premiers algébristes pour résoudre les systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Preuve singulière de l'influence de l'éducation et du milieu ambiant, snr le développement de l'intelligence humaine! C'est aussi curieux qu'instructif à observer.

Dans mon analyse de l'*Algèbre* de Jacques Peletier du Mans, j'ai reproduit au long la traduction de Cardan par Peletier. J'y ai ajouté la critique de Cardan par ce dernier, avec la vraie manière de traiter, d'après lui, le problème (5). Ecoutons maintenant Nuñez; il ne perdra rien à être comparé à Peletier et à Cardan.

Il s'agit de trouver trois nombres A, B et C, vérifiant les relations (6)

$$A+\frac{1}{2}(B+C)=32\,;\quad B+\frac{1}{3}(A+C)=28\,;\quad C+\frac{1}{4}(A+B)=31\,.$$

dans lequel il s'embrouille complètement à trois reprises différentes et qu'il ne parvient à résoudre que par tâtonnements. Il termine sa théorie des équations à plusieurs inconnues par cette réfléxion découragée (p. 196). «Si cui modus iste calculi videatur obscurior in hac regula, cujus est etiam rarior usus, certo sciat alium communiter usurpatum longe plus afferre molestiae, multoque difficilius capi. Innata enim rebus ipsis obscuritas arte quidem levari potest, tolli autem nullo modo.»

Pour plus de détails, sur l'histoire de la résolution des équations à plusieurs inconnues au xvi[e] siècle, voir mes mémoires sur l'*Algèbre* de Peletier et le *De Arte Magna* de Gosselin.

(1) *Opera omnia*, t. 4, pp. 73-74.

(2) *Opera omnia*, t. 4, pp. 241-242. Cette solution diffère de la précédente.

(3) *Algèbre*, pp. 107-112.

(4) Il s'agit de la solution donnée dans le *De Arte Magna*.

(5) Pp. 153-154.

(6) Ff.° 224 v.°-225 r.°

Remarquons le en passant, dans sa *Summa*, Luc Paciuolo traite par la

«Teremos tres numeros, que el primero con la mitad de los otros, haze 32; y el segundo con el tercio de los otros dos, haze 28; y el tercero con el quarto de los otros dos, haze 31; y queremos saber quanto es cada uno dellos.

«Pornemos que el primero es 1 . co. x
y seran luego la mitad. del segundo y tercero
$32 . \widehat{m} . 1 . co .$ $32-x$
y el segundo y tercero $64 . \widehat{m} . 2 . co .$ $64-2x$
y pues el primero es 1 . co. seran luego todos
tres numeros $64 . \widehat{m} . 1 . co .$ $64-x$

«Agora pornemos que el segundo es 1 quantidad y
y sera por esta cuenta el primero y el tercero
juntos $64 . \widehat{m} . 1 . co . y \ \widehat{m} . 1 .$ quantidad $64-x-y$
y el tercio dellos sera $21\frac{1}{3} . \widehat{m} . \frac{1}{3} . co . \widehat{m} . \frac{1}{3}$
de quantidad $21\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y$

«Y juntando con esto el segundo que es 1 . quantidad, haremos

$21\frac{1}{3} . \widehat{m} . \frac{1}{3} . co . \widehat{p} . \frac{2}{3}$ de quantidad que seran yguales a 28.

$$\left(21\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=28\right).$$

«Ygualaremos restaurando lo diminuto, y ternemos

$21\frac{1}{3} . \widehat{p} . \frac{2}{3}$ de quantidad yguales a $28 . \widehat{p} . \frac{1}{3} . co .$

$$\left(21\frac{1}{3}+\frac{2}{3}y=28+\frac{1}{3}x\right)$$

«quantité sourde», c'est-à-dire, par une deuxième inconnue, des problèmes absolument analogues. Par exemple:

1.° Dist. 9, tract. 9, N° 26, ff. 191 v.°-192 r.°

$$A+\frac{1}{2}(B+C)=90;\quad B+\frac{1}{3}(A+C)=80;\quad C+\frac{1}{4}(A+B)+6=87.$$

2.° Dist. 9, tract. 9, N° 27, ff. 192 r.°

$$A+\frac{1}{2}(B+C)=50;\quad B+\frac{1}{3}(A+C)=50;\quad C+\frac{1}{4}(A+B)=50$$

y sacando lo superfluo que es $21\frac{1}{3}$, quedaran

$$\frac{2}{3} \text{ de quantidad yguales a } 6\frac{2}{3}\,.\,\widehat{\text{p}}\,.\,\frac{1}{3}\,.\,\text{co}\,.$$

$$\left(\frac{2}{3}y = 6\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\right)$$

y sera luego

$$\text{una quantidad ygual a } 10\,.\,\widehat{\text{p}}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\text{co}\,.$$

$$\left(y = 10 + \frac{1}{2}x\right).$$

«Y porque pusimos el segundo ser 1. quantidad sera luego segundo $10\,.\,\widehat{\text{p}}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\text{co}\,.$ $\quad 10 + \frac{1}{2}x$

«Por esta manera ayudando nos del termino quantidad, alcançamos quanto fuese el segundo.

«Sacando pues de todos tres que son $64\,.\,\widehat{\text{m}}\,.\,1\,.\,\text{co}\,.\,(= 64 - x)$ el valor del primero que es $1\,.\,\text{co}\,.\,(= x)$, y el valor del segundo, que avemos hallado ser $10\,.\,\widehat{\text{p}}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\text{co}\,.\left(= 10 + \frac{1}{2}x\right)$, quedaran $54\,.\,\widehat{\text{m}}\,.\,2\,.\,\text{co}\,.\,\frac{1}{2}\,.$ por valor del tercero $\left(54 - 2\frac{1}{2}x\right)$.

«Con el qual juntaremos $21\frac{1}{2}\,.\,\widehat{\text{p}}\,.\,\frac{3}{8}\,.\,\text{co}\,.\left(= 21\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x\right)$ que es el quarto del primero y segundo, y haran

$$56\frac{1}{2}\,.\,\widehat{\text{m}}\,.\,2\,.\,\text{co}\,.\,\frac{1}{8} \text{ que seran yguales a } 31.$$

$$\left(56\frac{1}{2} - 2\frac{1}{8}x = 31\right).$$

«Ygualaremos y resultaran

$$25\frac{1}{2} \text{ yguales a } 2\,.\,\text{co}\,.\,\frac{1}{8}\,.$$

$$\left(25\frac{1}{2} = 2\frac{1}{8}x\right)$$

y partiremos $25\frac{1}{2}$ por $2\frac{1}{8}$ y vernan 12 por valor de la cosa x

«Y tanto sera el primero numero.

«Y porque el segundo era $10 . \widehat{p} . \frac{1}{2} .$ co. sera por esta cuenta 16. $10+\frac{1}{2}x$, $y=16$

«Y porque el tercero era $54 . \widehat{m} . 2 .$ co. $\frac{1}{2}$ sera por esta cuenta 24. porque las $54-2\frac{1}{2}x$

$$2 . \text{co} . \frac{1}{2} \text{ valen} . 30 .$$

$$\left(2\frac{1}{2}x=30\right)\text{»}.$$

Le troisième nombre vaut 24.

Nuñez ajoute ([1]):

«Pero nos avemos tratado esto mismo exemplo, que es el caso 51 (des exercices résolus au chapitre 5), y lo practicamos muy facilmente, y brevemente por la cosa, sin usar de la quantidad absoluta. Y todos los casos que Fray Lucas practica por la quantidad, practicamos nos por las reglas de la cosa, sin ayuda deste termino quantidad.»

Au passage indiqué, Nuñez résout effectivement le même problème par une seule inconnue ([2]). Quant à son avis sur la facilité relative des deux solutions, il ne rencontrerait plus aujourd'hui un seul géomètre pour le partager.

V

On ne saurait trop appeler l'attention sur les 110 problèmes du chapitre 5. Avec les démonstrations littérales sur les radicaux et les proportions, ce sont eux qui donnent au *Libro de Algebra* son caractère si particulier, déjà si moderne.

Considéré dans son ensemble ce chapitre de Nuñez n'a d'analogue, chez aucun contemporain. Nuñez à un certain point de

---

[1] F.° 225 v.°
[2] Ff.° 169 v.°-170 r.°

vue surpasse tous ses émules, même les plus illustres, même les Cardan et les Stifel. Du premier au dernier sans une exception, les problèmes du chapitre 5 sont des exercices abstraits sur les nombres. Plus de ces tonneaux de vin, plus de ces aunes de drap, plus de ces querelles de voleurs, plus de ces récréations mathématiques, qui donnent par moments aux plus savantes algèbres du XVI^{e} siècle le cachet enfantin de manuels d'enseignement primaire. L'*Arithmetica integra* de Stifel, le *De arte magna* de Cardan eux-mêmes n'y échappent pas complètement.

Le style de Nuñez se ressent, semble-t-il, de celui de Diophante. Je le sais, l'édition de Xylander n'avait pas encore paru [1], mais rien n'empêchait notre auteur de connaître l'algèbriste grec par les manuscrits.

Quant au genre des problèmes, il diffère chez Diophante et chez Nuñez. Nuñez n'a, à proprement parler, aucun exercice d'analyse indéterminée. Tous les problèmes, à l'exception de deux, se ramènent à une équation déterminée à une inconnue; encore la solution de l'une des deux exceptions est-elle si embrouillée que l'auteur ne remarque pas l'indétermination.

Convenait-il d'en donner ici la liste complète?

Un moment j'ai hésité, je l'avoue, devant la longueur d'une pareille énumération. La rareté du *Libro de Algebra* m'a engagé à passer outre. J'ose l'espérer on ne le regrettera pas.

Pour abréger les énoncés je parlerai cependant un langage conventionnel. Les nombres se désigneront par les lettres a, b, c, d...; les conditions auxquelles ils doivent satisfaire par des égalités. En reprenant ensuite l'énoncé en langage vulgaire, sans lettres ni notations algébriques, il sera aisé de reconstituer le problème à peu près sous sa forme primitive.

L'auteur n'emploie jamais plus d'une inconnue; il importe de ne pas l'oublier. Malgré cette restriction quelques problèmes restent néanmoins simples, très simples mêmes; mais d'autres demandent alors de l'attention et deviennent difficiles.

Je ne dois pas le dire, pour l'historien des mathématiques les énoncés du chapitre 5, sont du plus haut intérêt; ils lui permettent, documents en main, de comparer Nuñez à ses principaux contemporains. Puis-je espérer qu'ils feront passer aussi une heure agréable aux géomètres pour qui l'histoire de leur science est l'objet d'un simple délassement? Rien ne peut leur

---

(1) L'édition de Diophante, par Xylander, parut à Bâle, en 1575.

donner une meilleure idée de l'état de l'algèbre, au moment où Viète va venir la transformer complètement.

1. $a+b=30\,; \quad a+3=2(b+5).$

2. $4a^2-20=100.$

3. $a+b=12\,; \quad a^2=b^2-30.$

4. $a-b=2\,; \quad a^2-b^2=30.$

5. $a+b=20\,; \quad \dfrac{a}{b}=20.$

6. $5\dfrac{1}{4}\left(a-\dfrac{3}{7}a\right)=a+5\dfrac{1}{4}.$

7. $a+b=30\,; \quad b=\dfrac{3}{5}a+4.$

8. $a=2b\,; \quad ab=10.$

9. $\dfrac{18-a}{15-a}=\dfrac{3}{2}.$

Au lieu de résoudre tout bonnement l'équation par rapport à a, Nuñez pose $15-a=x$.

10. $3+5a=2(2+a).$

11. $b=2a\,; \quad ab+a^2+b^2=70.$

12. $a+b=10\,; \quad ab=4a^2.$

13. $6a^2=2a^3.$

14. $a+b=20\,; \quad 4a=6b+5.$

15. $a+b=20\,; \quad 4a=3.(5b).$

16. $a+b=20\,; \quad \dfrac{a}{4}=3.\left(\dfrac{b}{5}\right).$

17. $b=\dfrac{3}{2}a\,; \quad c=\dfrac{3}{2}b\,;$ avec $ab=c$, ou $ab=\dfrac{c}{2}$, ou $ab=10c$.

Nuñez ne tient naturellement aucun compte de la solution $a=b=c=0$.

18. $a+b+c=20\,; \quad 9(2a)=3(4b)=8c.$

19. $a+b+c=20\,; \quad 2a=3b\,; \quad 4b=5c\,.$

20. $a+b+c=100\,; \quad \frac{a}{3}=4b=\frac{c}{5}\,.$

21. $a+b+c=100\,; \quad \frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}\,.$

22. $a+b+c=100\,; \quad 3\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{b}{5}\,; \quad 3\left(\frac{b}{5}\right)=\frac{c}{6}\,.$

23. $a+b=10\,; \quad 10-a=a-b\,.$

24. $b=2a\,; \quad \frac{a}{4}\cdot\frac{b}{3}=20\,.$

25. $\frac{30}{4a}=1\frac{1}{2}a\,.$

26. $b=\frac{3}{2}a\,; \quad c=\frac{3}{2}b\,; \quad abc=12\,.$

27. $a\sqrt{a}=4\,.$

28. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}=\frac{2}{3}\,.$

29. $a+b=10\,; \quad a^2-b^2=100-a^2\,.$

30. $ab=\frac{3}{2}a=\frac{4}{3}b\,.$

31. $a+b+c+d+e+f=60\,; \quad f-e=e-d=d-c=c-b=b-a=3\,.$

32. $a+b+c+d+e+f=60: \quad a=5\,; \quad f-e=e-d=d-c=c-b=b-a\,.$

La raison $b-a$ de la progression est prise pour inconnue.

33. $a+b=12\,; \quad a+\frac{1}{3}b=7\,.$

34. $a+b=12\,; \quad a+\frac{1}{6}b=b+\frac{1}{5}a\,.$

35. $a+\frac{1}{5}b=8\,; \quad b+\frac{1}{6}a=11\,.$

36. $2(b-2)=a+2; \quad 3(a-2)=b+2.$

37. $8+a=12+\frac{1}{8}a.$

38. $a+b+c+d=127; \quad b+c+d+e=119;$
$c+d+e+a=109; \quad d+e+a+b=104; \quad e+a+b+c=97.$

39. $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{16}a^2=a.$

40. $a+b+c+d+e=100; \quad b=a+3;$
$c=b+7; \quad d=c+10; \quad e=d+20.$

41. $a+b+\frac{1}{2}c=100; \quad b+c+\frac{1}{3}a=100; \quad c+a+\frac{1}{4}b=100.$

42. $a+\frac{2}{3}(b+c)=100; \quad b+\frac{3}{4}(c+a)=100; \quad c+\frac{4}{5}(a+b)=100.$

43. $a+\frac{2}{3}(b+c+d)=40; \quad b+\frac{3}{4}(a+c+d)=40;$

$c+\frac{4}{5}(a+b+d)=40; \quad d+\frac{5}{6}(a+b+c)=40.$

Solution: $a=24$, $b=16$, $c=8$, $d=0$. Cette solution déplait à Nuñez[1].

44. $a+\frac{1}{2}b=60; \quad b+\frac{1}{3}c=60; \quad c+\frac{1}{4}a=60.$

45. $a+b+c=d;$

$$a-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{5}c\right)=\frac{1}{2}d;$$

$$b-\frac{1}{4}b+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{5}c\right)=\frac{1}{3}d;$$

(1) F.° 165 v.°. «Esto que en este caso avemos obrado ygualando 40 con 40 . $\widehat{\text{m}}$. $\frac{3}{5}$. co . y concluyendo que cifra de numero es ygual a $\frac{8}{5}$. co . es lo que communmente los Arithmeticos practicos dizen, pero es fuera de my opinion, y lo contrario tengo escripto.

$$c-\frac{1}{5}c+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{5}c\right)=\frac{1}{6}d.$$

Nuñez pose $d=6x$, puis par un raisonnement très embrouillé il arrive à la solution

$$a=177\,,\quad b=92\,,\quad c=25\,,\quad d=294\,.$$

Il prouve ensuite minutieusement que cette solution convient, mais ne s'aperçoit pas que le problème est indéterminé. Non seulement Stifel, mais même Peletier, Petri ou Gosselin, habitués à manier des systèmes d'équations à plusieurs inconnues, eussent, probablement, tout au moins vu sans peine que la solution

$$a=k.177\,,\quad b=k.92\,,\quad c=k.25\,,\quad d=k.294\,,$$

convient également.

46. $$\frac{ab}{a-b}=16\,.$$

Le problème est indéterminé; mais cette fois l'auteur le remarque.

47. $a+\frac{1}{8}b=6\left(b-\frac{1}{8}b\right)$; $b+\frac{1}{7}a-6\left(a-\frac{1}{7}a\right)$.

48. $a+10=b-10$; $b+10=2(c-10)$; $c+10=3(a-10)$.

49. $a+d=2(b+c)=100$; $b+d=115$; $c+d=120$.

50. $a+\frac{1}{3}b+4=2\left(b-\frac{1}{3}b\right)$; $b+\frac{1}{2}a+6=5\left(a-\frac{1}{2}a\right)$.

51. $a+\frac{1}{2}(b+c)=32$; $b+\frac{1}{3}(a+c)=28$; $c+\frac{1}{4}(a+b)=31$.

Cet exercice dû à Cardan est classique chez les algébristes du XVI[e] siècle. Nous l'avons déjà rencontré, car, on se le rappelle, c'est précisément l'exemple choisi par Nuñez pour expliquer la résolution des systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Dans la solution actuelle il n'en emploie qu'une seule. Je ne le repète plus, d'après lui cette solution est la bonne solution; l'autre un objet de pure curiosité.

52. $a+b=10$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}=4$.

53. $a+b=10;\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2\frac{16}{21}.$

54. $a+b=10;\quad \frac{a}{b}=\frac{1}{2}ab.$

55. $a+b=8;\quad \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=18\frac{2}{3}.$

56. $b=2\frac{1}{2}a;\quad b-a=9.$

57. $a\cdot\frac{a}{3}=20.$

58. $a+b+c+d=12;\quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d};\quad a+c=4;\quad b+c=12.$

Nuñez exprime explicitement les cinq conditions. Dans les longs énoncés du XVI^e siècle formulés en langage ordinaire, sans notations algébriques, la surabondance des conditions se déguise avec une facilité relative. Ne sautant pas immédiatement aux yeux, elle n'est pas choquante.

59. $2a+a^2=15.$

60. $3a^2+4a=20.$

61. $(a+4)a=21.$

62. $a+20=a^2.$

63. $6a=a^2+8.$

64. $a+b=8;\quad a^2+b^2+ab=49.$

65. $a+b=12;\quad \sqrt{a}\sqrt{b}=5.$

66. $ab=6;\quad a^2-b^2=5.$

67. $a+b=18;\quad \sqrt{a}-\sqrt{b}=2.$

68. $a+b=10;\quad a^2+b^2=60.$

69. $a+b=8;\quad a^2+b^2-ab=20.$

70. $a+b=10;\quad \frac{a}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{20}}{b}.$

71. $a^2+b^2=30;\quad ab=10.$

Solution très intéressante. Nous y reviendrons.

72. $a+b=10$; $a^2=3b^2$.

73. $a^2+b^2=34$: $a+b+ab=23$.

74. $ab=10$; $a+b+a^2+b^2=36$.

75. $a+b=12$; $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=18$.

76. $a+30=\frac{5}{3}(b-30)$; $b+\frac{30}{b}.a=7\left(a-\frac{30}{b}.a\right)$.

77. $a+\frac{9}{a}.b=b-\frac{9}{a}.b+18$; $a-\frac{10}{b}.a=b+\frac{10}{b}.a-24$.

Exercice dont il doit l'idée, dit-il, à frère Luc de Burgo (1).

78. $a+b+c=26$; $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$; $2a+3b+4c=94$.

79. $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$; $a+\frac{4}{a}.b=3\left(b-\frac{4}{a}.b\right)$; $b+\frac{5}{b}.a=4\left(a-\frac{5}{b}.a\right)$.

En résolvant le problème au moyen des deux premières équations Nuñez trouve

$$a=7\frac{3}{11}; \quad b=9\frac{1}{11}.$$

Il constate ensuite que la solution vérifie la 3e équation; donc le problème est possible. En guise de discussion il montre que la 3e condition ne peut plus se donner tout à fait arbitrairement.

80. $a+b+c=26$; $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$; $3a+5b=2c$.

Nuñez pose

$$b=2x, \quad \text{d'où } ac=4x^2, \quad \text{et } a+c=36-2x.$$

(1) F.° 184 v.°. Beaucoup d'autres problèmes de Nuñez lui sont encore empruntés. Sans les nommer tous, nous en indiquerons cependant plus loin quelques uns où la comparaison des solutions offre de l'intérêt.

Puis il détermine a et c en fonction de x par une équation du 2^e degré. Cet artifice pour trouver deux nombres dont il connait la somme et le produit est chez lui d'une usage courant.

81. $a+b+c=12; \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}; \quad a^2+b^2+c^2=96.$

Nous reviendrons à cet exercice.

82. $a+b=ab; \quad a^2+b^2+a+b=90.$

L'auteur pose $a+b=x$, d'où il déduit sans peine

$$x^2-x=90.$$

83. $a+b+c+d=60; \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}; \quad a+b=6; \quad c+d=54.$

84. $a+b+c+d=80; \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}; \quad b+c=24; \quad a+d=56.$

85. $a-b=4; \quad a^2+b^2=80.$

86. $a+b+c+d=80; \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}; \quad (a+b)(c+d)=576.$

87. $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}; \quad 9-a=8-b.$

Nous reviendrons à cet exercice.

88. $a+\sqrt{b}=b-\sqrt{b}+1; \quad b+\sqrt{a}=a-\sqrt{a}+10.$

89. $\frac{20}{a}=a+4.$

90. $a+b+c=14; \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}; \quad abc=64.$

91. $a+b+c=10; \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}; \quad ab+ac+bc=30.$

Méthode analogue à celle du N° 81.

92. $a+b+c=10; \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}; \quad a^2+b^2=c^2.$

Cardan, dit Nuñez [1], propose le même exercice mais sur le nombre 14. Il s'y trompe dans le calcul des radicaux. Il s'agit bien entendu chez Cardan d'une simple faute de plume. Mieux que personne l'algébriste italien connaissait le 10ᵉ livre d'Euclide et le calcul des radicaux. C'était au xviᵉ siècle la branche la plus relevée de la science. «Obscuritatem habet singularem», disait Gosselin [2].

93. $$ab = (a - b)^2; \quad a^2 + b^2 = 20.$$

94. $$(a - b)(a^2 - b^2) = 10; \quad (a + b)(a^2 + b^2) = 20.$$

Exercice emprunté au chapitre 34 du *De Arte Magna* de Cardan [3], qui y expose une méthode de solution appelée par lui «Regula medii».

95. $$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad ac = 5; \quad bd = 15.$$

96. $$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad ab = 5; \quad cd = 10.$$

97. $$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \quad a^2 + b^2 = c^2; \quad ab = 10.$$

98. $$a + b = 12; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{10}.$$

99. $$ab = 12; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{2}.$$

100. $$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad abcd = 81; \quad ab = 6.$$

101. $$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \quad abcd = 100; \quad a + d = 7.$$

---

(1) F.° 208 r.° et v.°. C'est effectivement l'exercice n° 80 du chap. 66 de la *Practica Arithmeticae* (*Opera omnia*, t. 4, pp. 159-160). Nuñez emprunte beaucoup des exercices de son chapitre 5, à ce chapitre de Cardan, mais en changeant parfois les données numériques. Il est souvent du plus haut intérêt de comparer les solutions des deux grands algébristes.

(2) *De Arte magna*, lib. 2, cap. 10, f.° 47 v.°.

(3) *Opera omnia*, t. 4, p. 280. Voir sur ce sujet: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra*.... di D. Pietro Cossali, t. 2, Parme, 1799, cap. 1, pp. 3-4.

102. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$; $a+b+c+d=13$; $(a+b)(c+d)=36$.

103. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$; $a+b+c+d=15$; $a^2+b^2+c^2+d^2=85$.

104. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$; $ab=c$; $a^2+b^2=c^2$.

105. $a+b+c=10$; $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$; $ac=3ab$.

106. $a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c=12$; $b+\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}c=15$;

$$c+\frac{1}{4}a+\frac{1}{5}b=20.$$

Exercice proposé dans la *Summa* de Paciuolo [1], où il est donné sans développement de la solution.

107. $a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c=12$; $b+\frac{1}{4}a+\frac{1}{5}c=15$;

$$c+\frac{1}{6}a+\frac{1}{8}b=20.$$

108. $a+\frac{1}{2}(b+c)=90$; $b+\frac{1}{2}(a+c)=84$;

$$c+\frac{1}{4}(a+b)+6=87.$$

Emprunté à Paciuolo qui le résout par plusieurs inconnues [2]. Nuñez critique la méthode suivant son habitude [3].

109. $a+10=2(b+c)$; $b+10=3(a+c)$; $c+10=4(a+b)$.

Emprunté à Paciuolo [4].

---

(1) Dist. 9, tract. 9, n° 37, f.° 193 v.°
(2) *Summa*. Dist. 9, tract. 9, n° 26, ff.° 191 v.°-192 r.°
(3) F.° 221 r.°
(4) *Summa*. Dist. 9, tract. 9, n° 28, f.° 192 r.° et v.°. Paciuolo y représente successivement les inconnues par la même notation 1.co. sans employer plusieurs lettres différentes.

«Fray Lucas pone este caso en los mismos numeros pero haze nueva posicion (*c. à d.* une 2[e] inconnue) y quesimos monstrar mas facil uso de las reglas de la cosa.» [1]

C'est toujours la même chose.

110. $a+\frac{1}{3}(b+c)+4=100;\quad b+60=2(a+c-60)-4;$

$$c+\frac{1}{4}(a+b)+5=3\left[a+b-\frac{1}{4}(a+b)-5\right]-5.$$

Emprunté à Paciuolo [2].

Solution très intéressante car elle conduit Paciuolo à l'équation

$$x+79=0 \quad \text{d'où } x=-79.$$

Nuñez en prend occasion pour s'élever violemment contre les quantités négatives: «La verdad es, dit-il, que el caso es impossible; porque impossible es, que numero y cosas sean yguales a cifra, y que 1.co. sea ygual a $\widehat{m}$.79. Y si entendio que $\widehat{m}$.79. es aun menos que nihil, a que llaman debito, esto es mera vanidad, y pura contradition.» [3]

Pour faire plus ample connaissance avec les méthodes de Nuñez, apprécier son ingéniosité et son adresse, il convient d'examiner en détail la solution de quelques uns de ces exercices; ils donneront l'idée des autres. On le remarquera, ils ne sont pas choisis parmi les plus difficiles.

Exercice 71. [4]

Chercher deux nombres dont le produit fasse 10 et la somme des carrés 30.

Nuñez résout la question de trois manières. Il compare ensuite les résultats trouvés et les discute, ce qui ne lui cause pas un mince embarras. Je résume, mais en gardant cependant, dans chaque solution assez d'intermédiaires pour lui conserver son caractère propre.

1[e] Solution. Soit x le plus petit nombre; $\frac{10}{x}$ sera le plus

---

(1) F.° 221, v.°

(2) *Summa.* Dist. 9, tract. 9, n.° 29, f.° 192 v.°

(3) F.° 224 r.°

(4) Ff.° 179 v.°-181 r.°

grand et l'on aura:

$$x^2 + \frac{100}{x^2} = 30: \quad x^4 + 100 = 30x^2; \quad x^2 = 15 - \sqrt{125}.$$

Donc $15 - \sqrt{125}$ est le carré du plus petit nombre et $15 + \sqrt{125}$ le carré du plus grand.

Par conséquent les deux nombres sont $\sqrt{15 - \sqrt{125}}$ et $\sqrt{15 + \sqrt{125}}$.

2e *Solution.* Nuñez, avons-nous dit, considère la solution $x = 0$, comme une absurdité. Dans son souci de la rigueur il se croit donc obligé de démontrer au préalable que cette hypothèse ne se vérifiera pas. Pour cela, dans le cas actuel, il prouve que les deux nombres sont certainement inégaux. Car s'ils étaient égaux, dit-il, chacun des deux vaudrait $\sqrt{10}$; la somme de leurs carrés vaudrait donc 20 et non pas 30 contrairement à l'hypothèse.

Ceci établi, il est maintenant permis de représenter les carrés des deux nombres respectivement par $15 - x$ et $15 + x$. Les nombres eux-mêmes seront alors $\sqrt{15 - x}$ et $\sqrt{15 + x}$. On a donc:

$$\sqrt{15-x}\sqrt{15+x} = 10; \quad 225 - x^2 = 100; \quad x^2 = 125; \quad x = \sqrt{125}.$$

Les carrés des deux nombres sont donc $15 - \sqrt{125}$ et $15 + \sqrt{125}$; et par conséquent les deux nombres eux-mêmes sont $\sqrt{15 - \sqrt{125}}$ et $\sqrt{15 + \sqrt{125}}$.

3e *Solution.* Euclide a démontré dans la proposition 5 du livre 2 des *Eléments* que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Par conséquent le carré de la somme des deux nombres donnés vaut 50 et la somme elle même $\sqrt{50}$. Ceci fait, Nuñez prouve de nouveau que les nombres proposés sont certainement inégaux. On peut donc les représenter respectivement par $\frac{1}{2}\sqrt{50} - x$ et $\frac{1}{2}\sqrt{50} + x$, ou $\sqrt{12\frac{1}{2} - x}$ et $\sqrt{12\frac{1}{2} + x}$. D'où

$$12\frac{1}{2} - x^2 = 10; \quad x^2 = 2\frac{1}{2}; \quad x = \sqrt{2\frac{1}{2}}.$$

Les deux nombres sont donc $\sqrt{12\frac{1}{2}}-\sqrt{2\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{12\frac{1}{2}}+\sqrt{2\frac{1}{2}}$.

Que la solution du problème soit donnée en racines universelles $\left(\sqrt{15-\sqrt{125}}\right.$ et $\left.\sqrt{15+\sqrt{125}}\right)$ ou en racines liées $\left(\sqrt{12\frac{1}{2}}-\sqrt{2\frac{1}{2}}\right.$ et $\left.\sqrt{12\frac{1}{2}}+\sqrt{2\frac{1}{2}}\right)$, dit ici en substance Nuñez en guise de discussion, peu importe; l'une et l'autre de ces formes fournit une solution exacte du problème. Il est aisé de vous en assurer, car dans chacune de ces solutions, la somme des carrés des nombres trouvés vaut 30 et leur produit vaut 20.

Puis vient cette remarque intéressante (1):

Pour prouver l'équivalence des solutions vous raisonneriez mal en disant

$$\sqrt{12\frac{1}{2}}+\sqrt{2\frac{1}{2}}=\sqrt{15+\sqrt{125}}$$

car si j'élève les deux membres au carré, chacun d'eux me donne $15+\sqrt{125}$. De l'égalité des carrés vous n'avez pas le droit de conclure à l'égalité des racines. Je vous l'ai expliqué ci dessus (2) sur l'exemple $\sqrt{9x^4+16x^2-24x^3}$. Cette expression représente indifféremment $3x^2-4x$ ou $4x-3x^2$. Cependant vous n'avez aucun droit d'on conclure

$$3x^2-4x=4x-3x^2.$$

Nuñez n'admettant pas les quantités négatives, cette existence incontestable de la double racine carrée des polynomes prend pour lui le caractère du plus inextricable des paradoxes. Il faut lui céder ici la plume et l'écouter lui même (3): «Y en esta parte, dit-il, notaremos una cosa muy digna de se saber y que pero es muy difficil, y muy estraña a nuestro entendimiento, por el poco exercicio que tenemos en las subtilezas de Arithmetica; y esto es, que dos quantidades son yguales, mas la raiz de la una no es ygual a la raiz de la otra».

(1) F.° 181 r.°
(2) Au chap. 1 de la 3e partie.
(3) F.° 134 v.°

En pratique on voit cependant parfois pourquoi cela a lieu et ce qu'il convient de faire. Ainsi soit

$$9x^4 + 16x^2 - 24x^3 = 225.$$

Prenez d'abord

$$(3x^2 - 4x)^2 = 225$$

d'où

$$3x^2 - 4x = 15 \qquad \text{et } x = 3.$$

Cette solution convient.

Prenez au contraire

$$(4x - 3x^2)^2 = 225$$

vous obtiendrez

$$4x - 3x^2 = 15$$

ce qui est une équation impossible. Ses racines sont en effet imaginaires. Les deux expressions ne sont donc pas égales. La première seule est admissible, la deuxième doit être rejetée. Mais tout ceci est dit dans un style obscur, diffus, dont Nuñez, toujours si clair, n'est pas coutumier. En réalité il n'a pas vu la solution de la difficulté.

Exercice 81.

Partager 12 en trois parties proportionnelles dont la somme des carrés fasse 96.

On peut dit Nuñez trouver une règle générale pour résoudre toutes les questions de ce genre. Voici pas à pas en notations modernes son raisonnement [1]. Soit donné

$$x + y + z = a \tag{1}$$

$$xz = y^2 \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2. \tag{3}$$

Elevons (1) au carré

$$(x + y + z) = a^2 \tag{4}$$

[1] F.° 191 v.°

retranchons (3) de (4)

$$2xy + 2xz + 2yz = a^2 - b^2$$

ou, à cause de (2)

$$2xy + 2y^2 + 2yz = a^2 - b^2$$

ou, à cause de (1)

$$2ay = a^2 - b^2$$

d'où

$$y = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Connaissant y, on connait $x + z$ et xz. On détermine x et z par une équation du 2^e degré.

Nous sommes au XVI^e siècle, ne l'oublions pas, et ce raisonnement est donné comme général et s'appliquant à tous les cas. Je mets au défi de trouver un sujet analogue traité avec plus d'élégance par Cardan ou par Stifel!

Exercice 87 (1).

Chercher deux nombres qui soient entre eux dans le rapport de $\frac{7}{4}$, et tels qu'en retranchant le plus grand de 9 et le plus petit de 8 les deux restes soient égaux.

Soit $7x$ le plus grand nombre et $4x$ le plus petit. L'équation du problème est

$$9 - 7x = 8 - 4x \qquad \text{d'où } x = \frac{1}{3}.$$

Les deux nombres demandés sont donc $\frac{7}{3}$ et $\frac{4}{3}$.

Pour que le problème soit possible, dit Nuñez, le rapport des nombres dont on soustrait, doit être inférieur au rapport des nombres cherchés. Admirons le style de la démonstration.

Soient a et b les nombres cherchés $a > b$; c et d les deux nombres dont on soustrait $c > d$.

«Los dos numeros que buscamos sean a y b, el mayor a, y

(1) Ff.° 196 r.°-197 v.°

el menor b; y los dos numeros de los quales nos avemos de sacar sean c y d, el mayor c, y el menor d.

«Y sacando a de c sea lo que queda e; y sacando b de d, sea lo que queda f; y porque los numeros que quedan han de ser yguales, seran luego yguales e y f.

$$(\text{Posons } c-a=e, \quad d-b=f; \quad \text{on a } e=f)$$

«Y porque a es mayor que b, menor proporcion aura luego de e para a que de f para b, por la proposicion 10 del 5 lib. de Euclid.

$$\left(a>b, \quad \text{donne } \frac{e}{a}<\frac{f}{b}\right)$$

«Y por la conjunta, demonstrada por Campano (1) en el mismo 5 libro, menor sera la proporcion de e y a juntas para a, que de f y b juntas para b.

$$\left(\frac{e+a}{a}<\frac{b+f}{b}\right)$$

«Y por que c consta de a y e, y d consta de b y f, menor sera tambien la proporcion de c para a que de d para b.

$$\left(\text{or, } c=e+a, \quad d=f+b; \quad \text{donc } \frac{c}{a}<\frac{d}{b}\right)$$

«Y permutando, menor sera la proporcion de c para d, que de a para b.

$$\left(\frac{c}{d}<\frac{a}{b}\right)$$

«Por esta demonstracion queda claro que los dos numeros de que avemos de sacar otros que tengan una cierta propor-

---

(1) Sur la traduction et le commentaire d'Euclide par Campanus, voir Cantor, *Vorlesungen*, 2e ed., t. 2, pp. 100-106. L'Euclide de Campanus a été souvent réédité. On trouvera le titre exact de ces éditions avec leur date dans: *Saggio di una bibliografia Euclidea*, par Pietro Riccardi. Memorie della Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. 4e ser., t. 8, Bologne 1887, et 5e ser., t. 1, Bologne, 1889.

cion, y que los numeros que quedan sean yguales, no pueden tener ygual proporcion o mayor, que la proporcion de los numeros que buscamos para dellos los sacar.»

Ces trois exemples, choisis intentionnellement parmi ceux qui semblent au premier abord les plus simples, montrent combien ce chapitre de Nuñez est intéressant. Pour en trouver d'autres, non moins curieux, on n'aurait que l'embarras du choix.

VI

Pour terminer l'analyse du *Libro de Algebra*, reste à parcourir le chapitre 7, contenant l'application de l'algèbre à la géométrie. Les exercices de ce chapitre, au nombre de 77, se classent en six groupes.

1° Le carré (1-14).

2° Les rectangles non carrés (15-31).

3° Les triangles (32-64).

4° Les rombes et les romboïdes, c'est à-dire, les losanges et les simples parallélogrammes (65-69).

5° Les trapèzes. Sous ce nom il faut entendre les simples quadrilatères, sans en exclure les trapèzes au sens actuel du mot (70-74).

6° Les pentagones (75-77).

Le troisième de ces groupes est, à la fois, de beaucoup le meilleur et le plus intéressant. Nuñez se propose d'y reprendre le second livre du traité *De Triangulis* de Regiomontan [1], de le compléter et de le perfectionner. Il y réussit à souhait. Voici les énoncés des problèmes résolus. Dans l'auteur, cela va de soi, ils sont exprimés au long, en langage courant, mais pour abréger je désigne:

Par A, B, C, les trois angles; a, b, c, les côtés opposés; p, le demi perimètre; s, la surface; r, le rayon du cercle inscrit; R celui du cercle circonscrit; h la hauteur abaissée de l'angle A.

De plus k et l désignent les deux segments déterminés sur a par le pied de la hauteur, adjacents respectivement aux côtés b et c; k' et l', désignent de même les segments analogues déterminés sur a, par le point de contact du cercle inscrit.

Les numéros d'ordre qui précèdent les énoncés, sont ceux

(1) *Doctissimi viri et mathematicarum disciplinarum eximii professoris Joannis de Regio Monte de triangulis omnimodis libri quinque*... Norimbergae. In aedibus Io. Petri. Anno Christi M.D.XXXIII.

des exercices dans l'original. Nuñez ne fait aucun usage des tables trigonométriques.

32. Suivant que $a^2 \lesseqgtr b^2 + c^2$ ou a $A \lesseqgtr 1$ droit.

33. On donne a, b, c; ou demande h, k et l.

Longue solution où l'auteur n'a cependant pas de difficultés extraordinaires à vaincre. Mais il croit devoir distinguer plusieurs cas suivant la nature du triangle Il donne ensuite, pour chacun d'eux, par plusieurs procédés différents, le calcul des segments déterminés sur les côtés par les pieds des hauteurs. Ces segments évalués, la longueur des hauteurs se trouve par le théorème du carré de l'hypoténuse.

34. On donne a, b, c; on demande s. *Rép.* $s = \frac{1}{2} ah$.

35. On donne $A = 90^\circ$, b et c; ou bien $A = 90^\circ$, a et c; on demande s.

36. On donne $A = 90^\circ$, $2p$, et la condition $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$; on demande a, b, c.

37. On donne a, b, c; on demande s. *Rép.* $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Exercice très remarquable; nous y reviendrons.

38. On donne p et s; on demande a, b, c. Problème indéterminé.

39. On donne $A = 90^\circ$, p et s; on demande a, b et c. *Rép.* $a = \frac{2p^2 - 2s}{2p}$.

40. On donne $A = B = C$ et s; on demande a et h.

41. On donne $A = B = C$ et h; on demande a et s.

42. On donne h et $a:b:c$; on demande a, b et c.

43. On donne s et $a:b:c$; on demande a, b et c.

44. On donne k, l et $\frac{b}{c}$; on demande b, c, h et s (1).

45. On donne k, l, et $b + c$; on demande b, c, h et s.

46. On donne a, h et $\frac{b}{c}$; on demande b, c, k et l.

Problème dont Regiomontan donne déjà une solution par l'algèbre (2). Sa méthode diffère de celle de Nuñez. Les solu-

---

(1) Le même problème est repris plus loin sous le N° 50. Regiomontan traite aussi deux fois le problème au livre II *De Triangulis*, N° 13, pp. 51–52 et N° 21, p. 55.

(2) *De Triangulis*. Lib. 2. N° 12, p. 51. La solution de cet exercice est fort exactement donnée dans les *Vorlesungen* de Cantor, 2e ed., t. 2, p. 269.

tions des deux auteurs sont intéressantes à comparer et Nuñez lui même nous invite à le faire. A la fin de l'exercice précédent il dit à ce propos (1):

«Quien sabe por Algebra, sabe scientificamente. Principalmente que vemos algunas vezes, no poder un gran Mathematico (entendez Regiomontan) resolver una question por medios geometricos, y resolver la por Algebra, siendo la misma Algebra sacada de la Geometria, que es cosa de admiracion. Y tal es la siguiente question (c. à d. le N° 46), la qual es semejante a la 12, del segundo libro de los triangulos de Iuan de Monteregio, el qual confiessa, que no la pudo resolver per medios geometricos, que era su instituto en aquel libro, socorriose por esa causa a esta subtilissima arte de Algebra.»

47. On donne a, h et $b+c$; on demande b et c.

Au cours de la solution, Nuñez critique, cette fois, la méthode de Regiomontan.

48. On donne k, l et $b-c$; on demande a, b et c.

49. On donne b, c et $\frac{k}{l}$; on demande a, h et s.

50. On donne k, l et $\frac{b}{c}$; on demande a, b, c, h et s.

51. On donne $k-l$, $b-c$ et h; on demande k, l, a, b et c.

C'est, on le sait, un deuxième exercice de son livre 2, *De Triangulis* (2), dont Regiomontan donne la solution par l'algèbre. Nuñez le fait de nouveau remarquer (3):

«Esta es la proposicion 23, dit-il, del segundo libro de los triangulos de Iuan de Monteregio, la qual el tambien resuelve por Algebra, y con menos obra. Pero presupone otra proposicion, que se demuestra por el segundo libro de Euclides. Y por esta causa para mas facilidad, usando de menos principios, hize la posicion otra arte.»

Réflexion dont il serait intéressant de discuter l'exactitude. Mais il faut me limiter. Aussi bien toutes les démonstrations de Nuñez mériteraient-elles d'être comparées à celles de Regiomontan.

52. On donne b, c et s; on demande a.

53. On donne a, b et c; on demande r. *Rép.* $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

(1) F.° 270 v.°

(2) N° 23, pp, 55-56. Voir la solution de Regiomontan dans les *Vorlesungen* de Cantor. 2e ed., t. 2, p. 269-270.

(3) F.° 274 v.°

54 On donne a, b et c; on demande R.

Au cours de la démonstration Nuñez donne la formule $2R = \frac{bc}{h}$ comme due à Regiomontan [1]. On la trouve effectivement dans la proposition 24 du livre 2 *De Triangulis* [2].

55. On donne R et $a:b:c$; on demande a, b et c.

56. On donne r et $a:b:c$; on demande a, b et c.

57. On donne a, b et c; on demande k', l', et la distance du centre du cercle inscrit aux trois sommets du triangle.

58. On donne r, k' et l'; on demande b et c.

59. On donne a, b et c, et les segments déterminés sur a, par le pied D d'une droite AD issue de A; on demande la longueur de AD.

60. Calculer le côté du triangle équilatéral en fonction du rayon du cercle circonscrit.

61. Calculer le côté du carré inscrit dans un triangle équilatéral.

62. Calculer le côté du carré inscrit dans un triangle quelconque.

63. On donne a, b et c; on demande de déterminer le centre de gravité du triangle et de calculer la distance de ce centre de gravité aux trois sommets.

Démonstration intéressante où Nuñez fait preuve d'une grande connaissance des oeuvres d'Archimède.

64. Etant donnés a, b et s, quelles conditions doivent remplir les autres éléments du triangle, pour que c puisse admettre plusieurs valeurs? *Rép.* Les angles compris entre a et b doivent être supplémentaires. Le résultat est bien simple, mais contrairement à son habitude Nuñez y arrive par une démonstration embrouillée.

Que ne puis-je ici comparer en détail Nuñez et Regiomontan? Ce serait malheureusement allonger mon travail hors de toute mesure. Encore une fois, il faut me limiter, et malgré son intérêt, je renonce à cette étude.

Examinons donc une dernière question et je termine.

Le rôle singulièrement important joué dans la théorie des triangles de Nuñez par la formule

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

---

(1) F.° 276 v.°

(2) P. 56. Voir cette démonstration dans les *Vorlesungen* de Cantor, 2e ed., t. 2, p. 268.

frappe de prime abord. Elle revient à tout propos, à l'égal d'un théorème d'Euclide.

La formule est de Héron [1]. Tout le monde le sait aujourd'hui; mais en 1567 il n'en était pas de même, car Héron était alors fort peu connu. En réalité Nuñez n'emprunte pas la formule à Héron; elle était alors tombée déjà, dit-il lui même [2], dans le domaine public. Quant à la démonstration de la formule on la doit, d'après lui, à Paciuolo [3]. Malheureusement, ajoute-t-il, frère Luc est si obscur que pour plusieurs il n'y a rien à comprendre à sa démonstration [4]. Il va donc tâcher d'être à la fois plus rigoureux et plus clair.

Voici comment il s'y prend:

Je résume, car la démonstration de Nuñez ne compte pas moins de 21 pages d'un texte des plus serrés et où les alinéas sont rares [5]. Pour la suivre il faut, la plume à la main, traduire au fur et à mesure le raisonnement en notations modernes. Mais la chaîne de ce raisonnement est si solide, son agencement si curieux, qu'à en examiner un à un tous les anneaux, on ne regrette vraiment ni son temps, ni sa peine.

Comme préliminaires, nous avons la démonstration de trois «fondements»; nous dirions aujourd'hui trois lemmes. Au premier abord on n'en aperçoit pas l'utilité, mais ils ne sont pas explicitement dans Euclide et l'auteur va les invoquer au cours des raisonnements. Le souci de la rigueur exige donc leur démonstration préalable. Les voici en langage moderne.

Lemme I. Etant donnés deux nombres a et b, on a

$$\frac{a^2}{ab}=\frac{ab}{b^2}=\frac{a}{b}.$$

Lemme II. Etant donné un triangle ABC, si pour un point D

---

(1) *Heronis Alexandrini quae supersunt opera omnia*, edid. Wilhelm Schmidt et Hermann Schöne, T. 3, Leipzig, Teubner, 1903, pp. 18-25.

(2) «Esta arte de medir hallo en todos los libros que tratan de midicion.» F.° 249 v.°

(3) Il la donne en effet dans la *Summa Geometriae*, Dist. 1, f.° 11 r.° Voir sur ce sujet Cantor. *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, 2e ed., t. 2, p. 330.

(4) «La demonstracion trae Fray Lucas de Burgo, pero tan obscuramente que no se podra entender de todos.» Ff.° 249 v.°-250 r.°

(5) Ff.° 249 r.°-259 r.°

de la base BC, on a la relation

$$\overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{BA}^2$$

la droite AD est perpendiculaire sur BC.

La démonstration se fait par l'absurde.

Nous dirions aujourd'hui plus simplement: Le lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante, est une perpendiculaire à la droite qui joint les deux points. Mais un énoncé de cette forme est absolument étranger au style du XVI^e^ siècle.

Lemme III. Dans un produit de *trois* facteurs on peut intervertir l'ordre des facteurs.

Ces lemmes prennent huit pages; puis vient la solution de l'exercice.

Pour la donner en langage moderne, soient, comme précédemment, A, B, C, les trois sommets du triangle; a, b, c, les longueurs des trois côtés; p, le demi-périmètre; s la surface; I et r, le centre et le rayon du cercle inscrit; A', B', C' les points de contact du cercle inscrit respectivement avec a, b, c.

Enfin I_a, r_a, A'', B'', C'', sont cinq éléments qui, de fait, sont le centre et le rayon du cercle ex-inscrit dans l'angle A, ainsi que les points de contact de ce cercle, avec les côtés a, b et c; mais, il importe de le remarquer, l'auteur ne les définit pas comme tels. Nous donnerons la définition adoptée par Nuñez au moment voulu.

Ceci posé la démonstration se divise en quatre parties.

1^e^ partie. La surface d'un triangle peut s'exprimer par

$$s = pr.$$

Nous écririons au jourd'hui en trois lignes

$$s = \mathrm{IBC} + \mathrm{ICA} + \mathrm{IAB}$$

$$\mathrm{IBC} = \frac{1}{2} r \, . \, a\,; \qquad \mathrm{ICA} = \frac{1}{2} r \, . \, b\,; \qquad \mathrm{IAB} = \frac{1}{2} r \, . \, c$$

$$s = \frac{1}{2} r(a + b + c) = pr.$$

C'est pas à pas le raisonnement de Nuñez. Mais donné sans aucune notation algébrique, à grand renfort d'énoncés de théorèmes d'Euclide, il devient d'une longueur invraisemblable.

Arrivé au bout, l'auteur sent le besoin de reprendre haleine: «Y esto, dit-il, après avoir établi la formule, se guarde en la memoria para su tiempo.» (1)

Remarquons le cependant en passant, l'expression $s = pr$ n'était pas neuve. Les Grecs l'avaient connue et dès le début du XVI[e] siècle elle était partout, chez les Latins, d'un usage courant. Pour ne citer que le *De Triangulis* de Regiomontan, Nuñez pouvait la lire au cours de la proposition 15 du livre 2.

2[e] *partie.* On a

$$AB' = AC' = p - a; \qquad BC' = BA' = p - b; \qquad CA' = CB' = p - c.$$

Ici vient la définition des points A'', B'', C''. On les obtient en portant sur BC la longueur

$$BA'' = CA'$$

puis respectivement sur AB et AC prolongés

$$BC'' = BA''; \qquad CB'' = CA''.$$

On démontre alors que

$$BC'' = BA'' = p - c; \qquad CB'' = CA'' = p - b.$$
$$AB'' = AC'' = p.$$

3[e] *partie.* Les triangles I_aBC'', IBC' sont équiangles; ainsi que les triangles I_aAC'', IAC'.

Nuñez sent ici le besoin de s'excuser. Sa démonstration se fait, dit-il, «por un prolixo discurso!» (2).

La difficulté provient de la manière dont il a défini les points A'', B'', C''. Il doit démontrer maintenant qu'en les joignant au centre I_a du cercle ex-inscrit, il forme des triangles rectangles. Voici le moyen détourné par lequel il y réussit.

En C'' il élève une perpendiculaire au côté AC'', et nomme I_a le point d'intersection de cette perpendiculaire avec la bissectrice de l'angle A. (Jusqu'ici I_a n'était pas encore défini). Il joint I_aB'' et forme ainsi deux triangles I_aAB'', I_aAC'', qui ont

(1) F.° 253 v.°
(2) F.° 255 r.°

un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; d'où il conclut que I_aB'' est perpendiculaire à AB''.

Il joint maintenant I_aA''.

Les triangles rectangles I_aBC'', I_aCB'' lui donnent:

$$\overline{I_aB}^2 - \overline{BC''}^2 = \overline{I_aC''}^2 = \overline{I_aB''}^2 = \overline{IC}^2 - \overline{CB''}^2$$

d'où

$$\overline{I_aB}^2 - \overline{BA''}^2 = \overline{I_aC}^2 - \overline{CA''}^2$$

$$\overline{I_aB}^2 - \overline{I_aC}^2 = \overline{BA''}^2 - \overline{CA''}^2 .$$

Il en conclut enfin, par son lemme 2, que I_aA'' est perpendiculaire à BC.

Ceci obtenu, il prouve aisément que I_aB et I_aC sont les bissectrices extérieures des angles B et C. Les similitudes des triangles se démontrent maintenant sans difficulté.

4^e^ partie. Après tous ces préliminaires, il s'agit de les utiliser enfin, pour exprimer r en fonction des côtés dans la formule

$$s = pr$$

«confiée naguère, on se le rappelle, à notre mémoire».

Ici Nuñez devient de plus en plus intéressant. Il écrit d'abord

$$s^2 = p^2r^2 .$$

Puis les triangles semblables I_aBC'', IBC' lui donnent

$$\frac{r_a}{p-c} = \frac{p-b}{r}$$

formule qu'il transforme successivement en

$$(p-b)(p-c) = rr_a$$

$$\frac{r^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{r^2}{rr_a} = \frac{r}{r_a} .$$

Les triangles semblables I_aAC'', IAC' lui donnent ensuite

$$\frac{p-a}{p} = \frac{r}{r_a} .$$

Il en tire

$$\frac{r^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{p-a}{p}$$

$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$$

$$p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \quad \text{et enfin} \quad s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dans ces transformations il est fait usage des lemmes 1 et 3. Tout ceci est exprimé à la manière d'Euclide, en langage courant, sans notation algébrique, sans omettre le moindre intermédiaire, en énonçant au long à chaque transformation le théorème justificatif. Nuñez en croyait l'indication explicite exigée par la rigueur. C'est le style du XVI[e] siècle. Il est prolixe, mais quelle puissance d'attention il exige! Quelle pénétration! Quelle vigueur d'intelligence! Car cet interminable raisonnement est conduit du commencement à la fin d'un pas lent et régulier, marchant tout le temps sans cahots, sans heurts, avançant toujours. Oui Nuñez est long, mais il ne se pique pas d'être court. Il voulait rendre rigoureuse et claire l'obscure démonstration de frère Luc de Burgo; donnons en lui acte, car c'est justice, il y a pleinement réussi.

VII

Concluons cette étude.

De Tartaglia, Cardan et Stifel, à Viète, il s'écoule cinquante ans. Bien à tort l'histoire de l'algèbre s'en occupe peu. Pendant tout ce temps, des hommes de talent font progresser lentement, mais sûrement la science. Malheureusement pour eux, la gloire incomparable des maîtres qui les précédent, celle surtout de Viète qui les suit, empêche d'apercevoir l'éclat de leur mérite, d'apprécier l'importance de leurs services.

C'étaient cependant des travailleurs adroits et consciencieux, disons mieux, des hommes vraiment grands, que Butéon, Gosselin, Peletier, Petri Nuñez!

Sans leur labeur intelligent et tenace, les immortelles découvertes de Viète eussent été impossibles. Pour évoluer la science demande un terrain préparé; plus on étudie l'histoire, plus on s'en convainc. Elle avance et marche; elle ne court pas en se précipitant en avant par sauts et par bonds.

Viète a donc eu des précurseurs. Nuñez fut l'un des princi-

paux. Aucun contemporain ne le surpasse en rigueur, Maurolyco seul l'atteint par l'abstraction et la généralité du raisonnement, par l'élégance et l'heureux choix de l'algorithme.

Reconnaissons le cependant, cette grande justesse d'esprit en a parfois quelque peu diminué l'envergure. Nuñez n'aperçut pas, par exemple, l'avenir réservé aux solutions négatives des équations, dont l'utilité était déjà si bien entrevue par d'autres, notamment par Luc de Burgo.

N'importe malgré la très légère ombre qui plane, peut être, de ce fait, sur sa mémoire, Nuñez n'en est pas moins un des algébristes les plus éminents du XVI^e siècle. Il fallait, disait Gosselin «jurer par un pareil maître» [1]. Parmi les grands mathématiciens qui séparent Stifel et Cardan, de Viète, il brille au tout premier rang. C'est l'une des gloires du Portugal. Puisse cette étude sur le *Libro de Algebra* avoir pu contribuer à le montrer!

Bruxelles, Collège Saint Michel, mai-juin 1908.

---

(1) «In cujus verba juravi», dit-il, dans la dédicace, après avoir nommé Nuñez dans la liste des auteurs dont il s'est servi. *De Arte Magna*. f.° aiiij v.°

INDEX

QUATRIEME PARTIE

Lignes de courbure, surfaces podaires

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

PUBLICADOS SOB A DIRECÇAO

DE

F. GOMES TEIXEIRA

VOLUME IV

(Publicação official)

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1909

D. Manuel II Rei de Portugal

10 de novembro de 1918.

Off. do Commercio

VISITA DE SUA MAGESTADE EL-REI
O SENHOR D. MANOEL II
Á ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO

No dia 10 de novembro de 1908 foi a Academia Polytechnica do Porto honrada com a visita de Sua Magestade El-Rei o Senhor D. MANOEL II, que nessa occasião se dignou entregar por suas proprias mãos ao Director d'este estabelecimento uma carta regia em que concede á referida Academia a mercê de se declarar seu protector. Publicam-se em seguida a allocução pronunciada nessa occasião pelo Director da Academia, a resposta de El-Rei, e a referida carta regia.

I

Allocução pronunciada pelo Dr. Francisco Gomes Teixeira, Director da Academia

SENHOR! — Os reis da dynastia de Bragança interessaram-se quasi todos pelas sciencias e pelas lettras. Recordemos que o Senhor D. PEDRO V fundou o Observatorio astronomico de Lisboa, dando elle mesmo os meios para a construcção do edificio; que o Senhor D. LUIZ I instituiu na Academia de Sciencias de Lisboa o premio conhecido pelo seu nome; e que este ultimo monarcha e o Senhor D. CARLOS consagraram muito do tempo que lhes deixou livre o exercicio das suas altas e difficeis funcções, o primeiro á cultura das lettras, o segundo á cultura das sciencias.

Quando, ha poucos annos ainda, o Senhor D. CARLOS visitou

a França, o governo d'este paiz incluiu, entre as festas e solemnidades organisadas em sua honra, uma sessão solemne no Museu de Historia Natural de Paris, convencido de que nada poderia ser mais agradavel ao monarcha que com tanto successo cultivava as sciencias naturaes, do que vêr-se rodeado dos principes da sciencia franceza, nesta casa celebre na historia da mesma sciencia, e ouvir da bocca de alguns dos mais eminentes a descripção das suas mais importantes descobertas; e, nesta sessão memoravel, EDMOND PERRIER, o eminente naturalista fez, em phrases expressivas, o elogio da obra scientifica do monarcha portugues.

É-me extremamente agradavel recordar aqui este facto, unico na historia, ao qual já me referi nos *Annaes* d'esta Academia, porque d'elle resulta grande honra para o sabio monarcha e para o paiz que governou.

O descendente de reis tão illustrados, herdeiro de taes tradições, não podia deixar de se interessar pelo progresso das sciencias e dos estabelecimentos em que ellas se ensinam.

Visitando esta Academia, dá V. M. uma prova d'esse interesse. Bem vindo seja. Agradeço, profundamente reconhecido, em nome do conselho academico e em meu proprio nome.

SENHOR! — Ha já bastantes annos foi esta Escola visitada pelo augusto pae de V. M. Viviamos então nas ruinas de um edificio velho, cercadas pelas paredes incompletas de um edificio novo.

Em uma breve allocução que tive a honra de pronunciar nessa occasião, chamei a attenção do illustrado monarcha para o estado deploravel do edificio, e pedi-lhe, em nome do conselho academico, que se interessasse por este estabelecimento e que recommendasse aos seus ministros a continuação das obras do edificio, suspensas havia quasi um seculo. S. M. dignou-se attender ao nosso pedido. Poucos annos depois as obras recomeçaram, e teem continuado sem interrupção até hoje.

Muito resta, porém, ainda fazer. As salas postas á nossa disposição são insufficientes para installar as aulas, museus, laboratorios, officinas, etc. A bibliotheca, os laboratorios de chimica e algumas aulas estão installadas ainda em más condições nas salas do velho edificio, e muito material de ensino está amontoado e algum encaixotado em depositos do mesmo edificio, por falta de logar e mobilia para o dispôr. Por isso ouso fazer a V. M. um pedido similhante ao que fiz ao Senhor D. CARLOS. Peço que recommende aos seus ministros que mandem abreviar

a construcção do edificio e que o dotem com a mobilia apropriada.

Antes de terminar, seja-me permittido expôr um desejo e exprimir uma esperança. Peço a V. M., que ha pouco tempo se declarou protector da veneranda Universidade de Coimbra, o mais velho dos institutos scientificos do nosso paiz, que seja tambem o protector d'esta Academia, que é um dos mais novos. Entre instituições, como entre pessoas, as mais novas são as que carecem de mais protecção.

A esperança que desejo exprimir é que V. M. honrará com a sua presença a solemnidade da inauguração definitiva do edificio, quando estiver acabado.

Termino agradecendo de novo a V. M. a honra que deu a esta Academia com a sua visita, e fazendo votos pela prosperidade de V. M. e de toda a Familia Real.

II

Resposta de Sua Magestade El-Rei

Nada podia ser mais grato ao meu coração do que ouvir da bocca de um portuguez tão eminente nas sciencias e director de uma Escola que tanto honra a nossa patria, o elogio de meus antepassados, que pela largueza do seu espirito, amor ás sciencias e lettras mereceram hoje ser aqui tão gratamente lembrados.

Nada podia tocar mais profundamente as fibras mais intimas e delicadas da minha alma do que a homenagem prestada á memoria, para mim sempre querida e tão sinceramente respeitada, do rei que foi meu pae e a cujo espirito superior acabaes de render o preito que merecidamente lhe é devido.

Obrigado!

Espero que não hei-de desmentir as honrosas tradições que herdei e me lembraes. É pelo amor ás sciencias e lettras que o espirito das nações se afere e se levanta. Nunca o meu auxilio e interesse faltará aos cultores da instrucção nacional, e em certeza da minha affirmação aqui vos entrego o publico testemunho do meu apreço por esta casa de ensino, a carta regia que vos é dirigida e pela qual me declaro protector da Academia Polytechnica.

Agradeço tambem aos estudantes da Academia Polytechnica do Porto a carinhosa recepção que hoje me fizeram e ficará

gravada no meu coração; vós sereis os meus companheiros para de futuro trabalharmos conjunctamente para o desenvolvimento do nosso querido paiz.

Estudantes hoje e meus companheiros de trabalho no futuro, affirmo-lhes que as suas saudações perdurarão no mais intimo da minha alma com o mais entranhado reconhecimento.

III

Carta regia em que El-Rei se declara protector da Academia Polytechnica

Dr. Francisco Gomes Teixeira, antigo lente da Universidade de Coimbra, socio effectivo da Academia Real das Sciencias de Lisboa e de varias academias e sociedades scientificas estrangeiras, director da Academia Polytechnica do Porto, Amigo, lentes e mais pessoas que compõem o corpo docente da mesma Academia

Eu, El-rei, vos envio muito saudar.

Querendo dar á Academia Polytechnica do Porto uma prova da minha consideração pelos serviços por ella prestados ao ensino e um claro testemunho da minha intenção de auxiliar, como rei e chefe do Poder Executivo, o desenvolvimento d'esse estabelecimento scientifico:

Hei por bem e me apraz fazer mercê de me declarar seu protector. O que me pareceu communicar-vos, para vossa intelligencia e satisfação e de todos os lentes e mais pessoas que compõem o corpo docente da Academia Polytechnica do Porto. — Escripta no Paço Real do Porto, aos 10 de novembro de 1908. — El-Rei. — *Francisco Joaquim Ferreira do Amaral.*

Para o Dr. Francisco Gomes Teixeira, antigo lente da Universidade de Coimbra, socio effectivo da Academia Real das Sciencias de Lisboa e de varias academias e sociedades scientificas estrangeiras, director da Academia Polytechnica do Porto, lentes e mais pessoas que compõem o corpo docente da mesma Academia.

QUELQUES REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UNE CHAINE PARFAITEMENT FLEXIBLE

PAR

PAUL APPELL

Membre de l'Institut de France

(Premier mémoire)

1. Nous nous proposons de faire quelques remarques sur les équations du mouvement d'un fil matériel parfaitement flexible et inextensible, en mettant en évidence les quantités et les vecteurs qui sont indépendants du choix des axes. Comme nous l'avons fait dans un memoire où nous avons traité un problème analogue pour le mouvement d'un fluide (*Journal de Mathématiques* de M. JORDAN, 1903, et *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1903), on pourra classer ces grandeurs d'après l'ordre des dérivées qui y figurent. Je me bornerai ici à l'étude des grandeurs du premier et du second ordre. On trouvera des renseignements bibliographiques sur le mouvement des fils dans le Mémoire que j'ai publié dans le tome 12 des *Acta mathematica*. On pourra comparer quelques unes de nos formules actuelles avec les intéressants résultats donnés par M. FLOQUET dans les travaux suivants:

1. Sur le mouvement d'un fil dans l'espace (*C. R.*, 10, 8bre, 1892).
2. Sur le mouvement d'un câble dans un milieu résistant, en tenant compte de la rotation de la terre (*Bull. des séances de la Société des sciences de Nancy*, n° de Novembre-Décembre, 1893).
3. Sur le mouvement d'un point ou d'un fil glissant sur un plan horizontal fixe, lorsqu'on tient compte de la

rotation de la terre et du frottement (*Bull. de la Société des sciences de Nancy*, 1897).
4. Sur le mouvement d'un fil dans un cas où il présente partout égale chance à la rupture (*Bull. des séances de la Société des sciences de Nancy*, n° de Juin-Juillet, 1900).
5. Sur le mouvement d'un fil dans l'espace (*C. R.*, 25 Juin, 1900).
6. Sur le mouvement d'un fil dans l'espace (*C. R.*, 2 Juillet, 1900).
7. Sur les équations du mouvement d'un fil en coordonnées quelconques (*C. R.*, 9 Juillet, 1900).
8. Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un fil et sur le calcul de sa tension (*C. R.*, 22 octobre, 1900).

2. Rappelons d'abord les équations classiques du mouvement d'un fil en coordonnées cartesiennes, sous l'action de forces continues admettant une fonction des forces.

Soient [1] x, y, z, les coordonnées d'un élément infinitésimal ds du fil, $m\,ds$ sa masse, T sa tension, $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$ les projections sur les axes de la force qui agit sur un point de masse unité ayant pour coordonnées x, y, z. La fonction des forces U est une fonction donnée de x, y, z, m une fonction donnée de l'arc s. Les équations du mouvement sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+m\frac{dU}{dx}\\ & m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+m\frac{dU}{dy}\\ & m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)+m\frac{dU}{dz}\\ & \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1. \end{aligned}\right.$$

Elles définissent x, y, z, T en fonctions des variables indépen-

(1) Nous employons des notations conformes à celles de notre mémoire «Sur le mouvement d'un fil dans un plain fixe» (*Acta matematica*, tome 12, 1889).

dantes s et t, sous les conditions aux limites et les conditions initiales. Les vecteurs et grandeurs dependant des éléments du prémier ordre sont :

1° la vitesse V de l'élément ds ayant pour projections

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

et pour grandeur

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

2° la tension T du même élément ayant pour projections

$$T\frac{dx}{ds}, \quad T\frac{dy}{ds}, \quad T\frac{dz}{ds};$$

3° le produit extérieur H de V et T, c'est-à-dire le moment H de l'un de ces vecteurs par rapport à l'extremité de l'autre, ayant pour projections

$$H_x = T\left(\frac{dy}{dt}\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{dt}\frac{dy}{ds}\right)$$

$$H_y = T\left(\frac{dz}{dt}\frac{dx}{ds} - \frac{dz}{dt}\frac{dy}{ds}\right)$$

$$H_z = T\left(\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{ds}\right)$$

et pour grandeur

$$H = TV \sin (T, V)$$

4° le produit géométrique ou produit intérieur de T et V

$$TV \cos (T, V)$$

ayant pour expression

$$T\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{ds}\right)$$

ou

$$Tv$$

en désignant par v la projection de la vitesse V sur la tension

$$v = \frac{dx}{dt}\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{ds}.$$

3. Parmi les éléments du second ordre, il conviendrait de considérer l'accélération, la dérivée géométrique de la vitesse par rapport à l'arc, les dérivées géométriques de la tension par rapport à t et à s, celles du vecteur H, etc.

Nous nous bornerons à écrire les composantes de la rotation instantanée de l'élément ds. Cet élément a, à l'instant t, des cosinus directeurs α, β, γ égaux à $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et, à l'instant $t+dt$ des cosinus directeurs

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{d\alpha}{dt}dt, \quad \beta_1 = \beta + \frac{d\beta}{dt}dt, \quad \gamma_1 = \gamma + \frac{d\gamma}{dt}dt.$$

On peut amener ces deux directions en coïncidence par une infinité de rotations: noùs choisirons celle qui est perpendiculaire à la fois aux deux directions: soient ω le vecteur représentatif de cette rotation instantanée, p, q, r ses projections, on a

$$(2) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1}{dt} = \dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2z}{dsdt} - \dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2y}{dsdt} \\[2ex] q = \dfrac{\gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1}{dt} = \dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2x}{dsdt} - \dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2z}{dsdt} \\[2ex] r = \dfrac{\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1}{dt} = \dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2y}{dsdt} - \dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2x}{dsdt} \end{cases}.$$

4. Voici d'abord certaines combinaisons des équations du mouvement qui sont intimement liées au théorème des forces vives ou au théorème donnant les variations de la tension dans une chaîne homogéne en équilibre. D'après la quatrième des équations du mouvement différen'iée par rapport à t, on a

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{dsdt} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{dsdt} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{dsdt} = 0,$$

par suite

$$(3) \qquad \frac{dv}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{dz}{dt}.$$

D'autre part

$$(4) \qquad \frac{dv}{dt}=\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{dV^2}{ds}.$$

Cela posé, multiplions le première des équations du mouvement par $\frac{dx}{dt}$, le deuxième par $\frac{dy}{dt}$, le troisième par $\frac{dz}{dt}$ puis ajoutons, nous aurons

$$\frac{m}{2}\frac{dV^2}{dt}=v\frac{dT}{ds}+T\frac{dv}{ds}+m\frac{dU}{dt},$$

ou, puisque m dépend de s seulement

$$(5) \qquad \frac{d(Tv)}{ds}=\frac{d\left[\frac{mV^2}{2}-mU\right]}{dt}.$$

Donc en désignant por $P(s,t)$ une certaine fonction de s et t, on a

$$(6) \qquad Tv=\frac{dP}{dt}, \quad \frac{mV^2}{2}-mU=\frac{dP}{ds},$$

où Tv a la signification indiquée plus haut $TV\cos T, V$.

Prenous un point déterminé de la chaine qui occupe la position M au temps t_0 et la position M_1 au temps t_1, on aura

$$\int_{t_0}^{t_1} TV\cos(T,V)\,dt = P(s,t_1)-P(s,t_0)$$

où le premier membre représente le travail de la tension appliquée au point considéré quand ce point passe de la première position à la seconde.

Considérons au contraire, la chaine a l'instant t et sur la chaine un arc $M'M''$ correspondant aux valeurs s' et s'' de s, on aura

$$\int_{s'}^{s''}\left(\frac{mV^2}{2}-mU\right)ds = P(s'',t)-P(s',t)$$

où le premier membre peut être considéré comme représentant l'energie totale de l'arc $M'M''$, dans le champs de forces donné.

Si la fonction P est uniforme, on déduit de la une signification, simple de la différence $P(s, t) - P(s_0, t_0)$, qu'il suffit d'écrire sous l'une des deux formes

$$P(s,t) - P(s,t_0) + P(s,t_0) - P(s_0,t_0),$$

$$P(s,t) - P(s_0,t) + P(s_0,t) - P(s_0,t_0),$$

en appliquant les interprétations précédentes à chacun des groupes de deux termes.

5. Supposons maintenant la chaine *homogène*, *m* constant Nous aurons, alors, une autre combinaison analogue, obtenue en multipliant les équations du mouvement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ et ajoutant. On a ainsi

$$m\left(\frac{dv}{dt} - \frac{1}{2}\frac{dV^2}{ds}\right) = \frac{dT}{ds} + m\frac{dU}{ds},$$

c'est à dire

$$\text{(7)} \qquad \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d\left(T + \frac{mV^2}{2} + mU\right)}{ds},$$

équation qui exprime que l'on peut poser

$$\text{(8)} \qquad mv = \frac{dQ}{ds}, \quad T + \frac{mV^2}{2} + mV = \frac{dQ}{dt}$$

où Q désigne une fonction $Q(s, t)$ de s et t.

En donnant à t une valeur constante et considérant un arc de la courbe M'M'', de s' à s'', on a

$$\int_{s'}^{s''} mvds = Q(s'', s) - Q(s', t)$$

où le premier membre représente la somme des composantes tangentielles au fil des quantités de mouvement de tous les éléments de l'arc considéré.

Si la chaine est en équilibre, x, y, z, T sont indépendants

de t, V est nul et l'équation (7) donne

$$\frac{d(T+mU)}{ds}=0$$

$$T+mU=h,$$

formule bien connue.

6. Il est évident que les fonctions P et Q ne peuvent pas être choisies arbitrairement.

Supposons par exemple $m=1$, $U=0$, c'est à dire supposons qu'il n'y ait pas de forces. On a alors

$$Tv=\frac{dP}{dt}, \quad \frac{1}{2}V^2=\frac{dP}{ds}$$

$$v=\frac{dQ}{ds}, \quad T+\frac{1}{2}V^2=\frac{dQ}{dt}$$

d'où une première relation entre les fonctions P et Q

$$(9) \qquad \left(\frac{dQ}{dt}-\frac{dP}{ds}\right)\frac{dQ}{ds}=\frac{dP}{dt}.$$

7. Cherchons la condition pour que la chaine soit constamment disposée suivant une *ligne géodésique* de la surface qu'elle décrit? Nous allons voir qu'il faut et suffit que v soit fonction de t seul. En effet, les cosinus directeurs de la normale principale à la chaine sont proportionnels à

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Pour que cette droite soit normale à la surface décrite par la chaine, il faut et il suffit qu'elle soit normale à la vitesse de l'élément considéré, c'est à dire

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{ds^2}=0$$

ou encore

$$\frac{dv}{ds}=0, \quad v=\varphi(t).$$

La signification géométrique de $\frac{dv}{ds}$ est, en général, en appelant ρ le rayon de courbure de la chaine

$$\frac{dv}{ds} = \frac{V}{\rho} \cos(V, \rho)$$

car on a

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

8. On obtiendra immédiatement des combinaisons intégrales du même genre que les précédentes dans les deux cas suivants dans lesquels m peut dépendre de s.

1° Si la force qui agit sur l'élement ds est constamment parallèle à un plan fixe, le plan des yz par exemple, on a

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

équation qui exprime que

$$m\frac{dx}{dt}ds + T\frac{dx}{ds}dt$$

est une différentielle totale exacte d'une fonction $R(s, t)$.

2° Si la force est constamment dans un même plan avec un axe fixe, Oz par exemple, on a

$$\frac{d}{ds}\left[T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)\right] = m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right),$$

ce qui montre que

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)ds + T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)dt$$

est une différentielle totale exacte.

9. *Cas de la pesanteur.* Si les forces qui agissent sur les éléments ds sont seulement leurs poids, $mgds$, on peut toujours ramener le problème au cas où les forces extérieurs, sauf bien entendu les forces aux extremités, seraient nulles.

En effet rapportons le mouvement à trois axes rectangulaires $Oxyz$, animés d'un mouvement de translation dans lequel le point O descend suivant une verticale fixe d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération g, égale à celle de la pesanteur. D'après la théorie des mouvements relatifs, on pourra regarder ces axes comme fixes, en ajoutant aux forces appliquées à l'élément ds une force verticale *ascendante* $mgds$, qui détruira le poids de l'élément. Les équations du mouvement relatif seront donc

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) &= m\frac{d^2y}{dt^2}, \\ \frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right) &= m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right.$$

comme s'il n'y avait pas de forces extérieures.

Cette remarque donne une réalité physique aux cas particuliers que j'ai étudiés à la fin du paragraphe II de mon mémoire des *Acta mathematica* (tome 12).

(A suivre).

SUL PRINCIPIO DELLA CONSERVAZIONE DEL NUMERO E SUL CALCOLO SIMBOLICO DI HERMANN SCHUBERT

NOTA DI

GIOVANNI Z. GIAMBELLI

Nel 1904 (¹) ho già esposto una modificazione esatta del principio della conservazione del numero applicabile ad alcuni notevoli problemi di Geometria numerativa (algebrica). Le considerazioni ivi svolte partirono da alcuni concetti, che in sostanza sono contenuti in una importante Nota di R. STURM (²). Non esporrò, per ora almeno, tali concetti comuni a quelli della detta Nota di R. STURM; ma invece dopo aver per maggior chiarezza ripetuto nel § 1 la parte principale della mia modificazione, se ne farà nel § 2 un'applicazione ad un nuovo esempio, che E. STUDY (³) pretende di far ritenere in contraddizione al principio della conservazione del numero. In conseguenza di quanto si trova in una mia Memoria (di prossima pubblicazione), *Risoluzione del problema generale numerativo per gli spazî pluri-*

(¹) Cfr. la mia Nota: *Sul principio della conservazione del numero*, «Jaresb. der Deut. Mathematiker-Verein», 13, oppure l'Articolo: *Abzählende Methoden*, di H. G. ZEUTHEN, nella «Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften», Band III, Teil 2, C, 3, § 33, pag. 311. Conviene inoltre leggere il § 9 (pag. 422-23) dell'appendice, *Sguardo sopra i progressi della geometria in quest'ultimo decennio*, del bel libro de G. LORIA, *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, Torino, C. Clausen, H. Rinck succ, 3.ª ediz.

(²) *Das Prinzips der speziellen Lage*, Archiv der Mathematik und Physik», (3), 12, 1907.

(³) *Über das Prinzip der Erhaltung der Anzahl*, «Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904».

secanti di una curva algebrica, «Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino», (2), 59, 1909, nella quale si risolve una questione numerativa fondamentale per le curve algebriche, si potrà trattare nel § 3 di questa Nota dell'importanza del calcolo simbolico dello SCHUBERT e come il concetto di condizione possa fornire notevoli risultati in campi, dove le ipotesi restrittive della mia modificazione del principio della conservazione del numero non permettono le relative applicazioni.

1. In questo § 1 per chiarire il concetto di particolarizzazione *uniforme* di una data condizione si esporrà con qualche semplificazione la prima parte del § 1 della mia citata Nota.

Sia G_F un gruppo di dati enti algebrici ed E un campo algebrico $\infty^\rho (\rho > 0)$ di gruppi G_M di enti algebrici di data definizione. Essendo Γ un ente algebrico di data definizione, si designino con R_F alcune (ben definite) relazioni di posizione tra Γ e gli enti di G_F, con R_M alcune (ben definite) relazioni di posizione tra Γ e gli enti di un qualunque G_M del campo E. Con C_E si chiamino le condizioni imposte all'ente Γ definite mediante le relazioni di posizione R_F tra Γ e G_F e le relazioni di posizione R_M tra Γ e un G_M del campo E. Nel campo E si deve poter prendere un campo E' di G_M pure ∞^ρ, per cui i G_M non appartenenti ad E, qualora esistano, siano $\infty^{\rho'}$ (essendo $\rho' < \rho$), e soddisfacente inoltre alla condizione che le C_E relative al campo E' siano tutte della stessa dimensione e tra loro equivalenti, in modo che nessuna di esse si decomponga in parti da contarsi colla molteplicità maggiore di uno, oppure da escludere.

Se la condizione C è una C_E e se la particolarizzazione C' di C è una C_E relativa al campo E', allora si dirà che la C' è una *particolarizzazione uniforme* della condizione C.

La mia modificazione del principio della conservazione del numero si enuncia così:

Se C' *è una particolarizzazione uniforme della condizione* C *imposta ad un ente* Γ *e si è decomposta in più condizioni* C'_0, C'_1, ..., C'_t, *di dimensione uguale a quella di* C', *tali che ogni* C'_i *mediante l'aggiunta di altre relazioni di posizione tra l'ente* Γ *e tutti gli enti introdotti (esplicitamente, od implicitamente) nel definire la condizione* C' *non si possa ulteriormente decomporre in più condizioni* $C'_{i,1}$, $C'_{i,2}$, ecc., *senza che tutte tranne una siano di dimensione maggiore di quella di* C'_i, *allora vale la relazione simbolica:*

$$C \equiv \sum_{i=0}^{i=t} a_i C'_i ,$$

ove i numeri $a_0, a_1, \ldots, a_t$ sono interi positivi, oppure nulli, ma non tutti nulli (1).

2. Il nuovo esempio dello Study (cfr. la relativa Note già citata) si riferisce al numero

$$(1) \qquad 2mm' + m\mu' + m'\mu$$

delle intersezioni, che due curve γ e γ' situate sopra un cono K di 2° ordine hanno fuori del vertice O del cono K, essendo γ di ordine $2m + \mu$, γ' di ordine $2m' + \mu'$, ed O un punto μ^{plo} per γ, μ'^{plo} per γ'.

Per mostrare come tale risultato non sia contraddittorio alla mia modificazione del principio della conservazione del numero, bisognerà ricorrere anzitutto alla definizione di curva gobba nello spazio, pensandola p. es. come intersezione completa, o parziale, di due superficie e nel caso dell'intersezione parziale tener conto della parte residua.

Tenendo conto del concetto di particolarizzazione uniforme, si supporrà $\frac{\mu}{2}$ intero ed inoltre che γ risulti la completa intersezione di K con una superficie Φ, eventualmente anche riducibile, di ordine $m + \nu$, dove è $\nu = \frac{\mu}{2}$, e che in O ha un punto ν^{plo}. Si chiami Φ_1 una superficie costituita da $m + \nu$ piani ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_{m+\nu}$, dei quali $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ non passano per O, $\omega_{m+1}, \omega_{m+2}, \ldots, \omega_{m+\nu}$ invece vi passano senza però toccare γ'; inoltre per maggior semplicità si ammetterà che nessuno di questi piani nè tocchi γ', nè passi per gli altri punti multipli, che γ' può avere eventualmente oltre O. Si chiami poi E il fascio di superficie individuato da Φ e Φ_1 e γ_1 la curva completa intersezione di K con Φ_1.

Variando la superficie nel fascio E, si ottengono sopra K

(1) É importante osservare che, anche togliendo la restrizione che debba essere *uniforme* la particolarizzazione C′ di C, pure non si hanno finora esempi contrarii al nuovo enunciato del principio della conservazione del numero. Questo fatto sebbene non sia stato finora notato, pure risulta implicitamente evidente, rispetto ai noti esempi dello Study e del Kohn, dal § 2 della citata mia Nota ed in parte da quella dello Sturm; per il nuovo esempio dello Study si veda il § 2 della presente Nota. Questa restrizione della particolarizzazione uniforme è però *necessaria* per la dimostrazione del detto mio enunciato del principio della conservazione del numero.

La semplificazione poi introdotta sopra nel definire la particolarizzazione uniforme dipende dall'aver supposto algebrico il campo E.

delle curve di ordine $2m+\mu$, in modo che, detto C il numero dei punti comuni a γ e γ' fuori di O, C' il numero dei punti comuni a γ_1 e γ' fuori di O, risulti C' una particolarizzazione uniforme di C[1]. Tenendo conto di tutti gli enti introdotti nel definire C', si dovrà decomporre questa condizione nelle C'_0, $C'_1, \ldots, C'_{m+\nu-1}$, ove C'_i $(i=0, 1, \ldots, m+\nu-1)$ indica il numero dei punti comuni a γ' e alla conica sezione di K con ω_{i+1}, i quali non cadono in O. Quindi in questo caso vale il principio della conservazione del numero sotto la forma sopra enunciata, essendo $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m+\nu-1} = 1$.

Ora per brevità qui ed in seguito, essendo γ, γ_1, γ_2, ecc. delle curve, si converrà, che i simboli

$$\gamma+\gamma,$$
$$\gamma+\gamma_1+\gamma_2,$$
$$\gamma_1+\gamma_2,$$

ecc.

significhino rispettivamente le curve costituite

da γ e γ_1,

da γ, γ_1 e γ_2,

da γ_1 e γ_2,

ecc.

Essendo sempre μ pari, quando γ non si può pensare come completa intersezione di K con un'altra superficie, allora è possibile in infiniti modi costruire una curva γ_1 di ordine $2m_1+2\nu_1$, dove m_1 e ν_1 sono interi convenienti, in modo che

1° O sia un punto $2\nu_1^{\text{plo}}$ per la γ_1,

2° γ_1 risulti completa intersezione di K con un'altra superficie, che ha in O un punto ν_1^{plo},

3° la curva $\gamma+\gamma_1$ risulti una curva completa intersezione di K con un'altra superficie, che in O ha un punto $(\nu+\nu_1)^{\text{plo}}$ [2].

Da questa osservazione segue subito la (1), purchè μ sia

---

(1) Non occorre ricordare che il concetto di numero è un caso particolare di quello di condizione.

(2) Benchè sia questione molto facile, pure si esporrà un metodo elementare per costruire una curva γ_1 soddisfacente alle dette condizioni.

Si definisca come operazione T sopra una curva γ giacente sul cono di 2.° ordine K la seguente:

pari, anche quando γ non è completa intersezione di K con un'altra superficie.

Quando poi μ è dispari, basta considerare la $\gamma + g$, essendo g una generatrice del cono K, la quale taglia γ' (fuori di O) in m' punti distinti, e mediante il risultato relativo a μ pari si otterrà subito la (1) anche per μ dispari.

Non sarà inutile discutere il concetto di diminuzione prodotta dal punto O sul numero delle intersezioni delle due curve γ, γ' giacenti sul cono K. Si designi per brevità con $D(\gamma, \gamma')$ tale diminuzione prodotta dal punto O.

Se almeno una delle due curve γ, γ' è completa intersezione di K con un'altra superficie, segue: $D(\gamma, \gamma') = \frac{1}{2}\mu\mu'$; ed anche quando non è completa intersezione di K con un'altra superficie nè γ nè γ', ma però è pari almeno uno dei due interi μ, μ', segue pure: $D(\gamma, \gamma') = \frac{1}{2}\mu\mu'$ (1).

Quando μ, μ' sono entrambi dispari, sia p. es. γ_0 un'altra curva giacente sopra K, che ha in O un punto μ^{plo}, dotata degli stessi caratteri proiettivi di γ e non avente nessuna relazione di contatto con γ, e si convenga di definire $D(\gamma, \gamma') = \frac{1}{2} D(\gamma + \gamma_0, \gamma')$, ne segue: $D(\gamma, \gamma') = \frac{1}{2}\mu\mu'$ (2).

Da un punto non singolare di γ si proietta γ stessa e si trova la residua intersezione di questo cono con K.

Si chiami poi $R\gamma$ la residua intersezione ottenuta.

Se $R\gamma$ non si può ottenere come completa intersezione di K con un'altra superficie, si eseguisca sopra $R\gamma$ l'operazione T, onde si ottiene una nuova curva $RR\gamma$, che si designerà semplicemente con $R^2\gamma$. Se $R^2\gamma$ non si può ottenere come completa intersezione di K con un'altra superficie, si eseguisca ancora l'operazione T; e così si proceda, finché si giunga ad una curva $R^t\gamma$ completa intersezione di K con un'altra superficie avente in O un punto ν^{plo}.

Segue che t non supera m e che si può pensare come γ_1 la curva $R\gamma + R^2\gamma + \ldots + R^t\gamma$ completa intersezione di K con una superficie di ordine $(m+\nu)t - \frac{1}{2}t(t+1)$ e che ha in O un punto νt^{plo}.

(1) Infatti se per fissare le idee μ è pari, basta pensare che si può definire $D(\gamma, \gamma')$ come la differenza $D(\gamma + \gamma_1, \gamma') - D(\gamma_1, \gamma')$, dove γ_1 è una curva che si comporta rispetto a γ nel modo esposto sopra, cioè, confrontando la nota precedente, una curva γ_1 è la $R\gamma + R^2\gamma + \ldots + R^t\gamma$.

(2) Nelle questioni di limite si deve sempre usare una stessa definizione per evitare paradossi. Così p. es. essendo μ, μ', r interi dispari, dette g_1, g_2, $\ldots$, g_r delle generatrici del cono K che tagliano γ', fuori di O, in m' punti distinti, si potrebbe pensare $D(\gamma, \gamma')$ come la differenza

$$D(\gamma + g_1 + g_2 + \cdots + g_r, \gamma') - D(g_1 + g_2 + \cdots + g_r, \gamma') =$$
$$= D(\gamma + g_1 + g_2 + \cdots + g_r, \gamma') - D(g_1, \gamma') - D(g_2, \gamma') - \ldots - D(g_r, \gamma')$$

La convenzione introdotta per μ, μ' entrambi dispari non contraddice alla definizione relativa al caso, in cui una delle due curve γ, γ' sia completa intersezione di K con un'altra superficie, ma introduce *numeri fratti* [1]. Dunque si deve pensare alla possibilità di definire tale concetto di diminuzione ed esaminare quali nuove convenzioni si debbano fare (cfr. per un altro esempio analogo il seguente § 3).

Ora in fine si mostrerà come, senza tener alcun conto della restrizione che la particolarizzazione debba essere uniforme, si possa applicare la mia modificazione del principio della conservazione del numero a questo esempio dello Study.

Si considerino le due curve γ, γ' definite sopra, e non si faccia alcuna ipotesi sulla parità, o disparità di μ, μ'. Si spezzi p. es. γ in $2m+\mu$ generatrici $g_1, g_2, \ldots, g_{2m+\mu}$ del cono K, tali che ciascuna di esse tagli γ', fuori di O, in m' punti distinti. I punti comuni alle g_i $(i=1, 2, \ldots, 2m+\mu)$ e a γ' si distribuiscono anzitutto nelle seguenti $4m+2\mu$ classi $L_1, L_2, \ldots, L_{4m+2\mu}$, ove L_i $(i=1, 2, \ldots, 2m+\mu)$ indica la classe costituita dai punti fuori di O comuni alla g_i e a γ', e L_i $(i=2m+\mu+1, 2m+\mu+2, \ldots, 4m+2\mu)$ la classe costituita dal punto O pensato come intersezione di $g_{i-2m-\mu}$ e di γ'. Per l'applicabilità della mia modificazione del principio della conservazione del numero, detto C'_i $(i=0, 1, \ldots, 4m+2\mu-1)$ il numero dei punti *distinti* appartenenti alla classe L_{i+1}, si ponga $a_i=1$ $(i=0, 1, \ldots, 2m+\mu-1)$ e degli altri coefficienti a_i $(i=2m+\mu, 2m+\mu+1, \ldots, 4m+2\mu-1)$ se ne prendano m uguali a μ' ed i rimanenti $m+\mu$ uguali a zero [2].

Quindi questo nuovo esempio dello Study non contraddice la nostra modificazione del principio della conservazione del numero, anche quando non si tenga conto della restrizione, che la particolarizzazione debba essere uniforme [2].

---

cioè

$$D(\gamma, \gamma') = \frac{1}{2}(\mu - r)\mu',$$

risultato che dipende da r.

Per spiegare questo paradosso si pensi che la definizione $D(g, \gamma') = \mu'$ $(i=1, 2, \ldots, r)$ è *incompatibile* con quella usata sopra per $D(\gamma, \gamma')$, quando γ, oppure γ', sia completa intersezione di K con un'altra superficie.

(1) In questo caso i detti numeri fratti hanno per denominatore 2, ma si possono subito costruire esempi analoghi di numeri fratti col denominatore n, numero intero qualunque. Si osservi poi che, partendo da questi esempi, si potrebbe benissimo introdurre il concetto di *numero frazionario* nella Geometria numerativa.

(2) Ed è ancora importante osservare, come non sia stato necessario

3. Le scarse cognizioni attuali sulla geometria proiettiva delle curve algebriche iperspaziali e le condizioni restrittive della mia modificazione del principio della conservazione del numero non permettono di poterla applicare al problema del numero degli spazî plurisecanti una data curva algebrica. Per tale questione occorre tener conto dell'importante concetto di condizione introdotto dallo Schubert. In virtù di questo concetto si dovrà risolvere invece del detto problema il seguente più generale:

Trasformare in una somma di condizioni caratteristiche la condizione imposta ad uno spazio [s] *di secare* i *volte una data curva priva di punti singolari, di ordine* m *e di genere* p, *giacente in uno spazio* [h] (1).

Come risulterà dalla mia Memoria citata, basterà trasformare la detta condizione di plurisecazione, quando sia $s \geq i-1$, ed h *sufficientemente grande;* e siccome in tale ipotesi è funzione solo di m, p, i e non dipende da s e da h, si potrà designare questa condizione p. es. semplicemente col simbolo $(m, p; i)$.

Essendo $\pi_k (k=1, 2, \ldots, i)$ la condizione imposta ad uno spazio $[s]$ di tagliare un dato $[k]$ secondo un $[k-1]$, seguendo un metodo di degenerazione ho stabilito nella detta mia Memoria le due formole ricorrenti

$$(2) \quad (m, p; i) = (m-1, p; i) + (m-2, p; i-1)\pi_1 + \ldots + \\ + (m-i, p; 1)\pi_{i-1} + \pi_i,$$

$$(3) \quad (m, p; i) = (m-2, p; i) + 2\cdot(m-3, p-1; i-1)\pi_1 + \ldots + \\ + i\cdot(m-i-1, p-1; 1)\pi_{i-1} + (i+1)\cdot\pi_i \\ \text{(ove } p>0\text{)},$$

le quali risolvono completamente la questione sopra enunciata.

Sebbene le restrizioni imposte alla mia modificazione del principio della conservazione del numero non permettano di dimostrare il concetto di limite usato in questo metodo di degenerazione, pure si deve osservare che nella mia Memoria si dimostra analiticamente la (2), quando $p=0$, si studiano le

---

suddividere le condizioni C'_i $(i=0, 1, \ldots, 4m+2\mu-1)$, tenendo conto di tutti gli enti introdotti nel definire la particolarizzazione (p. es. non si è tenuto conto dei rami che Γ' ha in O).

(1) Evidentemente è $s < d-1$, $h \leq d$, chiamando $[d]$ lo spazio fondamentale.

mutue relazioni tra il detto metodo di degenerazione ed il metodo funzionale associato al calcolo simbolico dello Schubert, e inoltre si dimostra, come il solo metodo funzionale, associato al calcolo simbolico dello Schubert, dia luogo alle stesse formole ricorrenti (2), (3). Osservando poi che la (2) per $p<0$ è conseguenza della (3) e della (2) stessa per $p=0$, sarà lecito non dubitare dell'esattezza delle dette formole ricorrenti.

Rispetto al problema particolare del numero degli spazi, che plurisecano una curva generica di ordine m e di genere p, non solo non esisteva finora un procedimento, che permettesse di risolvere i singoli casi numerici, ma i metodi usati erano inefficaci per giungere a tale procedimento, perchè non si faceva uso nè del concetto di condizione introdotto dallo Schubert, nè dal calcolo simbolico dello Schubert.

Rispetto al *metodo dello spezzamento totale,* che consiste nel *sostituire ad una curva priva di punti singolari di ordine* m *e di genere* p *un sistema connesso di* m *rette in posizione generica con* $p+m+1$ *intersezioni semplici,* si dimostra subito la seguente proposizione:

Nelle trasformazioni della condizione imposta ad uno spazio [s] *di plurisecare una curva priva di punti singolari di ordine* m *e genere* p *è falso applicare il metodo dello spezzamento totale, se è* $p>2$.

Infatti, quando è $p>2$, è impossibile costruire un sistema connesso di m rette con $p+m+1$ intersezioni semplici, senza che almeno tre di queste intersezioni cadano sopra uno stesso lato del poligono; cioè la curva così spezzata ammette almeno una trisecante.

In un altro Lavoro poi si dimostrerà, come la condizione dipenda non solo dal numero delle trisecanti, ma anche dalla posizione delle trisecanti. Un fatto analogo accade pure per le curve razionali spezzate in rette. Per maggior chiarezza si spiegherà meglio questo fatto per le curve razionali degeneri dotate di una sola trisecante.

Si consideri un poligono gobbo aperto costituito dalle rette $a_1, a_2, \dots, a_r$, tali che a partire dalla seconda inclusa ognuna si appoggia alla precedente, in modo che r sia la dimensione dello spazio congiungente $a_1, a_2, \dots, a_r$. Sia poi b una retta appoggiata al lato a_k $(k=2, 3, \dots, r-1)$ in un punto distinto dai vertici $a_{k-1}\,a_k$, $a_k\,a_{k+1}$, e tale che risulti $r+1$ la dimensione dello spazio congente $a_1, a_2, \dots, a_r, b$. L'insieme delle rette $a_1, a_2, \dots, a_r, b$ costituisce quindi una curva razionale normale degenere dello spazio $[r+1]$, la quale ammette a_k come trisecante. La condizione imposta ad uno spazio $[s]$ di plurise-

care la curva razionale così degenerata dipende dalla posizione della trisecante, cioè p. es. si ottengono risultati diversi

secondochè la trisecante è a_2, oppure a_3, se $r \geq 5$,

secondochè la trisecante è a_2, a_3, oppure a_4, se $r \geq 7$,

ecc.

Dunque nel definire il concetto di diminuzione prodotta da una trisecante rispetto alla condizione imposta ad uno spazio di plurisecare una curva algebrica bisogna tenere conto, o della posizione della trisecante, oppure delle singolarità inerenti alla posizione della trisecante.

La risposta si troverà in un seguente Lavoro.

Volendo fare qualche passo nello studio delle curve razionali, sarebbe utile determinare la condizione imposta ad uno spazio di plurisecare una curva razionale costituita da un insieme connesso di m rette, avente alcune di queste come rette trisecanti, quadrisecanti, ecc. Non sarà difficile applicare il calcolo simbolico dello Schubert e trasformare questa condizione in una somma di condizioni caratteristiche, però *non avverrà sempre che queste condizioni caratteristiche siano tutte della stessa dimensione.*

Questi nuovi risultati sulla teoria delle curve dipendono essenzialmente dall'uso conveniente del calcolo simbolico dello Schubert e sarebbe impossile giungere altrimenti alle stesse conseguenze.

Rispetto agli altri metodi sopra tali questioni per le curve si ricorderà l'importante Memoria di H. G. Zeuthen, *Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable*, «Annali di Matematica p. ed app.» (2), 3, 1869, pag. 175-217. Per estendere questo metodo dello Zeuthen alle questioni analoghe sulle curve degli iperspazî occorre applicare il calcolo simbolico dello Schubert. Finchè lo spazio fondamentale $[d]$ è di dimensione piccola, p. es. $d=4$, 5, 6, si possono benissimo evitare il calcolo simbolico dello Schubert ed il concetto di condizione. Infatti in questi casi non si vede, come sia necessario ricorrerre alla trasformazione del prodotto di due condizioni caratteristiche imposte ad uno spazio, perchè semplici ragionamenti geometrici, o qualche applicazione del principio di corrispondenza di Chasles, oppure note formole di coincidenza di punti o di spazî, lasciano sfuggire la sostanza del problema generale; ma nel caso generale questi procedimenti sono inefficaci anche per problemi numerici. Nella citata Memoria dello Zeuthen si considerano poi per le curve dello spazio

ordinario non solo problemi di plurisecazione, di contatto, ma anche questioni di singolarità, ricerche importantissime, che meriterebbero di essere estese alle curve iperspaziali.

Si osserverà infine come il calcolo simbolico dello SCHUBERT sia strettamente collegato alla mia modificazione del principio delle conservazione del numero. Questa mia modificazione fornisce risultati, che si giudicano di poca utilità, quando si pensa al concetto (particolare) di numero, ma, se invece si pensa al concetto di condizione, questi risultati per mezzo del calcolo simbolico dello SCHUBERT permettono subito di trovare proposizioni, che non si sanno dimostrare con altri metodi. P. es. rispetto al problema del prodotto di più condizioni caratteristiche imposte ad uno stesso spazio i metodi geometrici (1) ordinarii si presentano deficienti, ed è necessario ricorrere, o al metodo usato in una mia Memoria (2), oppure ad una formola dello SCHUBERT (3).

---

(1) Per uno studio analitico nel caso delle rette si ricorderà l'importante Nota di MAX CASPAR, *Abzählungen bezüglich des Strahls im n-dimensionalen Raum*, «Math. Annalen», 59, 1904.

(2) *Risoluzione del problema degli spazî secanti*, «Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, (2), 52, 1902.

(3) *Gleichungen zwiscaen Bedingungen bei specieller Lage linearer Räume*, «Mittheilungen der Math. Gesell. in Hamburg», 4, 1903, pag. 104. Per questa formola dello si cfr. pure l'ultima pagina del § della mia Nota: *La teoria delle formole d'incidenza e di posizione speciale e le forme binarie*, «Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino», 40, 1905.

NOTAS SOBRE DUAS CURVAS ESPHERICAS PARTICULARES

POR

F. GOMES TEIXEIRA

I

Sobre a catenaria espherica

A catenaria espherica é a curva de equilibrio d'um fio pesado, homogeneo, flexivel e inextensivel, collocado sobre uma esphera sobre a qual póde escorregar sem attricto, e fixa nas suas extremidades a dois pontos da esphera.

Demonstra-se em Mecanica (1) que esta curva póde ser representada pelas equações seguintes, referidas a eixos orthogonaes que passem pelo centro da esphera:

$$(1) \qquad d\varphi = \frac{\mathrm{A}a}{\sqrt{\mathrm{Z}}}, \qquad r^2 = a^2 - z^2,$$

onde

$$\mathrm{Z} = (z-h)^2(a^2-z^2) - \mathrm{A}^2 = -(z^3 + hz^2 - a^2z - ha^2 + \mathrm{A}^2).$$

r e φ designando as coordenadas polares da projecção do ponto sobre o plano xy, a o raio da esphera e A e h duas constantes arbitrarias.

Vê-se pois que, em geral, o calculo de φ depende das func-

(1) Vêr, por exemplo, APPELL, *Traité de Mécanique*, tom. I, pag. 202.

ções ellipticas. A expressão de φ por meio d'estas funcções foi obtida por diversos geometras, e depende do logarithmo d'uma funcção duplamente periodica de segunda especie. Apezar d'isso, M. Appell mostrou que se podem exprimir as coordenadas x, y e z por meio de funcções ellipticas uniformes, em um trabalho notavel publicado no *Bulletin de la Société Mathématique de France* (1885, t. XIII, pag. 65). É d'esta questão que vamos occupar-nos, para obter as fórmulas de M. Appell por meio de uma analyse differente da que foi empregada por este eminente geometra.

Representemos por α, β, γ e δ as raizes da equação $Z=0$, e notemos que estas raizes não podem ser todas imaginarias. Com effeito, se estas raizes fossem todas imaginarias, o radical que entra na fórmula (1) seria imaginario, qualquer que fôsse o valor de z. Supponhamos pois que as quantidades α e β são reaes e ponhamos

$$t=\frac{\alpha-z}{z-\beta}.$$

Temos, pondo a expressão de $d\varphi$ debaixo da fórma

$$d\varphi=\frac{A}{2}\left[\frac{dz}{(z-a)\sqrt{Z}}-\frac{dz}{(z+a)\sqrt{Z}}\right]$$

e considerando o primeiro termo d'esta egualdade,

$$\frac{dz}{(z-a)\sqrt{Z}}=\frac{dz}{(z-a)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}$$

$$=\frac{K}{\beta-a}\left[\frac{dt}{\sqrt{t(t^2+pt+q)}}+\frac{\beta-\alpha}{\beta-a}\cdot\frac{dt}{(t-a_1)\sqrt{t(t^2+pt+q)}}\right],$$

onde

$$a_1=\frac{a-\alpha}{\beta-a},\quad p=\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}+\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta},\quad q=\frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)},$$

$$K=-(\beta-\gamma)^{-\frac{1}{2}}(\beta-\delta)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ponhamos agora $t=t_1-\frac{1}{3}p$. A equação precedente toma a

fórma,

$$\frac{dz}{(z-a)\sqrt{Z}}=\frac{2K}{\beta-a}\left[\frac{dt_1}{\sqrt{T}}+\frac{\beta-a}{\beta-a}\cdot\frac{dt_1}{(t_1-a'_1)\sqrt{Z}}\right],$$

onde

$$T=4t_1^2-g_1t-g_2,\qquad a'_1=a_1+\frac{1}{3}p,$$

g_1, g_2 sendo duas constantes, de que não é necessario escrever os valores.

Introduzindo agora as funcções ellipticas de Weirstrass, ponhamos $t_1=\mathrm{p}u$ e representemos por u_1 o valor que u toma quando $\mathrm{p}u=a'_1$. Vem

$$\frac{dz}{(z-a)\sqrt{Z}}=\frac{2K}{a-\beta}\left[du+\frac{\beta-\alpha}{\beta-a}\cdot\frac{du}{\mathrm{p}u-\mathrm{p}u_1}\right].$$

Mas [1]

$$\int\frac{du}{\mathrm{p}u-\mathrm{p}u_1}=\frac{1}{\mathrm{p}'u_1}\left[\log\frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u+u_1)}+2u\zeta u_1\right].$$

Vamos procurar agora o valor $\mathrm{p}'u_1$. Para isso notemos que

$$\lim_{z=a}\frac{1}{\sqrt{Z}}=-\frac{i}{A},$$

e que, por outro lado,

$$\lim_{z=a}\frac{1}{\sqrt{Z}}=\frac{K}{\beta-\alpha}\lim_{t=a_1}\frac{(t+1)^2}{\sqrt{t(t^2+pt+q)}}$$

$$=\frac{2K}{\beta-\alpha}\lim_{t_1=a'_1}\frac{\left(t_1-\frac{1}{3}p+1\right)^2}{\sqrt{4t_1^3-g_1t-g_2}}=\frac{2K}{(\alpha-\beta)}\lim_{u=u_1}\frac{\left(\mathrm{p}u-\frac{1}{3}p+1\right)^2}{\mathrm{p}'u_1}$$

$$=\frac{2K}{a-\beta}\cdot\frac{(a_1+1)^2}{\mathrm{p}'u_1}=\frac{2K(\alpha-\beta)}{(\beta-a)^2\mathrm{p}'u_1};$$

---

[1] Veja-se o nosso *Curso de Analyse infinitesimal, Calculo integral,* 2.ª parte, pag. 281.

logo

$$\frac{1}{p'u_1} = \frac{(\beta - a)^2 i}{2AK(\beta - \alpha)}.$$

Portanto

$$\int \frac{du}{pu - pu_1} = \frac{(\beta - a)^2 i}{2AK(\beta - a)} \left[\log \frac{\sigma(u - u_1)}{\sigma(u + u_1)} + 2u\,\zeta u_1\right],$$

e em seguida

$$\int \frac{dz}{(z - a)\sqrt{Z}} = \frac{2K}{a - \beta} u - \frac{i}{A} \left[\log \frac{\sigma(u - u_1)}{\sigma(u + u_1)} + 2u\,\zeta u_1\right].$$

Do mesmo modo se deduz a egualdade

$$\int \frac{dz}{(z + a)\sqrt{Z}} = -\frac{2K}{a + \beta} - \frac{i}{A} \left[\log \frac{\sigma(u - u_2)}{\sigma(u + u_2)} + 2u\,\zeta u_2\right],$$

onde

$$a_2 = -\frac{a + \alpha}{a + \beta}, \qquad pu_2 = a_2 + \frac{1}{3} p.$$

Logo

$$(2) \qquad \varphi - \varphi_0 = 2Gu + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma(u - u_1)\,\sigma(u + u_2)}{\sigma(u + u_1)\,\sigma(u - u_2)},$$

onde

$$G = KA\left(\frac{2a}{a^2 - \beta^2} + i\zeta u_2 - i\zeta u_1\right).$$

Ao mesmo tempo

$$z = \frac{\beta\left(pu - \frac{1}{3}p\right) + \alpha}{pu - \frac{1}{3}p + 1}.$$

Temos assim as duas fórmulas que determinam φ e z em funcção do parametro a.

Eliminando agora $a - \alpha$ entre as equações

$$z - a = \frac{(\beta - a)\left(pu - \frac{1}{3}p\right) + \alpha - a}{pu - \frac{1}{3}p + 1}, \qquad pu_1 = \frac{a - \alpha}{\beta - a} + \frac{1}{3}p,$$

e pondo $pu' = \frac{1}{3}p - 1$, vem

$$z - a = \frac{(\beta - a)(pu - pu_1)}{pu - pu'},$$

ou, applicando uma fórmula fundamental da theoria das funcções ellipticas [1],

$$z - a = \frac{(\beta - a)\sigma^2 u'}{\sigma^2 u_1} \cdot \frac{\sigma(u_1 + u)\sigma(u_1 - u)}{\sigma(u' + u)\sigma(u' - u)}.$$

Do mesmo modo

$$z + a = \frac{(\beta + a)\sigma^2 u'}{\sigma^2 u_2} \cdot \frac{\sigma(u_2 + u)\sigma(u_2 - u)}{\sigma(u' + u)\sigma(u' - u)}.$$

Mas

$$(x + iy)^2 = r^2 e^{2i\varphi} = (a^2 - z^2) e^{2i\varphi},$$

e portanto, attendendo ás fórmulas precedentes e á fórmula (2),

$$x + iy = \frac{\sqrt{a^2 - \beta^2}\,\sigma^2 u_1}{\sigma u_1\, \sigma u_2} \cdot \frac{\sigma(u_1 - u)\sigma(u_2 + u)}{\sigma(u' + u)\sigma(u' - u)}\, e^{Gu + i\varphi_0}.$$

Do mesmo modo

$$x - iy = \frac{\sqrt{a^2 - \beta^2}}{\sigma u_1\, \sigma u_2} \cdot \frac{\sigma(u_1 + u)\sigma(u_2 - u)}{\sigma(u' + u)\sigma(u' - u)}\, e^{-Gu - i\varphi_0}.$$

Deduz-se immediatamente d'estas fórmulas as expressões de x e y em funcção uniforme de u, que é o resultado que pretendiamos obter.

II

Sobre as curvas esphero-cylindricas

Sabe-se que a curva inversa de uma cyclica espherica é outra cyclica espherica. Esta proposição dá alguns resultados notaveis quando se applica ás curvas que resultam da intersecção

---

[1] *Curso de Analyse, Calculo integral*, 2.ª parte, pag. 181.

d'uma esphera com um cylindro de revolução. Pode-se representar estas linhas pelas equações

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad x^2+(y-b)^2=c^2,$$

ou, transportando a origem das coordenadas ao ponto da esphera cujas coordenadas são (0, a, 0),

$$x^2+(y+a)^2+z^2=a^2, \qquad x^2+(y+a-b)^2=c^2.$$

Applicando agora a estas equações a transformação por raios vectores reciprocos definida pelas equações

$$x=\frac{2aX}{X^2+Y^2+Z^2}, \quad y=\frac{2aY}{X^2+Y^2+Z^2}, \quad z=\frac{2aZ}{X^2+Y^2+Z^2},$$

obtèem-se duas equações que, pela eliminação de Y, tomam a fórma

$$(1) \qquad \begin{cases} Y=-a \\ [(a-b)^2-c^2](X^2+Z^2)+2a^2(a^2+b^2-c^2)X^2 \\ \quad +2a^2(b^2-a^2-c^2)Z^2+a^4[(a+b)^2-c^2]=0. \end{cases}$$

A primeira equação representa um plano, que passa pelo centro da esphera, e é perpendicular ao eixo dos y. A segunda, pondo

$$l^2=\frac{a^4}{c^2-(a-b)^2}, \qquad h^2-R^2=\frac{a^2(b^2-c^2)}{(a-b)^2-c^2}, \qquad h=\frac{cl}{a},$$

toma a fórma

$$(X^2+Z^2+l^2+h^2+R^2)^2=4l^2(X^2+h^2).$$

Mudando a em $-a$, obtem-se uma equação analoga, correspondente ao caso em que o centro de inversão tem por coordenadas (0, $-a$, 0).

Logo *a linha inversa da curva que resulta da intersecção d'uma esphera com um cylindro de revolução é uma espirica de* Perseus (1), *quando o centro de inversão está situado sobre a secção recta do*

(1) Veja-se sobre esta linha o nosso *Traité des courbes spéciales remarquables, planes et gauches*. Coimbre, 1908, pag. 153.

cylindro que passa pelo centro da esphera e sobre a recta que liga o centro d'esta secção com o centro da esphera, e o modulo é egual a $a\sqrt{2}$.

No caso de ser $(a-b)^2=c^2$, a transformada reduz-se a uma *conica.*

Consideremos em particular o caso em que a superficie do cylindro passa pelo centro da esphera. Temos então $b=c$, e a curva que resulta da intersecção das duas superficies é uma *cyclo-cylindrica.* A equação precedente reduz-se é seguinte:

$$(2) \qquad (2b-a)(X^2+Z^2)=2a^3(X^2-Z^2)+a^4(a+2b),$$

que representa uma *oval de* Cassini (1).

Logo *as curvas cyclo-cylindricas são linhas inversas das ovaes de* Cassini.

No caso de ser $2b=a$, esta equação reduz-se á de uma hyperbole equilatera. No caso de ser $a=-2b$, temos a *lemniscata de* Bernoulli. Nestes casos a esphera e o cylindro são tangentes, e a linha de intersecção é a curva de Viviani.

A equação polar da oval de Cassini representada pela equação (2) é

$$r_1 r_2=\frac{2a^2b}{2b+a},$$

e a distancia dos polos ao centro é egual a $\sqrt{\dfrac{a^3}{2b+a}}$.

Como consequencia do theorema que vimos de demonstrar e das propriedades da transformação por raios vectores reciprocos, obtem-se a propriedade seguinte da curva cyclo-cylindrica:

A curva tem quatro fócos, dois colocados sobre o plano zy *e dois sobre o plano* xy. *O producto das distancias de um ponto da curva aos fócos situados no plano* zy *é proporcional ao quadrado da distancia do mesmo ponto ao ponto* $(0, -a, 0)$. *Os fócos situados no plano* xy *e o ponto* $(0, a, 0)$ *gozam de uma propriedade analoga.*

No caso de o cylindro ser tangente á esphera, mas não passar pelo centro, temos $c=a\pm b$, onde $b>0$, e a equação (1) reduz-se ás seguintes:

$$b(X^2+Z^2)^2=a^2(a-b)Z^2-a^2bX^2,$$

$$(a-b)Z^2-bX^2=ab^2.$$

(1) *Traité des courbes,* etc., pag. 165.

A curva é chamada neste caso *kippopeda de* EUDOSSO, e portanto *esta curva é inversa de uma lemniscata hyperbolica* (1), *quando o centro de inversão é diametralmente opposto ao ponto de contacto da esphera e do cylindro, e é uma hyperbole quando o centro de inversão coincide com o ponto de contacto das duas superficies.*

Demonstrou M. NEWENSGLOWSKI nos *Annales de l'École Normale Supérieure de Paris* (1873, pag. 148) que a somma e a differença de dois arcos convenientemente escolhidos da transformada de uma oval de CASSINI podem ser expressas por um integral elliptico de terceira especie. Do que vimos de dizer conclue-se que as linhas que gozam d'esta propriedade são as *curvas cyclo-cylindricas.*

---

(1) Loc. cit., pag. 185.

PRÓDROMO DA FLORA PORTUGUEZA

POR

GONÇALO SAMPAIO

FAM. I — RANUNCULACEAE, Juss.

1. CLÉMATIS, Rupp.

1. **C. viticélla,** Lin. — Entre Santarem e Tancos, na margem do Tejo (ex Brotero in Fl. lusit. II, 359).

   var. *campaniflóra* (Brot.). C. campaniflora, Brot. in Fl. lusit. II, 359 et in Phyt. lusit. I, 198, tab. 81. — Desde o Minho e Traz dos Montes ao Algarve.

2. **C. flámmula,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 358. — Algarve.

   var. *maritima* (Lin.); Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 103. — Algarve.

3. **C. vitálba,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 358. — Desde o Minho e Traz dos Montes ao Alemtejo. Vulg. *Cipó do reino*, *Vide branca.*

4. **C. cirrhósa,** Lin.; Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 102. — Algarve e Baixo Alemtejo littoral (n. v.).

2. THALÍCTRUM, Tour.

5. **T. flávum,** Lin.

raç. **glaucum** (Desf.) — Th. glaucum, Desf.; J. Henriq. in Exp. scient. 124; Th. flavum Brot. in Fl. lusit. II, 358. — Todo o paiz. Vulg. *Thalictro, Ruibarbo dos pobres.*

6. **T. mínus,** Lin.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 104. — Villa Velha do Ródão, Fonte das Virtudes, na margem do Tejo (n. v.).

3. ANEMÓNE, Tour.

7. **A. trifólia,** Lin.; Mach. in Cat. met. 3; A. albida, Mariz, in Bol. Soc. Brot. IV, 101, tab. II. — Desde o Minho ao Douro littoral.

Brotero, na Fl. lusit. II, 362, indica a **A. nemorosa** entre Louzã e Miranda do Corvo e outras localidades da Beira. Esta especie, porêm, não tem aparecido modernamente no paiz, sendo provavel que a citação do nosso botanico antes se refira á *A. trifólia,* que não é rara ao norte.

8. **A. coronária,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 362.

raç. **cyánea** (Ris.) — Lisboa, naturalisada nas vinhas. Vulg. *Anémona, Anémola.*

9. **A. palmáta,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 362. — Desde o Douro ao Algarve.

4. ADÓNIS, Rupp.

10. **A. polymórphus,** Zum.; A. annua, Brot. in Fl. lusit. II, 376, non Mill. Vulg. *Adonis, Gota de sangue, Olho de perdiz.*

raç. **autumnális** (Lin.); A. baetica, Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 100, non Coss. — Extremadura e Alemtejo.
raç. **microcárpa** (DC.); A. dentata, Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 100, non auct. gall. — Desde a Extremadura ao Algarve.

5. RANÚNCULUS, Tour.

11. **R. trichophyllus,** Chaix.; Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 89; R. pantothrix, Brot. in Fl. lusit. II, 375. — Extremadura.

raç. **paucistamíneus** (Tausch.) — Desde Traz dos Montes ao Alto Alemtejo.

12. **R. diversifólius,** Gilb.; *R. aquatilis*, Lin. in sensu auct. mult. non Brot.; R. peltatus, Schrank. — Baixo Alemtejo (raro).

13. **R. confúsus,** Godr.; R. heterophyllus, Brot. in Fl. lusit. II, 374; R. peltatus, Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 87 non Schrank + R. pseudofluitans, Mariz non Hiern. + R. Baudoti, Mariz non Godr.

raç. **Brotéri,** Samp. — Desde o centro ao sul do paiz.
raç. **occidentális,** Samp. — Desde o Minho ao Algarve.
raç. **algarviensis,** Samp. — Algarve.
raç. **leontinensis** (Freyn). — Baixo Alemtejo.

14. **R. tripartítus,** DC.; Mach. in Cat. met., 4. — Desde o Minho á Extremadura.

raç. **lusitánicus** (Freyn); R. lusitanicus, Freyn in Flora n.° 2. — Desdc a Serra d'Arga á Serra da Estrella.
raç. **obtusifólius,** DC.; R. hololeucus, Lloyd; Mach. in Cat. met. 4. — Desde o Minho á Serra da Estrella.

Esta especie e a precedente apresentam com frequencia formas terrestres e aquaticas muito distinctas, mas completamente instaveis no mesmo individuo.

15. **R. Lenormándii,** Schultz.; Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 85; R. hederaceus, Brot. in Fl. lusit. II, 374. — Desde o Minho ao Alemtejo.

raç. **lutárius** (Rev.) — Desde o Minho ao Alemtejo.

16. **R. hederáceus,** Lin.; Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 85. — Desde as Beiras ao Alemtejo.

var. *homœophyllus* (Ten.) — Douro littoral.

17. **R. ficária,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 364. Ficaria ranunculoides, Roth. — Todo o paiz. Vulg. *Ficaria, Celidonia menor.*

var. *grandiflora* (Borb.) — Centro e sul.

18. **R. scelerátus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 373. — Entre Douro e Tejo. Vulg. *Patalou dos valles.*

19. **R. ophioglossifólius,** Vill.; Mach. in Cat. met. 7. — Desde o Minho ao Algarve.

for. *pusillus* Beg. — Norte.

20. **R. dichotomiflórus,** Lag.; Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 95 — Provincias do norte.

var. *latifolius,* Freyn in Mariz, loc. cit. — Cabeceiras de Basto.
var. *párvulus,* Samp. in excic. — Matosinhos.

21. **R. flámmula,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 365. — De norte a sul do paiz. Vulg. *Ranunculo inflamatorio.*

var. *serrátus,* DC. — Norte.
var. *angustifolius,* Walr. — Norte a sul.

22. **R. gramíneus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 365. — Alemtejo e Algarve.

var. *luzulaefólius,* Bois. — Com o typo.

23. **R. bupleuroides,** Brot. in Fl. lusit. II, 365 et in Phyt. lusit. I, 194, tab. 79. — Desde o Minho ao Baixo-Alemtejo.

24. **R. bullátus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 365.—Desde Coimbra ao Alemtejo. Vulg. *Montã do outóno.*

25. **R. flabellátus,** Desf.; R. dimorphorhizus, Brot. in Phyt. lusit. II, 227, tab. 180; R. chaerophyllus, DC. non Lin. — Quasi todo o paiz.

var. *comátus,* Link. — Desde a Beira ao Alemtejo.
var. *subpinnátus,* Freyn — De Traz dos Montes ao Alemtejo.

var. *flavéscens*, Freyn. — De Coimbra ao Algarve.
var. *chaerophylloides* (Jord.) — Do Douro ao Alemtejo.

26. **R. Henriquésii,** Freyn, in Flora LXIII, 234 (an. 1880) et Zur Ken. Art. Gott. Ran. 23, tab. II; *R. rufulus*, Brot.? in Fl. lusit. II, 367. — Desde o Douro á Beira.

27. **R. gregárius,** Brot. in Fl. lusit. II, 369, non DC. nec. Freyn.; Samp. in Bul. Soc. Port. Sc. Nat. I, fasc. 2; R. olysiponensis, Pers.; R. Holianus, Rechb.; R. suborbiculatus, Freyn. — Desde o Douro ao Alemtejo.

var. *escurialensis* (Bois. et Reut.); R. escurialensis, Bois. et Reut.; J. Henriq. in Exp. Scient., 123. — De Traz dos Montes á Beira.

28. **R. nigréscens,** Freyn, in Prod. Fl. Hip. Willk et Lge. III, 921; Willk. in Ill. Fl. Hisp. 28, tab. 18. — Desde o Minho á Beira (nas altas montanhas).

29. **R. bulbósus,** Lin.

raç. **Alleae** (Willk.); R. Alleae, Willk.; Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 97. — Desde Bragança ao Alemtejo.
var. *dentatus*, Freyn. — Traz dos Montes e Beiras.
var. *laciniatus*, Freyn. — Serra de Montesinho.

30. **R. Brotéri,** Freyn (an. 1880); R. adscendens, Brot. in Phyt. lusit. II, 229, tab. 181, non in Fl. lusit. — Desde a Extremadura ao Algarve.

var. *grandifólius*, Freyn. — Alemtejo e Algarve.

31. **R. adscéndens,** Brot. in Fl. lusit. II, 370, non in Phyt. lusit. — Todo o paiz.

var. *marginátus*, Freyn. — Algarve.
var. *gallécicus* (Freyn); R. occidentalis, Freyn in Prod. Fl. Hisp. Willk. et Lge. III, 931. — Norte.

Entre os *R. Alleae*, *R Broteri* e *R. adscendens* ha formas ambiguas, cuja classificação é um pouco arbitraria.

32. **R. répens,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 366. — Todo o paiz.

for. *macrophyllus*, Freyn. — Norte.

Com o nome de *Botão de oiro* é frequentemente cultivada nos jardins uma variedade d'esta especie com flores dobradas.

33. **R. muricátus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 373.

var. *lusitanicus*, Samp. — Todo o paiz. Vulg. *Bugalhó*.

34. **R. arvénsis,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 373. — Quasi todo o paiz.

35. **R. sárdous,** Crtz.

raç. **trilóbus** (Desf.); R. trilobus, Desf.; Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 97; R. sardous, Brot. in Fl. lusit. II, 371. — Todo o paiz.

36. **R. parviflórus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 371. — Desde o Minho ao Alemtejo.

var. *subapétalus*, Gr. — Àlmeida.

Nos jardins é frequentemente cultivado o **R. asiaticus,** Lin. com flores dobradas e de cores diversas.

6. CÁLTHA, Rupp.

37. **C. palústris,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 377. — Desde o Minho á Beira.

var. *cornúta* (Schot.) — Castro Laboreiro.

7. HELLÉBORUS. Tour.

38. **H. fœtidus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 301. — Desde Traz dos Montes ao Alemtejo. Vulg. *Erva besteira*, *Erva dos besteiros*.

8. NIGÉLLA, Tour.

39. **N. damascêna,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 334. — Desde Traz dos Montes ao Algarve. Vulg. *Barbas de velho*.

for. *minor*, Bois. — Sul, com o typo.

40. **N. gállica,** Jord.

var. *divaricáta*, Brand.; N. arvensis, Brot. in Fl. lusit. II, 334, non Lin. — Alto Douro.

41. **N. hispánica,** Lin.; Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 106. Desde o Alemtejo ao Algarve.

9. AQUILÉGIA, Tour.

42. **A. vulgáris,** Lin.
raç. **díchroa** (Freyn); A. dichroa, Freyn in Flora (an. 1880); A. vulgaris, Brot. + A. viscosa, Brot. in Fl. lusit. II, 333. — Norte do paiz.
for. *Molleriana* (Borb.) — Serra da Estrella.

10. DELPHÍNIUM, Tour.

43. **D. consólida,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 302. — Alemtejo e Algarve (raro). Vulg. *Esporas bravas*, *Consolda real* (n. v.).

44. **D. pubéscens,** DC.
raç. **Loscósi** (Costa): Rouy et Fouc. in Fl. Fr. I. 130. — Extremadura e Alemtejo. (ex P. Cout. in litt.). Vulg. *Esporas bravas*, *Consolda real* (n. v.).

45. **D. Ajácis,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 302. — Cultivado e subespontaneo em varias localidades. Vulg. *Esporas*, *Consolda real.*
raç. **hispánicum** (Willk.); J. Henriq. in Exp. Scient., 124. — Beiras (n. v.).

46. **D. peregrínum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 303. — Da Beira ao Algarve. Vulg. *Esporas bravas.*
raç. **halterátum,** Sm. et Sibth.
var. *verdunense* (Balb.); D. cardiopetalum, DC. — Norte e sul.
var. *longipes* (Moris). — Centro e sul.

47. **D. staphyságria,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 304. — Desde o Alto Douro ao Alemtejo. Vulg. *Paparraz*, *Erva piolheira.*

48. **D. pentágynum,** Desf. in Fl. At. tab. 111; Brot.

in Phyt. lusit. fasc. 1.° (ediç. an. 1800) tab. VIII. — Desde Coimbra ao Algarve.

11. ACÓNITUM, Tour.

49. **A. napéllus,** Lin.

raç. **lusitánicum,** Rouy; Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 111; A. paniculatum, Mach. in Cat. met. 12, non Lamk. — Traz dos Montes. Vulg. *Aconito.*

12. PŒÓNIA, Tour.

50. **P. máscula** (Lin.) Desf.; P. officinalis, Brot. in Fl. lusit. II, 299. Vulg. *Peonia, Rosa albardeira.*

raç, **lusitánica** (Mill.); P. Broteri, Bois. et Reut. — Desde Traz dos Montes ao Algarve.

raç. **ovatifólia** (Bois. et Reut.); P. Broteri γ. ovatifolia, Mariz in Bol. Soc. Brot. IV, 112. — Castello de Vide.

51. **P. femínea** (Lin.) Desf. — Vulg. *Peonia.*

raç. **húmilis** (Retz.); P. microcarpa, Bois. et Reut.; Mach. in Cat. met., 12; P. peregrina γ. leiocarpa, Coss. — Ribeira de Niza (n. v.).

FAM. II — BERBERACEAE, Lindley

13. BÉRBERIS, Tour.

52. **B. vulgáris,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 556. — Subespontanea em varias localidades do norte. Vulg. *Bérberis, Uva espim.*

FAM. III — NYMPHEACEAE, Salisb.

14. NYMPHAEA, Tour.

53. **N. álba,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 283. — Do Alto Minho ao Alemtejo. Vulg. *Gôlfo branco, Boleira branca.*

15. NÚPHAR, Sm. et Sibth.

54. **N. lúteum** (Lin.) Sm. et Sibth.; Nymphaea lutea, Lin; Brot. in Fl. lusit. II, 283. — Do Alto Minho ao Alemtejo. Vulg. *Gôlfo amarello, Boleira amarella, Figueira d'agua.*

var. *punctatum,* Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 90. — Coimbra (S. Facundo).

Fam. IV — PAPAVERACEAE, Juss.

16. PAPÁVER, Tour.

55. **P. somníferum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 254. Vulg. *Papoila, Dormideira.*

raç. **setígerum** (DC.); P. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 48. — Varias localidades, desde o Douro ao Algarve.
raç. **horténse** (Huds.); P. somniferum β. glabrum, Bois.; P. Cout. in loc. cit. — Cultivada nos jardins e subcspontanea ás vezes.
raç. **officinále** (Gmel.); P. album, Mill. in Dic. Jard. — Pouco cultivada.

56. **P. rhœas,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 253. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Papoila dos campos, Papoila das searas.*

var. *cereále* (Jord.) — Do Douro ao Algarve.
var. *intermédium* (Beck.) — Do Douro ao Algarve.
var. *caudatifólium* (Timb.) — Do Douro ao Algarve.
raç. **strigósum** (Boen.); P. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 45. — Do Douro á Extremadura.

57. **P. dúbium,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 253. — Quasi todo o paiz. — Vulg. *Papoila longa.*

raç. **collínum** (Bog.) — Desde o Douro ao Algarve.
var. *Lamottei* (Bor.) — Do Douro ao Algarve.
var. *modestum* (Jord.) — Do Douro ao Algarve.

raç. **Lecóquii** (Lamt.); P. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 48. — Arredores de Lisboa (n. v.).

Esta especie e a precedente cruzam-se, quando vivem em mistura, dando origem ao hybrido **P. dubium** × **rhoeas**, cujos caracteres são bastante variaveis de individuo para individuo.

58. **P. híspidum**, Lamk.; P. hybridum, Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 253. — Desde Traz dos Montes ao Algarve. Vulg. *Papoila pelluda*.

59. **P. argemóne**, Lin.; J. Henriq. in Exp. Scient. 120. Desde o Douro á Beira Baixa.

var. *glábrum*, Kock. — Douro (rara).

17. GLAUCIUM, Tour.

60. **G. flávum**, Crtz. in St. Aust. (an. 1769); G. luteum, Scop. in Fl. Car, ed. 2.ª (an. 1772). Chelidonium glaucium, Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 255. — Costa maritima, do Minho ao Algarve. Vulg. *Papoila pontuda*.

for. *vestitum* (Lge.) — Aqui e ali.
for. *glabratum* (Lge.) — Aqui e ali.

61. **G. corniculátum** (Lin.) Curt.; Mach. in Cat. met. 125; Chelidonium corniculatum, Lin.

var. *phoeniceum* (Crtz) — Desde o Alto Douro ao Algarve.

18. CHELIDÓNIUM, Tour.

62. **C. május**, Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 255. — Desde o Minho ao Algarve. Vulg. *Celidonia*, *Cerúda*, *Erva andorinha*.

Fam. V — FUMARIACEAE, DC.

19. HYPECÓUM, Tour.

63. **H. procúmbens**, Lin.; Brot. p. p. in Fl. lusit. I, 209. — Algarve, nos areaes maritimos.

var. *glaucescens* (Guss.) — Algarve.

64. **H. æquilóbum,** Viv. in Fl. Lyb. 7, tab. 3 (an. 1824)! H. grandiflorum Benth. in Cat. Pyr. (an. 1826); Mariz in Bol. Soc. Brot. VII, 74. — De Traz dos Montes ao Algarve.

20. CORYDALIS, Vent.

65. **C. cáva,** (Lin.) Schwg et Koert.; Fumaria bulbosa, cava, Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 590. — Serra de Rebordãos (Bragança).

66. **C. claviculáta** (Lin.) DC.; Fumaria claviculata, Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 591. — Desde o Minho á Serra da Estrella.

21. PLATYCÁPNOS, Bernh.

67. **P. spicátus** (Lin.) Bernh.; Fumaria spicata, Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 591. — De Traz dos Montes ao Algarve.

22. FUMÁRIA, Tour.

68. **F. capreoláta,** Lin.; Brot. p. p. in Fl. lusit. I, 591. — Desde o Minho ao Algarve. Vulg. *Fumaria, Erva molarinha, Erva do Menino Jesus, Catharinas queimadas.*

var. *pallidiflóra* (Jord.) — De norte a sul.
var. *speciósa* (Jord.) — Do centro a sul.

69. **F. murális,** Sond.; F. media, Ham, non Lois.; F. capreolata et F. officinalis, Brot. p. p. in loc. cit.; F. capreolata, β. Bastardi, Mach. — Todo o paiz. Vulg. *Fumaria, Erva molarinha, Salta-sebes, Mata-fogo, Erva do Menino Jesus, Catharinas queimadas.*

var. *serotina* (Gus.); F. muralis, β. Bastardi, P. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 63. — Do Minho ao Algarve.
var. *vágans* (Jord.); F. muralis γ Boraei, P. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 63. — Norte a sul.

70. **F. agrária,** Lag.; Mach. in Cat. met. 127; F. officinalis Brot. p. p. in Fl. lusit. loc. cit. — Desde a Extremadura ao Algarve. Vulg. *Fumaria maior.*

71. **F. officinális**, Lin.; Brot. p. p. in Fl. lusit. II, 590; Mach. in Cat. Met., 127. — De Traz dos Montes ao Algarve. Vulg. *Fumaria, Erva molarinha.*

var. *media* (Lois.) — Centro littoral (n. v.).

72. **F. micrántha**, Lag.; F. densiflora, DC. (p. p.); P. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 61. — Bragança. Vulg. *Fumaria menor* (n. v.).

73. **F. parviflóra**, Lamk.; Brot. in Fl. lusit. I, 592. — De Traz dos Montes ao Algarve. Vulg. *Fumaria menor.*

As diversas especies de Fumaria cruzam-se não raras vezes entre si, quando vivem junctas, produzindo formas hybridas muito variadas. É provavelmente a uma d'estas formas que pertence a planta indicada com o nome de *F. segetalis* pelo sr. P. Coutinho no «Boletim da Sociedade Broteriana» x, pag. 62.

Fam. VI — BRASSICACEAE, Lindley

23. RÁPHANUS, Tour.

74. **R. silvéster**, Lamk.; R. raphanistrum, Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 574. — Centro e sul. Vulg. *Saramago.*

microcárpus (Lge.); R. microcarpus, Lge.; Mariz in Bol. Soc. Brot, III, 73. — Todo o paiz.

O **R. satívus**, Lin. *(Rabanete)* é bastante cultivado nas hortas, em duas variedades.

24. BRÁSSICA, Tour.

75. **B. sabulária**, Brot. in Phyt. lusit. fasc. I (edit. 1.ª an. 1800) pag. 49, Phyt. lusit. I, pag. 97, tab. 43; Sisymbrium Parrá, Lin. (?); B. sabularia + B. Tournefortii, Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 100-101. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Labresto.*

var. *papilláris*, Bois. — Cabo Sines.
var. *laevigata* (Lag.); Brassica laevigata, Lag.—Minho.

76. **B. oxyrrhína**, Coss.; Willk. et Lge. in Prd. Fl. Hisp. III, 855. — Littoral do sul (n. v.).

raç. **nostálgica,** Samp. in An. Sc. Nat. x; Sisymbrium Parrá, Lin. (?). Da Extremadura ao Algarve (littoral).

77. **B. cheirántus,** Vill.; J. Henriq. in Exp. Scient. 120. — Desde o Minho ao Alemtejo.

raç. **montána** (DC.); Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 102. — Desde o Minho á Serra da Estrella.

raç. **pseudoerucástrum** (Brot.); B. Pseudo-Erucastrum, Brot. in Fl. lusit. I, 581; B. Valentina, β. pseudoerucastrum, Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 101. — De Traz dos Montes ao Algarve.

78. **B. Jóhnstoni,** Samp. in An. Sc. Nat. x (an. 1905); B. Tourneforti et B. cheirantiflora, Johnston in Calend. portuen., non Gou. nec DC. — Areaes maritimos, no norte e centro do paiz.

79. **B. nígra** (Lin.) Koch.; Sinapis nigra, Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 585. — Cultivada e subespontanea em muitas localidades. Vulg. *Mostarda, Mostarda negra.*

80. **B. sinapístrum,** Bois.; Sinapis arvensis, Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 184. — Desde o Minho ao Algarve.

var. *Schkuhriana* (Reich.); Sinapsis orientalis, Brot. p. p. in loc. cit. — Extremadura e Alemtejo.

81. **B. álba** (Lin.) Bois.; Sinapis alba, Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 585. — Cultivada e espontanea em varias localidades, de norte a sul. Vulg. *Mostarda branca.*

São cultivadas em todo o paiz, com differentes raças e variedades, a **B. oleracea,** Lin. *(Couve)*, a **B. napus,** Lin. *(Nabo* e *Couve nabiça)* e a **B. asperifolia,** Lamk. *(Nabo* e *Colza)*.

25. HIRSCHFÉLDIA, Moench.

82. **H. incána** (Lin.) Lowe; Sinapsis incana, Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 585; Erucastrum incanum, Koch, Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 103; Hirschfeldia adpressa, Moench. — Quasi todo o paiz.

26. ERUCÁSTRUM, Presl.

83. **E. obtusángulum** (Hall.) Schleich.; Brassica erucastrum, Lin.; Sisymbrium obtusangulum, Hall.; S. erucastrum, Brot. in Fl. lusit. I, 588. — Desde o Douro ao Alemtejo.

27. DIPLOTÁXIS, DC.

84. **D. erucoides** (Lin.) DC.; Mach. in Cat. met. 9, Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 104. — Setubal (Troia).

85. **D. tenuifólia** (Lin.) DC.; Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 104; Sisymbrium tenuifolium, Lin. — Setubal (Troia).

86. **D. vimínea** (Lin.) DC.; Mach. in Cat. met. 9; Sisymbrium vimineum, Lin. — Littoral do centro e sul.

for. *confertiflóra*, Willk. — Costa maritima do centro.
for. *integrifólia*, Lge. — Arredores de Lisboa.

87. **D. virgáta** (Cav.) DC.; Mach. in Cat. met. 9; Sinapis virgata, Cav. — Centro e sul do paiz.

raç. **vicentina** (Welw.); Diplotaxis vicentina, Welw. in herb. Esc. Polyt. Lisb. — Areaes maritimos do sul.

88. **D. cathólica** (Lin.) DC.; Sisymbrium catholicum, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 587. — Quasi todo o paiz.

var. *bipinnatifida*, Kze. — Norte a sul.

28. ERÚCA, Tour.

89. **E. satíva**, Mill.; Brassica eruca, Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 581. — Margens do rio Douro. Vulg. *Eruca*.

29. HÉSPERIS, Tour.

90. **H. laciniáta**, All.; J. Daveau in Bol. Soc. Brot. VIII, 60. — Serra de Monte Junto (n. v.).

30. MALCÓLMIA, R. Br.

91. **M. parviflóra,** DC.; Mach. in Cat. met. 5. — Areaes maritimos, desde o rio Minho ao Mondego.

92. **D. marítima** (Lin.) R. Br.; Cheiranthus maritimus, Lin.; Hesperis maritima, Lamk., Brot. in Fl. lusit. I, 576. — Cultivada nos jardins e subespontanea nos areaes maritimos do centro.

93. **M. littórea** (Lin.) R. Br.; Cheiranthus littoreus, Lin.; Hesperis littorea, Lamk.; Brot. p, p. in Fl. lusit. I, 577. — Areaes maritimos de todo o paiz.

for. *alyssoides* (DC.). — Norte a sul.
for. *sinuata*, Rouy et Fouc. — Norte a sul.

94. **M. pátula** (Lag.) DC.; J. Henriq. in Bol. Soc. Brot. II, 161; M. littorea, var., Brot. in Fl. lusit. I, 577. — Entre Douro e Tejo, nos areaes e terrenos arenosos do interior.

95. **M. gracílima,** Samp. in Cat. Ass. Pyr. (an. 1907). Distincta da precedente pela raiz perenne, grossa, cauliforme, pelos ramos, pediculos e fructos mais tenues, pelas folhas ás vezes ovaes e trilobadas e pelas sementes orbiculares. — Areaes maritimos do Baixo Alemtejo.

96. **M. lacéra** (Lin.) DC.; Cheiranthus lacerus, Lin.; Hesperis lacera, Lamk., Brot. in Fl. lusit. I, 577. — Da Extremadura ao Algarve, nos terrenos arenosos do littoral.

31. MATHIÓLA, R. Br.

97. **M. incána** (Lin.) R. Br.; Cheiranthus incanus, Lin.; Heperis violaria, Lamk.; Brot. in Fl. lusit. I, 577. — Cultivada e espontanea nos terrenos, muros e rochedos da beira-mar. Vulg. *Goiveiro*.

98. **M. sinuáta** (Lin.) R. Br.; Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 90. Cheiranthus sinuatus, Lin. — Areaes maritimos.

for. *glandulósa* (Vis.) — Norte e centro.

99. **M. trístis** (Lin.) R. Br.; Cheiranthus tristis, Lin.; Hesperis angustifolia, Lamk.; Brot. in Fl. lusit. I, 577. — Desde Traz dos Montes ao Alemtejo.

for. *glandulósa*, Samp. — Douro (com o typo).

100. **M. parviflóra** (Schomb.) R. Br.; Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 91; Cheiranthus parviflorus, Schomb. in Schrad journ. III, 369. — Algarve (entre Loulé e S. João da Venda) (n. v.).

Nos jardins cultiva-se a **M. ánnua** (Lin.) Savet. vulgarmente chamada *Quarentena.*

32. CHEIRÁNTHUS, Lin.

101. **C. fruticulósus,** Lin. — Naturalisado de norte a sul, nos muros velhos e rochedos (raro).

raç. **cheiri** (Lin.); Cheiranthus cheiri, Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 576. — Cultiva-se nos jardins com differentes variedades. Vulg. *Goiveiro amarello.*

33. ERYSIMUM, Lin.

102. **E. linifólium** (Pers.) Gay.; Mach. in Cat. met., 27. Chiranthus linifolius, Pers. — Desde Traz dos Montes á Serra da Estrella.

103. **E. canéscens,** Roth.; E. virgatum, Brot. in Fl. lusit. I, 575, non Roth.; E. australe, Gay, J. Henriq. in Exp. Scient. 119. — Serra da Estrella, Beira Baixa.

104. **E. ochroléucum,** DC. in Fl. de Fr. IV, 658; J. Henriq. in Exp. Scient. 119. — Serra da Estrella (n. v.).

34. BARBARÉA, Beck.

105. **B. vulgáris,** R. Br.; Erysimum Barbarea, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 575. — Desde o Douro á Extremadura. Vulg. *Erva de Santa Barbara.*

106. **B. intermédia,** Bor.; Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 91. — De Traz dos Montes á Beira Baixa.

var. *pyrenaica* (Jord.); B. sicula, β. prostrata; Mariz in Bol. Soc. Brot. VII, 73. — Traz dos Montes.

107. **B. præcox** (Sin.) R. Br.; Mach. in Cat. met. 2. — Desde o Douro ao Alemtejo (n. v.).

35. SISYMBRIUM, Tour.

108. **S. polycerátium,** Lin. Brot. in Fl. lusit. III, 588. — Extremadura (raro).

109. **S. Lagáscae,** Amo, Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 86. — Desde o Douro ao Alemtejo.

for. *runcinátum* (Lag.); S. runcinatum, Lag. —Desde o Douro ao Alemtejo.
for. *hirsútum* (Lag.); S. hirsutum, Lag. — Com o precedente.

110. **S. officinále** (Lin.) Scop.; Erysimum officinale, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 575. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Rinchão, Erva dos cantores.*

111. **S. sóphia,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 587. — Traz dos Montes e Douro.

112. **S. austríacum,** Jacq., Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 87. — Entre Minho e Douro.

raç. **erysimifolium** (Pour.). — Margens dos rios Minho e Douro.

113. **S. írio,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 588. — De Traz dos Montes ao Algarve.

114. **S. Colúmnae,** Jacq., Willk. et Lge. in Pr. Fl. Hisp. III, 800. — Traz dos Montes.

36. ALLIÁRIA, Rupp.

115. **A. officinális,** Andrz.; Hesperis alliaria, Lamk.; Brot. in Fl. lusit. I, 578. — De Traz dos Montes ao Alemtejo. Vulg. *Erva alheira.*

37. TURRÍTIS, Tour.

116. **T. glábra,** Lin. Brot. in Fl. lusit. I, 578. — Desde a Serra de Rebordãos á Serra da Estrella.

38. ÁRABIS, Lin.

117. **A. thaliána,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 570. Stenophragma thalianum, Cel. — Desde o Minho ao Alemtejo.

118. **A. pinnatífida,** Lamk.; Arabis Boryi, Bois.; Mach. in Calen. met. 3; Braya pinnatifida, Koch, J. Henriq. in Exp. Sciet., 119. — Do Marão á Lousã (altas montanhas).

119. **A. hirsúta,** (Lin.) Scop.; Turritis hirsuta, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 578. — Desde o Minho á Beira Baixa.

raç. **sagittáta** (DC.); A. sagittata, DC., Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 93. — Bussaco (n. v.).

120. **A. stenocárpa,** Bois. et Reut., Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 94. — Serra de Rebordãos (n. v.).

121. **A. lusitánica,** Bois. in Diag. pl. or. nov. III, II. 1, 20. — Arredores de Lisboa.

122. **A. murális,** Bert.

var. *sadína,* Samp.; A. muralis, Mach. in Calen. met. 3. — Entre Tejo e Sado.

39. CARDÁMINE, Tour.

123. **C. praténsis,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 583. — Desde o Minho á Extremadura. Vulg. *Cardámine.*

var. *Haynéana* (Welw.). — Norte e centro (varias localidades).

124. **C. hirsúta,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 583. — Todo o paiz. Vulg. *Agrião menor.*

raç. **silvática** (Link.); C. silvatica, Link., Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 94. — Norte.

40. NASTÚRTIUM, R. Br.

125. **N. aquáticum** (Lin.) Wahlemb.; Sisymbrium Nasturtium aquaticum, Lin.; Sisymbrium Nasturtium, Brot. in Fl. lusit. I, 587; Nasturtium officinale, R. Br. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Agrião.*

for. *siifolium* (Reich.). — Aqui e ali.

126. **N. ásperum** (Lois.) Bois.; Sisymbrium asperum, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 588. — Desde Traz dos Montes á Beira.

raç. **Boissiéri** (Coss.); Nasturtium Boissieri, Coss., Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 92. — De Coimbra á Extremadura.

127. **N. silvéstre** (Lin.) R. Br., Mach. in Calen. met., 2; Sisymbrium silvestre, Lin.; Roripa silvestris, Smith. — Desde o Douro ao Algarve.

128. **N. palústre** (Poll.) DC.; Sisymbrium palustre, Poll.; Roripa palustris, Bess.; Roripa nasturtioides, Spach. — Margens do rio Douro.

41. RÓRIPA, Scop.

129. **R. amphíbia** (Lin.) Bess.; Camelina aquatica, Brot. in Fl. lusit. I, 564; Sisymbrium amphibium, Lin. — Desde Aveiro á Extremadura.

130. **R. pyrenaica** (Lin.) Spach., Mariz in Bol. Soc. Brot. VII, 74; Sisymbrium pyrenaicum, Lin. — Desde Traz dos Montes ao Douro.

42. CAMELÍNA, Crtz.

131. **C. silvéstris,** Wallr.; Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 84; C. sativa, Brot. in Fl. lusit. I, 564, non Crtz. — Traz dos Montes e Douro. Vulg. *Gergelim bastardo.*

43. LUNÁRIA, Tour.

132. **L. redivíva,** Lin., Brot. manuscr. ex Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 95; Mach. in Calen. met. 4. — Beira e Algarve. (n. v.).

133. **L. inodóra,** Lamk.; L. annua, Lin.; L. biennis, Moench., Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 95. — Cultivada e subespontanea (Castello Branco).

44. DRÁBA, Lin.

134. **D. vérna,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 559. Erophila verna, Mey.

var. *leptophylla* (Rouy et Fouc.) — De Traz dos Montes ao Algarve.

135. **D. murális,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 97. — Desde o norte ao centro do paiz.

45. ALYSSUM, Lin.

136. **A. campéstre,** Lin.

var. *colinum* (Brot.); A. colinum, Brot. in Phyt. lusit. II, 209, tab. 180; A. montanum, Brot. in Fl. lusit. I, 558, non Lin. — Desde Traz dos Montes ao Algarve.

137. **A. calycínum,** Lin., Samp. in Not. crit. I, 10. — Traz dos Montes e Douro.

138. **A. híspidum,** Losc., Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 96. — De Traz dos Montes ao Algarve.

for. *granatense* (Bois. et Reut.). — Alemtejo.

139. **A. alpéstre,** Lin.

raç. **serpyllifólium** (Desf.); A. serpyllifolium, Desf., P. Cout. in Bol. Soc. Brot. II, 162. A. alpestre, Brot. in Fl. lusit. I, 577 non Lin. — Bragança.

140. **A. marítimum** (Lin.) Lamk., Brot. in Fl. lusit. I, 558; Lobularia maritimum, Desv.; Clypeola maritima, Lin. — Do Douro ao Algarve. Vulg. *Açafate de prata.*

var. *densiflórum* (Lge.) — Areaes maritimos do sul.

46. COCHLEÁRIA, Tour.

141. **C. glastifólia,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 571. — Cultivada e naturalisada (Villa Nova de Milfontes).

Não existe actualmente nas margens do rio Douro, perto do Porto, onde Brotero a indicou como subespontanea.

142. **C. dánica,** Lin., E. Johnston in Rev. Soc. Inst. do Port. n.º 2, pag. 59 (an. 1881). — Costa maritima do norte e sul do paiz.

143. **C. olissiponénsis,** Brot. in Fl. lusit. I, 571; C. pusilla, Brot. in Phyt. lusit. I, 100, tab. 21. C. acaulis, Desf.; Ionopsidium acaule, Rech. — Littoral do sul.

A designação binaria mais antiga *C. acaulis*, Desf. é impropria, porque a planta apresenta não raras vezes um caule bastante desenvolvido.

47. HUTCHÍNSIA, R. Br.

144. **H. petræa** (Lin.) R. Br., Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 80; Lepidium petraea, Lin,. Brot. in Fl. lusit, I, 566. — Extremadura e Alemtejo.

48. CAPSÉLLA, Medic.

145. **C. procúmbens** (Lin.) Fries., Mach. in Calen. met. 10; Lepidium procumbens, Lin.; Hutchinsia procumbens, Desv. — Algarve, em Faro (n. v.).

146. **C. bursa-pastóris** (Lin.) Moench.; Thlaspi bursa-pastoris, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 568. — Norte, nas regiões elevadas. Vulg. *Bolsa de pastor*.

raç. **rubella** (Reut.) — Abundante em todo o paiz, de norte a sul.

A × **C. grácilis**, Gren. — forma esteril que resulta do cruzamento da *C. bursa-pastoris* typica com a raça *rubella* — encontra-se frequentemente em mistura com os productores, nos concelhos de Bragança, Montalegre, Trancoso, etc.

49. THLÁSPI, Tour.

147. **T. perfoliátum,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 568. — Desde Traz dos Montes ao Alemtejo.

148. **T. montánum,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 569. — No norte de Traz dos Montes (n. v.).

50. TEESDÁLIA, R. Br.

149. **T. lepídium,** DC.; Lepidium nudicaule, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 566. — Desde Traz dos Montes ao Algarve.

150. **T. nudicáulis** (Lin.) R. Br.; Iberis nudicaulis, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 570; Teesdalia iberis, DC. — Desde o Minho á Extremadura.

51. IBÉRIS, Lin.

151. **I. confèrta,** Lag., Mach. in Calen. met., 13. — Serra da Estrella, nos logares altos.

152. **I. pectináta,** Bois. in Diag. pl. nov. I, 75; Willk. et Lge. in Prod. Fl. Hisp. III, 768; Heperis hirtula, Welw. — Baixo Alemtejo e Algarve.

153. **I. contrácta,** Pers.

raç. **ciliolata** (DC.); I. contracta β. ciliolata, DC. in Reg. Veg. II, 405; I. Welwitschi, Bois. in Diag. pl. nov. ser. 2.ª I, 39; I. linifolia Brot. in Fl. lusit. non Lin. — Alemtejo littoral.

rac. **lusitánica** (Jord.); I. contracta, Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 77; I. Reynevalli, Mariz? in Bol. Soc. Brot. VII, 73. — Traz dos Montes e Algarve.

154. **I. Pruiti,** Tin.; I. sempervirens, Webb· in It. hisp. 77. non Lin.; I. Garrexiana, Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 79; I. Tenoreana, Mariz p. p. in loc. cit. non DC. — Costa maritima do centro e sul.

var. *Tenoreana* (DC.); I. Tenoreana, DC., Mach. in Calen. met. 12, Mariz p. p. in Bol. Soc. Brot., III, 78; I. procumbens, Lge., Mariz in loc. cit. 77.

Com a designação popular de *Assembleias* são frequentemente cultivadas nos jardins a **I. umbelláta,** Lin. e a **I. amára,** Lin. Esta ultima foi indicada por Brotero, na Fl. lusit. I, 569, como subespontanea em Collares.

52. LEPÍDIUM, Tour.

155. **L. satívum,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 576. — Cultivado e subespontaneo em varias localidades do centro e sul. Vulg. *Mastruço.*

156. **L. campéstre** (Lin.) R. Br., Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 82. — Cascaes (n. v.).

157. **L. heterophyllum** (DC.) Benth.; Thlaspi heterophyllum, DC.; T. campestre, Brot. in Fl. lusit. I, 568, non Lin. — Quasi todo o paiz.

fr. *canescéns* (Gr. et God.) — Norte e sul.

158. **L. hírtum** (Lin.) Smith., Rouy et Foucaud in Fl. Fr. II, 84; Thlaspi hirtum, Lin. (n. v.).

159. **L. latifólium,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 567. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Erva pimenteira, Erva serra.*

160. **L. graminifólium**, Lin., Mach. in Calen. met., 11. — Centro do paiz.

161. **L. ruderále**, Lin. — Beira Alta (Santa Comba Dão, Celorico da Beira, etc.).

162. **L. virgínicum**, Lin.; L. majus, Darracq. — Naturalisado em varias localidades do norte e centro.

163. **L. dràba**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 567. — Desde o Douro á Extremadura. Vulg. *Erva fome.*

53. ÍSATIS, Tour.

164. **I. glauca**, Willd.; I. lusitanica, Brot. in Fl. lùsit. I, 560, non Lin.; I. platyloba, Link ex Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 76. — Margens do rio Douro.

54. CALEPÍNA, Adans.

165. **C. Corvíni** (All.) Desv.; Crambe Corvini, All.; Myagrum iberioides, Brot. in Phyt. lusit. fasc. I, ediç. 1.ª, pag. 47; Phyt. lusit. I, 75, tab. 42. — De Traz dos Montes ao Algarve.

55. NÉSLIA, Desv.

166. **N. paniculáta** (Lin.) Desv., P. Cout. in Bol. Soc. Brot. II, 161; Myagrum paniculatum, Lin. — Traz dos Montes e Beira.

56. BISCUTÉLLA, Lin.

167. **B. variábilis**, Lois.; B. laevigata, Lin. p. p., Brot. in Fl. lusit. I, 573; B. laevigata β. dentata, Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 77. — Desde o Douro ao Algarve.

var. *coronopifólia* (Lin.); Biscutella laevigata γ ambigua, Mariz in loc. cit.; B. laevigata, subesp. coronopifolia + subesp. lima, Rouy et Foucaud

in Fl. Fr. III. — Desde o Minho e Douro á Extremadura.

var. *macrocárpa*, Samp. in herb. Ac. Polyt. Port. — Siliculas com 16-18 milimetros de largo; folhas muito profundamente denteadas. — Desde o Alemtejo ao Algarve.

168. **B. auriculáta**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 573; Jondraba sulphurea, Medik. — Centro e sul do paiz.

for. *erigerifolia* (DC.); Bisc. erigerifolia, DC. — Em mistura com o typo.

57. CORÓNOPUS, Rupp.

169. **C. dídymus** (Lin.) Smith.; Lepidium didymus, Lin.; Senebiera didyma, Pers., Mach. in Calen. met., 10; Senebiera pinnatifida, DC. — Quasi todo o paiz.

170. **C. procúmbens**, Gilib.; C. Ruellii, All., Brot. in Fl. lusit. I, 565; Cochlearia coronopus, Lin.; Senebiera coronopus, Poir. — Desde o Douro ao Algarve.

58. BÚNIAS, Lin.

171. **B. erucágo**, Lin., Mariz in Bol. Soc. Bro. III, 75.

var. *áspera* (Retz); B. aspera, Retz, Brot. in Fl. lusit. I, 562. — Quasi todo o paiz.

59. CRÁMBE, Tour.

172. **C. hispánica**, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 563.

raç. **glabráta** (DC.); P. Cout. in Bol. Soc. Brot. II, 161. — Desde o Douro ao Alemtejo.

60. RAPÍSTRUM, Tour.

173. **R. rugósum** (Lin.) Berg. Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 73; Myagrum rugosum, Lin. — Centro e sul.

for. *glabrum* (Host.) — Com o typo específico.

raç. **hispánicum** (Lin.); Myagrum hispanicum, Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 563; Rapistrum Linneanum, Bois. et Reut., Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 74. — Norte e centro.

61. CÁKILE, Tour.

174. **C. marítima,** Scop.; C. Serapionis, Lob., Brot. in Fl. lusit. I, 561; Bunias Cakile, Lin. — Areaes maritimos. Vulg. *Eruca marina.*

var. *hispánica* (Jord.); C. hispanica, Jord. — Do norte ao sul do paiz.

Fam. VII — CAPPARIDACEAE, Lindley

62. CLÉOME, Lin.

175. **C. violácea,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 529. — Desde Traz dos Montes ao Algarve.

63. CÁPPARIS, Tour.

176. **C. spinósa,** Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 256. — Cultivada e subespontanea no sul do paiz. Vulg. *Alcaparra.*

Fam. VIII — RESEDACEAE, DC.

64. ASTROCÁRPUS, Neck.

177. **A. sesamoides** (Lin.), DC.

raç. **purpuráscens** (Lin.); Reseda purpuracens, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 307; Astrocarpus Clusi, Gay. Mach. in Calen. met. 20. — Todo o paiz.

var. *suffruticósus* (Lge.); Astrocarpus suffruticosus, Lge., P. Cout. in Bol. Soc. Brot. X, 85. — Norte.

var. *spathulaefólius* (Rev.), Mach. in loc. cit. — Littoral do centro e sul do paiz.
var. *cochlearifólius* (Nym.), Samp. in Not. crit. 11; Astrocarpus cochlearifolius, Nym., Mach. loc. cit. — Areaes maritimos do sul (Milfontes).

65. RESÉDA, Tour.

178. **R. phyteuma,** Lin., J. Henriq. in Bol. Soc. Brot. II, 163. — Margens dos rios Douro, Guadiana, etc.

179. **R. média,** Lag., P. Cout. in Bol. Soc. Brot. II, 163; R. phyteuma, Brot. in Fl. lusit. II, 306 non Lin.; R. macrosperma, Mach. in loc. cit. — Todo o paiz.

180. **R. lútea,** Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 305; R. lutea et R. cristallina Mach. in Calen. met. 19 e 20; R. lutea et R. ramosissima, P. Cout. in Bol. Soc. Brot. X, 78. — Desde a Extremadura ao Algarve.

var. *marítima* (Mull.) — Littoral.
var. *mucronáta* (Tin.) — Centro e sul.
var. *suffruticulosa* (Mull.) — Centro e sul.

181. **R. álba,** Lin., Mach. in Calen. met. 20. — Setubal, em Troia (n. v.).

182. **R. baetica,** Gay., Mariz in Bol. Soc. Brot. VII, 75; R. undata Lin.? — Vimioso, nas pedreiras de Santo Antão (n. v.).

183. **R. virgata,** Bois. et Reut., Mariz in Bol. Soc. Brot. VII, 75; R. glauca, Brot. in Fl. lusit. II, 307, non Lin. — Traz dos Montes e margens do rio Douro.

184. **R. lutéola,** Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 305. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Lirio dos tintureiros.*

var. *Gussonei* (Bois. et Reut.) — De norte a sul.

A. **R. odoráta,** Lin. vulgarmente chamada *Reséda, Minhonete* ou *Minonéte*, cultiva-se nos jardins.

FAM. IX — CISTACEAE, Lindley

66. CÍSTUS, Tour.

185. C. **álbidus**, Lin. Brot. in Fl. lusit. II, 252. — Desde o Douro ao Algarve. Vulg. *Roselha grande.*

186. C. **polymórphus**, Willk., J. Dav. in Bol. Soc. Brot. IV, 37.

raç. **villósus** (Lin.); Cistus villosus, Lin. — Coimbra.

187. C. **críspus**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 258. — Desde o Douro ao Algarve. Vulg. *Roselha.*

188. C. **monspeliensis**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 260. — Centro e sul do paiz. Vulg. *Sargaça.*

var. *mínor*, Willk. — Desde Aveiro ao Algarve.

189. C. **hirsútus**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 260; C. laxus, Ait., Brot. in Phyt. lusit. I, 185, tab. 75. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Saganho.*

var. *pumilus*, Dav. — Norte.

190. C. **salvifólius**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 259. — Quasi todo o paiz.

var. *grandifólius*, Willk. — Sul.

191. C. **populifólius**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 160. — Desde o Douro ao Algarve. Vulg. *Estevão.*

var. *lasiocalix*, Willk. — Sul.

192. C. **laurifólius**, Lin., J. Henriq. in Bol. Soc. Brot. II, 160. — Bragança, nos arredores.

193. C. **ladaníferus**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 261. — De Traz dos Montes ao Algarve. — Vulg. *Estêva, Xara.*

for. *maculátus*, Dun. — Com o typo.

194. **C. Clusii**, Dunal, Dav. in Bol. Soc. Brot. IV, 45. — Centro do paiz (n. v.).

195. **C. Bourgaeanus**, Coss., Mach. in Calen. met. 22. — Algarve, no littoral.

São conhecidas no paiz differentes formas dos hybridos seguintes: **C. albidus × crispus, C. albidus × salvifolius, C. albidus × hirsutus, C. populifolius × salvifolius, C. monspeliensis × salvifolius, C. monspeliensis × hirsutus, C. hirsutus × salvifolius, C. hirsutus × ladaniferus, C. ladaniferus × salvifolius.**

(Continúa.)

ESSAI SUR L'HISTOIRE DE LA GÉOMETRIE DES COURBES [1]

PAR

A. AUBRY

Sans vouloir faire de conjectures plus ou moins plausibles sur les débuts de la Géométrie, on peut admettre que, dans sa période empirique, elle ne traitait que des assemblages les plus simples de droites et des cercles; cela surtout au point de vue de la décoration des temples, des tombeaux, des armes, des vètements, des vases, etc. Les croissants, les volutes, les lignes ondulées, qu'on y voit tracés en de hors de toute méthode, n'étaient que des reminiscences d'objets offerts à chaque pas à la vue des premiers hommes, par la nature, au contact intime de laquelle ils vivaient.

La première ligne géométrique qu'on sait avoir été considérée après la *droite* et le *cercle*, est la quadratice (τετραγωνιζουσα), imaginée par HIPPIAS en cherchant la solution du problème de la *trisection de l'angle*. Mais il est à présumer qu'avant cette courbe, il en a été trouvé d'autres résultant, par exemple, de l'étude des mouvements des corps célestes. La découverte des rétrogradations des planètes avait démontré l'impossibilité d'as-

(1) Ce n'est qu'un coup d'œil d'ensemble. Pour l'étude et l'histoire particulières de chaque courbe, nous ne pouvons mieux faire que renvoyer au savant *Tratado de las curvas*, de M. GOMEZ TEIXEIRA, dont il a publié récemment le première partie traduite en français avec d'importantes additions. Pour la bibliographie, les précieuses *Notes* de M. BROCARD sont tout indiquées.

similer leur trajectoire à des cercles, même excentriques; on voit, chez Platon, qu'on avait déjà pensé à expliquer cette anomalie par un trajet sur une certaine spirale *(Timée)* ou sur un *épicycle (Rép.)*. Cette dernière hypothèse semble due aux Pythagoriciens. Platon paraît même faire allusion à d'autres courbes connues de son temps; il est même vraisemblable qu'à la suite de l'impulsion donnée à la science par Pythagore, qui en avait montré le vrai but, — non plus son utilisation immédiate aux besoins de la pratique, mais son étude en elle-même et dégagée de toute préoccupation concrète, en un mot, sa rationalisation, — les géomètres, en cherchant de nouvelles propriétés du cercle, auront rencontré, bien avant la quadratrice, diverses courbes résultant: soit des intersections des corps géométriques ou de leur développement sur un plan, soit de points se mouvant sur des droites mobiles, soit des intersections de deux familles de droites. Dans ces deux derniers cas, l'idée de réunir, par des lignes continues, des points obtenus d'une manière discontinue, se sera présentée par analogie à certaines constructions du cercle. La méthode analytique, créée vers la même époque, a dû donner de bonne heure naissance à l'idée féconde des *lieux géométriques*, qui préparait l'avénement de la Géométrie d'Apollonius et de Descartes.

On peut citer, après la quadratice, les courbes à double courbure considérées par Archytas dans la solution du *problème déliaque* et qui résultaient des intersections du cylindre $x^2+y^2=ax$, du tore $x^2+y^2+z^2=a\sqrt{x^2+y^2}$ et du cône $b^2(x^2+y^2+z^2)=a^2x^2$. On lui attribue l'invention de l'*hélice conique* et divers appareils pour le tracé des courbes.

Eudoxe a imaginé plusieurs courbes, dont les noms de deux seulement sont connus: pour expliquer le mouvement des planètes, son *hippopède* qui, d'après Schiaparelli, serait l'intersection d'une sphère et d'un cylindre qui lui est tangent; ensuite, pour la solution du problème déliaque, sa *kampyle*, que P. Tannery suppose judicieusement être la projection $\rho\cos^2\theta=1$ de la courbe d'Archytas.

La remarquable solution d'Archytas fait penser que les géomètres avaient déjà examiné les intersections des surfaces élémentaires, et les sections planes du cylindre et du cône devaient leur être familières. Toutefois on attribue l'honneur de la découverte des *sections coniques* aux géomètres de l'école de Platon, particulièrement à Ménechme, qui a probablement découvert leurs propriétés les plus simples, par exemple, la relation existant entre l'abscisse et l'ordonnée: la connaissance qu'il en avait est attestée du reste par ses deux solutions du

problème déliaque ([1]). La théorie des coniques était peu après poussée assez loin pour qu'ARISTÉE l'Ancien ait pu en écrire un traité entier, complètement perdu.

DINOSTRATE, frère de MÉNECHME, paraît avoir découvert cette propriété de la quadratice, de donner la quadrature du cercle, d'où son nom.

D'après certains passages d'ARISTOTE, on a cru pouvoir dire que les anciens connaissaient la sinusoïde, comme résultant du développement de la surface du cylindre coupé par un plan. Cela est possible, si on entend par là qu'on avait simplement reconnu la forme de la courbe ainsi obtenue, car on connaissait déjà, depuis ANAXIMANDRE, la transformation géographique par projection sur la surface du cylindre tangent, qu'on développe sur un plan ([2]).

ARCHIMÈDE, par ses profondes méditations sur la géométrie de la mesure, a ouvert un champ immense aux spéculations analytiques et géométriques: il a ramené à la quadrature du cercle celles de l'ellipse ([3]) et de la spirale ([4]), construit la tangent à cette dernière et quarré la parabole, premier exemple de quadrature de courbe plan. On connaît cette belle découverte d'ARCHIMÈDE de l'égalité des surfaces sphériques et de leurs projections sur le cylindre circonscrit, découverte amenée probablement par l'étude des représentations géographiques. Les problèmes de l'ἄρβηλοσ ([5]), si péniblement démontrés par PAPPUS,

([1]) 1° au moyen des courbes $y^2 = x$ et $x^2 = y$; 2° par les courbes $x^2 = y$ et $xy = 2$.

([2]) Si une courbe sphérique se projette sur le plan de l'équateur selon le courbe $F(\rho, \theta) = 0$ et que, projetée sur la surface du cylindre tangent et celle-ci développée sur un plan, elle donne la courbe $f(x, y) = 0$; cette seconde courbe se déduit de la première par les transformations suivantes:

$$y^2 = 1 - \rho^2, \quad x = \theta.$$

La *spirale d'Archimède* se transforme ainsi en une circonférence. les courbes $\rho = \cos k\theta$ et $\rho^2 = \cos k\theta$ en sinusoïdes, la courbe $\rho = Sh\theta$ en *chaînette*, la *spirale de Poinsot* $\rho Ch\theta = 1$ en la courbe $y = Thx$ à la quadrature de laquelle se réduit celle de la *loxodromie*.

On a ainsi le moyen de *quarrer* diverses courbes planes et sphériques. (Voir J. S. 1895-1896, notre étude sur les transformations géométriques des courbes.)

([3]) Sa quadrature de l'ellipse est le premier exemple de transformation de courbes par réduction proportionelle des ordonnées, qu'on appelle plus simplement *affinité*, d'après EULER.

([4]) ARCHIMÈDE paraît avoir imaginé la spirale (ἕλιξ) pour résoudre la trisection de l'angle.

([5]) On sait qu'il s'agit des positions des centres des circonférences tangentes entre elles et à deux demi-circonférences tangentes intérieurement.

sont probablement d'Archimède, et font croire qu'il connaissait les propriétés élémentaires de la transformation par *inversion*, car ils se démontrent très simplement ainsi.

Apollonius a laissé sur les coniques son grand traité bien connu, où, en outre d'une foule de propriétés nouvelles, il examine un grand nombre de problèmes et l'application de ces courbes à la résolution des équations cubiques, déjà commencée par Ménechme et Archimède. Apollonius serait, d'après Ptolémée, l'inventeur des épicycles, sur lesquels il aurait écrit un traité, ainsi que sur l'*hélice cylindrique* et probablement sur certaines *hélices coniques et sphériques*, dont parle Geminus. Apollonius paraît avoir le prémier étudié l'*homothétie*. On lui doit les premières vues sur la théorie des *dévoloppées des coniques*, dont il a donné virtuellement l'équation et qu'il définit comme la ligne séparant la région des points d'où on peut mener deux normales à la conique de ceux d'où on peut en mener quatre.

Les Anciens [1] avaient ramené la solution de la duplication du cube et de la trisection de l'angle à l'inscription d'une droite de longueur donnée dans un angle donné. Apollonius résolut ce problème par la construction d'une hyperbole, et Nicomède par sa *conchoïde* ou *cochloïde*, qui, une fois tracée, donne immédiatement l'inscription demandée.

L'invention de la *cissoïde* [2] par Dioclès et des *spiriques* par Perseus paraît dater de la même époque. On sait que la première sert à la solution du problème déliaque et que les secondes ne sont autres que les sections planes du tore.

A signaler ici la découverte de la *projection stéréographique* par Hipparque. Il va sans dire que les *projections orthogonales* et *centrales* étaient connues depuis longtemps.

P. Tannery, dans ses savantes études *sur les courbes et surfaces dans l'antiquité* (B. D. 1883-84), mentionne la *courbe de double mouvement*, de Carpos d'Antioche, qu'il croit être la cycloïde, ce qui est très vraisemblable, puisque l'*épicycle* était connu depuis longtemps; on connait du reste le fameux problème d'Aris-

---

(1) Peut-être Archimède, qui ramène la trisection de l'angle à l'inscription d'une droite entre une circonférence et un diamètre, ce qui a fait penser, sans aucune vraisemblance du reste, que le *limaçon* avait été considéré dès cette époque.

(2) Il y a lieu de remarquer que les anciens ne considéraient pas les branches infinies des courbes: la cissoïde était supposée limitée par le cercle qui lui sert de définition. De là, son nom. — De même les deux branches de la conchoïde étaient considérées comme deux courbes distinctes: la cochloïde désignait la branche plus voisine du pôle, dans le cas où elle possède une boucle.

TOTE sur le roulement d'un cercle et les vitesses à la partie supérieure comparée à celle des points inférieurs.

Jusqu'ici les courbes avaient seulement été étudiées accessoirement et comme corollaires de certains problèmes géométriques, géographiques ou astronomiques. Les géomètres qui suivirent en firent un sujet spécial d'étude et en imaginèrent a priori d'autres, dont celles résultant des intersections de surfaces hélicoïdales et autres. PAPPUS, dans ses συναγωγή, cite, à ce sujet, DEMETRIUS D'ALEXANDRIE, PHILON DE TYANE et MENELAUS. La παράδοζοσ γραμμή de ce dernier, paraît à P. TANNETY (l. cit.) n'être autre que la courbe appelée depuis *cyclo-cylindrique* ou *vivianienne*, laquelle est l'intersection d'un cylindre et d'une sphère de rayon double qui est lui tangente.

PAPPUS parle aussi du lieu des points dont les produits des distances à des droites données est égal à celui de leurs distances à d'autres droites également données, problème où EUCLIDE, APOLLONIUS et d'autres avaient échoué. Il donne en outre 1° deux constructions de la quadratice comme projection de l'intersection d'un hélicoïde et d'un plan ou d'un cône ayant pour base une spirale (1); 2° la quadrature de la surface sphérique limitée par la courbe que produit un point parcourant uniformément un quart de cercle tandis que celui-ci décrit uniformément un tour autour du rayon, ce qui produit l'*antiprojection* de la *rosace* $\rho = \sin\frac{\theta}{4}$. C'est là le premier exemple de la quadrature d'une surface courbe.

Dès le temps d'EUCLIDE, les géomètres avaient commencé le classement des courbes: PAPPUS distingue les *lieux plans* (problèmes se résolvant par la droite et le cercle), les *lieux solides* (demandant l'emploi des coniques), les *lieux linéaires* (concernant d'autres courbes), les *lieux à la surface* (nécessitant l'intervention de surfaces). Il ajoute que ce n'est pas une petite faute chez les géomètres d'employer un lieu solide, par exemple, pour résoudre un problème plan, recommandation reproduite souvent depuis.

Les Arabes, héritiers de l'admirable science grecque, se sont appliqués surtout à en dégager les principes de l'Algèbre et de la Trigonometrie; ils ont peu cultivé la géométrie. Aussi,

(1) Cette transformation de PAPPUS se note par les relations $x = \rho\cos\theta$, $y = k\theta$. Ainsi la droite $y = kx$ devient une quadratrice $\rho\cos\theta = \theta$: c'est le théorème de PAPPUS; le *cappa* $\rho = \operatorname{tg}\theta$ et la circonférence $\rho = 1$ se transforment en sinusoïdes.

jusqu'à la Renaissance des lettres en Europe, ne signale-t-on aucune étude géométrique nouvelle. Tout au plus peut-on mentionner la description des coniques au moyen de fils et leur application à la gnomonique, à la solution graphique des équations cubiques, à l'optique ([1]), à l'astronomie ([2]) et la description mécanique des coniques ([3]) et de certaines autres courbes ([4]).

Vers le milieu du XIVe siècle, ORESME, par ses considérations générales sur les courbes, préparait l'avénement de la géométrie analytique. Il traite des différentes formes des courbes; il enseigne à figurer tout phénomène mesurable par une courbe (*forma*) dont chaque point est déterminé par son abscisse (*longitudo*) et son ordonnée (*latitudo*). La figuration des fonctions élémentaires, par des points isolés ou mobiles, était déjà usitée depuis longtemps; mais la conception d'ORESME est bien plus profonde, car il considère la courbe comme produite par le mouvement continu d'un point mobile sur l'ordonnée, mobile elle-même. Il remarque que dans une courbe telle qu'un arc de cercle, l'accroissement de l'ordonnée est le plus lent au sommet et le plus rapide aux extrémités: c'est de là qu'est nè le calcul différentiel.

Il nous suffira de citer les principaux travaux qui suivent jusqu'à l'époque de DESCARTES.

ALBERT DURER paraît avoir le premier imaginé les *épicycloïdes* et l'assemblage de cercles tangents appelé aujourd'hui *anse de panier*, pour remplacer le tracé de l'ellipse. Il a étudié diverses hélices et un cas du limaçon (voir son ouvrage posthume *Underweysung*... Nürnberg, 1525).

LÉONARD DE VINCI inaugure l'application de la théorie des courbes aux arts par l'invention de son célèbre *tour à ovale*.

NUNEZ (*De arte... navigandi*, Coïmbra, 1546) imagine son célèbre *rumbus*, appelé *loxodromie* par SNELLIUS.

([1]) On connaît le célèbre *problème d'Al Hasen* ou du *billard circulaire*, dont la solution se ramène immédiatement à la construction d'une hyperbole en prenant les inverses des deux vecteurs donnés.

([2]) AZRACHEL avait proposé de substituer l'ellipse aux épicycles.

([3]) Au moyen d'un compas dont une branche est fichée obliquement sur un plan, tandis que l'autre s'allonge de manière à laisser sa trace sur le plan. C'est sans doute un instrument de ce genre qu' ISIDORE DE MILLET employait pour tracer la parabole, car on sait qu'il affectait la forme d'un λ.

([4]) IBN ALHAITAN a montré à résoudre l'équation $x^5 = a$ par l'emploi d'un instrument probablement semblable à celui qui servait à ERATOSTHENE pour la construction des deux moyennes et qui pouvait facilement être généralisé.

TARTAGALIA (*General Trattato*, Venise, 1556) construit un ovale transcendant «in una sola riuolutione di compasso», sur un papier enroulé autour d'un cylindre, et qu'on applique ensuite sur un plan.

PALLADIO (1581) propose, pour le tracé des galbes des colonnes, l'emploi d'une règle pliante [1].

WRIGHT (1599) utilise, pour la solution des problèmes de la navigation, la courbe appelée plus tard *figura secantium*, qu'il quarre approximativement par l'addition successive des sécantes de dix en dix miuutes. La même année GALILÉE démontre que la trajectoire d'un grave dans le vide est une parabole; il essaie de définir la courbure d'une verge élastique, celle d'une chaîne pesante et la courbe de plus rapide descente.

KÉPLER émet (1615), sur la *géométrie de la mesure*, des idées neuves et hardies qui ont brusqué l'avènement du calcul infinitésimal.

GUNTER (1624) considère la courbe des logarithmes.

La même année, SNELLIUS donne virtuellement la quadrature de loxodromie.

ALBERT GIRARD (1629) enseigne que «La solution par moins s'explique en Geometrie en retrogadant, et le moins recule, là où le + avance».

CAVALIERI (1635) resout et étend les problèmes posés par KÉPLER; décrit les coniques par des intersections de droites mobiles [2]; et compare, au point de vue des aires, la spirale et la parabole.

DESARGUES enseigne sa méthode de transformation *(homologie)* tirée des principes de la perspective [3], et enseigne à généra-

---

(1) Depuis, la conchoïde a été utilisée dans ce but.

(2) DE WITT, NEWTON, MAC-LAURIN et les géomètres du XIX^e^ siècle ont successivement perfectionné cette théorie, dont le germe se voit chez APOLLONIUS.

(3) La transformation plus générale appelée *homographie* est due à la HIRE et a été plus simplement présentée par NEWTON, dont la méthode revient à l'emploi des formules

$$X = \frac{a}{x}, \quad Y = \frac{a'y}{x}.$$

WARING a donné les formules générales de l'homographie,

$$X = \frac{ax + by + c}{Ax + By + C}, \quad Y = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{Ax + By + C},$$

lesquelles du reste ne sont pas plus générales mais ont l'avantage de ne pas demander le changement des axes de coordonnées. (Voir CHASLES, *Ap. hist.*

liser certaines considérations, d'où des rapprochements inattendus et qui ont amené plusieurs des découvertes de cette époque et des suivantes.

Jusqu'à DESCARTES, — si l'on en excepte la conception d'ORESME, d'ailleurs trop en avance sur son époque, — l'idée de définir, en général, une courbe par une relation analytique entre une abscisse et l'ordonnée correspondante ne s'était pas encore fait jour, bien que l'on sût depuis longtemps déterminer un point du plan ou de l'espace par ses coordonnées et que l'on connût diverses équations des coniques; il fallait pour cela que l'algèbre fût arrivée à un degré suffisant de perfection.

DESCARTES (*Géométrie*, Leyde, 1637) imagina de remplacer les longues descriptions géométriques particulières par des équations contenant des paramètres constants et deux variables désignant les deux coordonnées. Ces équations, concises, d'un aspect uniforme et qu'on pouvait traiter par des procédés analogues, permettaient de concevoir une variété infinie de courbes nouvelles et offraient la possibilité de présenter l'équation sous la forme la plus simple et la plus propre à l'étudier, grâce au changement des axes des coordonnées (1) et aux signes qu'on pouvait attribuer aux diverses longueurs.

Comme application de sa méthode, DESCARTES classe les courbes en *géométriques* et *mécaniques* (2) et les premières suivant le degré de leur équation; — il résout le problème de PAPPUS rappelé plus haut; — remarque, sans autre explication, que l'équation de la courbe permet d'en aborder la quadrature (3); — enseigne à résoudre les équations et par suite les problèmes, par des intersections de courbes; — donne la construction de sa *conchoïde parabolique* (4) et de ses célèbres *ovales* (5); — la

(1) DESCARTES et ses continuateurs traçaient seulement l'axe des x et, par défaut d'examen, se trompaient généralement dans la figuration de la courbe, dans les trois angles des coordonnées négatives. Ainsi ils figuraient le *folium* avec quatre feuilles: c'est pourquoi ROBERVAL lui donnait le nom de *galand* ou *fleur de jasmin*. DESCARTES lui-même construit la tangente à «l'une des feuilles qui fait partie du lieu.» FERMAT et SCHOOTEN se sont trompés de même ce n'est que HUYGENS et JEAN BERNOULLI qui ont trouvé la vrai forme du folium.

(2) On dit aujourd'hui, d'après LEIBNIZ, *algébriques* et *transcendantes*.

(3) Probablement en la développant sous la forme $y = A + Bx + Cx^2 + \ldots$ et utilisant la formule

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Sigma n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

(4) Identique au *trident* de NEWTON, $xy = (a + y)(y^2 - b)$.

(5) Leur découvert par DESCARTES, qui partait d'une propriété de leurs

première méthode générale de construction de la tangente aux courbes, «le plus beau problème qu'il eût jamais désiré scavoir en géométrie», avec, comme exemples, celle de la conchoïde et des ovales; enfin des vues sur l'extension de ses procédés aux figures de l'espace. Il construit en outre plusieurs autres courbes et suggère différents moyens d'en définir cinématiquement un grand nombre. On voit avec peine que DESCARTES croyait toute rectification de courbe impossible.

C'est la même année que fut divulguée par MERSENNE (*Harmonie universelle*, Paris, 1637) la quadrature de la cycloïde, par ROBERVAL, découverte qui passa tout à fait inaperçue.

Bien que DESCARTES n'ait pas montré l'analyse qui l'avait guidé dans ses constructions, et que parfois même il énonce des résultats sans preuves (1), sa *Géométrie* ne tarda pas à être étudiée et porter ses fruits. Toutefois l'ancienne géométrie garda longtemps encore des partisans.

MERSENNE, dans ses *Cogitata* (Paris, 1644), publia: une esquisse de démonstration par ROBERVAL, de l'égalité des arcs de la parabole et de la spirale, fondée sur le double mouvement du point décrivant chacune de ces deux courbes, lequel mouvement est presque identique; démonstration seulement sentie par son auteur, mais néanmois très remarquable pour l'époque; la première considération des paraboles des degrés supérieurs avec la construction de leurs tangentes, leur quadrature, leurs centres de gravité et la cubature des solides de révolution qu'elles forment autour de l'axe, le tout sans démonstration et attribué à ROBERVAL; — la méthode bien connue des tangentes du même géomètre, qu'il a trouvée en 1638 et qu'il applique seulement ici à la parabole en remarquant qu'elle convient aux coniques, à la conchoïde, à la cissoïde, à la quadratice, et à la *trochoïde* (2); — des vues sur les spirales $(1-\rho)^n = \theta$, à propos

tangentes, montre que, dès cette époque, comme l'a observé FERMAT, il connaissait et savait résoudre, dans certains cas, le *problème inverse des tangentes*.

(1) Il dit, dans une de ses lettres, qu'il a fait «la construction comme les architectes font les bastimens, prescrivant seulement tout ce qu'il faut faire et laissant le travail des mains aux charpentiers et aux massons.» Il dit ailleurs avoir plusieurs méthodes des tangentes plus commodes que celle de sa *Géométrie*, mais qu'il a indiqué celle-ci à cause de sa plus grande clarté.

(2) C'est ainsi que ROBERVAL designe la cycloïde: ce dernier nom est dû a TORRICELLI.

CUSA et BOUVELLES avaient, longtemps auparavant, considéré le mouve-

de la question de la trajectoire d'un grave lancé obliquement, la courbure de la terre n'étant plus négligée, avec la quadrature de cette courbe par FERMAT, dans le cas de $n = 2$ et cette remarque que cette théorie s'étend à la *spiralis circa coni.*

Presque en même temps, TORRICELLI donne, dans ses *Opera mathematica* (Florence, 1644): la quadrature de la *cycloïde;* une méthode des tangentes identique à celle de ROBERVAL et qu'il avait trouvée de son côté vers 1640; la *paraboloïde de sureté,* ou *enveloppe* des trajectoires possibles d'un projectile lancé sous diverses inclinaisons, découverte qu'on lit également dans les *Cogitata;* ses études sur le jet parabolique des liquides; la recherche de la forme du vase dont un liquide s'écoulerait uniformément s'il était percé à la partie inférieure [1]; enfin le volume du solide de révolution de l'hyperbole tournant autour de l'asymptote, lequel volume est fini, chose qui parut alors fort extraordinaire.

C'est cette même année que HÉRIGONE publia, dans son *Cursus mathematicus,* la methode *de maximis,* de FERMAT, ainsi que son application à la construction des tangentes.

G. DE S.T VINCENT, dans son célèbre *Opus geometricum* (Anvers, 1647), donne virtuellement la quadrature de l'hyperbole, celle de l'onglet cylindrique; revendique l'idée de la *symbolisation de la spirale et de la parabole,* dont il conclut que «merito spiralem esse dixerum evolutam sive expansam parabolam»; examine la peu intéressante courbe affine de la spirale, qu'il appelle *spiralis elliptica;* et étudie une courbe remarquable qu'il appelle *parabola virtualis,* parce qu'elle peut être considérée comme obtenue par l'addition des ordonnées des deux paraboles $y^2 = ax$ le $y_1^2 = b(c - x)$ [2].

ment d'un point d'une circonférence roulant sur une droite, mais ils prenaient la courbe ainsi conçue pour un arc de cercle. GALILÉE en 1599, puis MERSENNE en 1615, en reconnurent la forme et en proposèrent l'étude.

[1] TORRICELLI a découvert l'année suivante que la génératrice de ce vase doit être une parabole du quatrième degré.

[2] Il s'ensuit que cette courbe est, comme la parabole, absolument quadrable, de même que le *trifolium,* qui s'en déduit de la même manière. (Voir, pour diverses quadratures géométriques de ce genre, notre article du *J. S.* 1986, pag. 130)

CRAMER (*Introd.*) a retrouvé cette courbe, qu'il appelle la *besace,* et qu'il obtient en prenant sur l'ordonnée PK du cercle OK, l'ordonnée PM = KO, O désignant un point fixe sur la circonférence.

C'est la projection orthogonale de la *vivianienne* et la *courbe de Lissajous* du deuxième ordre.

La même année, CAVALIERI (*Exercitationes geometricæ*, Bologne, 1647) énonce et démontre à peu près cette importante formule, donnée par ARCHIMÈDE pour le cas de $n=2$,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Dans la première édition latine de la *Géométrie* de DESCARTES (Amsterdan, 1649), SCHOOTEN a fait connaître la théorie des *roulettes,* imaginée par l'illustre philosophe en vue de la construction de la tangente à la cycloïde.

La première mention imprimée de la *sinusoïde* se voit dans l'*Asie*... (Paris, 1652), du géographe SANSON, où il expose la projection dite de FLAMSTEED, laquelle consiste, comme on sait, à relever en vraie grandeur, les méridiens sur la surface du cylindre circonscrit et prendre, à partir du méridien principal, les latitudes en vrai grandeur. Les méridiens se transforment ainsi en sinusoïdes [1].

Il convient de mentionner ici la détermination du point d'inflexion de la conchoïde por HUYGENS (*De circuli magnitudine inventa,* Leyde, 1654).

Dans son célèbre ouvrage *Arithmetica infinitorum* (Oxford, 1655), WALLIS étend par induction la formule de CAVALIERI aux valeurs négatives ou fractionnaires de l'exposant et aux expressions polynomes. Il applique cette théorie au calcul des intégrales $\int_0^1 (1-\sqrt[m]{x})^n dx$ et $\int_0^1 (1-x^{\frac{m}{2}})^n dx$, dans le but d'obtenir, par interpolation, la valeur de l'expression $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ de l'aire du cercle. On y voit les premières ouvertures sur la rectification des courbes, par l'application des formules approchées $\Sigma(\Delta x^2+\Delta y^2)$ et $\Sigma(\Delta\rho^2+\rho^2\Delta\theta^2)$, à la parabole et à la spirale. Nous mentionnerons enfin la considération de courbes déterminées par des ordonnées discontinues, mais qu'on sait quand même continue quoique la loi analytique qui lie les coordonnées en général soit inconnue.

---

[1] La droite se transforme ainsi en *spirale hyperbolique.* Les aires conservent leurs valeurs en se transfarmant.

LEIBNIZ a donné à cette courbe le nom de *ligne des sinus.* Son nom de sinusoïde lui a été donné par BÉLIDOR (*La science des Ingénieurs,* Paris, 1729).

C'est par les *Exercitationum mathematicaram* (Leyde, 1657) de SCHOOTEN, qu'on a connu le *folium:* il en figure seulement la boucle, dont il calcule le maximum de largeur, d'après la méthode de son ami HUDDE.

En 1658, PASCAL propose ses fameux problèmes relatifs à la cycloïde, au sujet desquels HUYGENS et WRENN découvrirent que le segment cycloïdal dont la base est au quart de la hauteur est absolument quarrable, et WRENN trouva la rectification de la cycloïde. Dans son *Histoire de la cycloïde* (Paris, 1658), PASCAL apprend que ROBERVAL avait quarré depuis longstemps la courbe de TARTAGLIA, appelée par LALOUVÈRE *cyclo cylindrique* et que nous reverrons plus loin; et qu'il avait rectifié la cycloïde: on a des preuves que ROBERVAL savait, dès 1644, rectifier certaines spirales.

Les solutions de ses problèmes furent publiées par PASCAL dans les *Diverses inventions de A. Dettonville* (Paris, 1659), où il démontre différentes formules géométriques qu'on peut traduire ainsi:

$$\int xdy = \int ydx, \quad \int xdy = xy - \int ydx, \quad \int y^n dx = xy^n - n\int xy^{n-1}dy$$

et évalue les intégrales $\int \sin^2 xdx$, déjà trouvée par ROBERVAL, $\int x \sin xdx$ et $\int x \sin^2 xdx$. Il donne les premiers aperçus sur les intégrales multiples (sommes *simples, triangulaires, pyramidales*), les infiniment petits des ordres supérieurs et l'équivalent de ces deux théorèmes fondamentaux: *on peut négliger un infiniment petit en présence d'un infiniment petit d'un ordre supérieur*. et *la valeur d'un infiniment petit ne change pas quelle que soit la loi des accroissements de la variable pourvu que ceux-ci tendent simultanément vers zéro.*

La même année, PASCAL donne ses deux traités de l'égalité des arcs de la spirale et de la parabole (1) et de l'*hélice conique* (2), ainsi que l'extension du théorème de WRENN aux cycloïdes allongées et accourcies, dont les arcs sont égaux à ceux d'ellipses assignables; — SCHOOTEN, dans la seconde édition de la *Géométrie*, fait connaître la transformation de VAN HEURAET

(1) Egalité connue depuis longtemps de ROVERBAL et de FERMAT, qui l'avaient étendue aux spirales et aux paraboles d'ordres supérieurs.

(2) C'est là qu'on voit mentionner, pour la première fois, les courbes appelées *perles* par PASCAL et que SLUZE avait étudiées également, ainsi que HUYGENS, SCHOOTEN et MYLON.

donnant le rectification de la *semicubique* [1] et en général des courbes $y^{2n}=x^{2n+1}$, ainsi que cette propriété de la parabole d'être rectifiable au moyen de la quadrature de l'hyperbole; — enfin WALLIS *(De cycloïde)*, publie la quadrature par HUYGENS de la cissoïde, la complanation des *spheroïdes* et *conoïdes* (ellipsoïdes, paraboloïdes et hyperboloïdes de révolution), la rectification de diverses spirales, et l'étude de la *spirale logarithmique*, qu'il définit par l'accroissement des vecteurs proportionnellement aux arcs circulaires successifs, c'est à-dire par la relation $d\rho=\rho d\theta$, avec la tangente de cette dernière courbe, sa quadrature et sa rectification, en remarquant qu'elle tourne indéfiniment autour du pôle.

Dans son livre très diffus et peu connu, *Veterum gemetriæ* (Toulouse, 1660), LALOUVÈRE a étudié la *cyclocylindrica*, courbe décrite sur un cylindre avec un compas dont l'ouverture est égale au diamètre de ce cylindre. Il considère aussi le cas où l'ouverture est moindre et il nomme alors la courbe *cyclocylindrica secundaria*. Il traite également de deux autres courbes planes qu'il appelle la *quadratix* et le *locus asymptoticus*, qui ne sont autres que le *huit* déjà remarqué par G. DE S.T VINCENT et la courbe appelée aujourd'hui *agnésienne*. Il fait voir que la cubature de l'onglet cylindrique est représentée par la quadrature de la quadratrix, quadrature qu'il donne, ainsi que celles de la courbe plus générale $y=x(1-x^2)^{\frac{n}{2}}$, de l'agnesienne et de la cyclocylindrica. Celle de cette dernière, — la seule d'ailleurs qu'il démontre, — est assez simple pour trouver place ici: soient P la projection du point M d'une circonférence sur le rayon OA et K le point où OM coupe la circonférence ayant OA pour diamètre: les arcs, AK, AM sont égaux, de même que les droites OK, MP; de sorte que si on porte, perpendiculairement au plan du papier, les hauteurs KK', MM', les deux courbes cylindriques, lieux des points K', M', développées sur un plan seront identiques; or le premier de ces lieux n'est autre que la cyclocylindrica et le second, l'ellipse limitant l'onglet à 45°: or la surface de ce dernier est connue d'après G. DE S.T VINCENT.

A la suite de cet ouvrage, FERMAT a publié sa démonstration

---

[1] Cette transformation peut se représenter par la relation $yy_1=ax$ norm. d'où $as=\int y_1dx$.

NEIL et FERMAT avaient également fait cette découverte, la première de ce genre, à peu près en même temps que VAN-HEURAET.

de la rectification de la semi-cubique basée sur un théorème qu'on peut représenter par la relation

$$dt > y_1 dx > dt'$$

t et t' désignant les parties de tangentes aux extrémités d'un arc comprises entre les ordonnées correspondantes, et y_1 l'ordonnée correspondante d'une certaine parabole. Fermat considère les courbes définies par la propriété de l'ordonnée de chacune d'être égale à l'arc correspondant de la précédente, et donne ce théorème qui lui a servi pour construire la tangente à la cycloïde: *soit sur ordonnée* PM *d'une courbe* OM, *la longueur* Pm *égale à l'arc* OM, *la tangente en* M *est à la sous-tangente correspondante comme* Pm *est à la sous-tangente au lieu du point* m.

La publication des lettres de Descartes en 1662 révéla diverses études d'un grand intérêt historique, parmi lesquelles nous citerons: le folium, dont il a déjà été parlé et qui fut proposé à Roberval en 1638, sous les deux formes $x^3 + y^3 = axy$ et $y^2(a + 3x) = x^2(a - x)$, ce qui montre que Descartes savait changer d'axes de coordonnées; — la vraie figure du plan incliné (même année) qui est une spirale (spirale logarithmique) dont les arcs sont proportionnels aux rayons vecteurs correspondants, et les tangentes également inclinées sur ces mêmes vecteurs; — la discussion de la méthode des tangentes de Fermat, qui amena celui-ci à la présenter plus clairement; — la théorie des roulettes citée plus haut; — la quadrature, les tangentes, etc. des paraboles des degrés supérieurs (même année); — en 1639, la solution du problème de Debeaune, qui était de déterminer une certaine courbe définie par une propriété de sa tangente [1]; — la considération de la courbe qu'affecte

(1) Dans l'espèce il s'agissait de la relation $(y - x)\,dy = dx$, qui conduit à l'équation de la logarithmique. Descartes montre que *cette courbe a une asymptote* et qu'*elle est le lieu de l'intersection de deux droites se mouvant parallèlement à elles-mêmes, l'une uniformément et l'autre avec une vitesse proportionnelle à sa distance à l'asymptote*. Cette définition est identique à celle des logarithmes donnée par Neper. Il comprend l'importance de ce genre de questions, appelé depuis *problème inverse des tangentes* ou *intégration des équations différentielles*, et dont Fermat avait eu également l'idée. Il reconnait que la solution n'est pas toujours possible et parle de plusieurs théorèmes qu'il a trouvés sur ce sujet. Il remarque ailleurs que «les tangentes de deux lignes de diverse espèce ne peuvent auoir les mes-

à un instant donné une corde pesante primitivement horizontale tombant vers le centre de la terre, courbe qu'il définit par cette condition que les vecteures d'un même point dans deux positions différentes diffèrent d'une constante, ce qui équivaut à la condition $\sqrt{s^2+a^2}=\rho+b$; — enfin la courbe lieu des points dont les distances à des points donnés aient une somme donnée.

Ricci (*Exercitatio geometrica*, Rome, 1666) a démontrée que le maximum du produit $x^a(l-x)^b$ est maximum quand on a: $\frac{x}{x-l}=\frac{a}{b}$ (1), ce qui donne aisément la construction des tangentes aux paraboles (2), leur quadrature (3), leur centre de gravité, etc. toutes choses dont on n'avait pas jusqu'ici de démonstration rigoureuse.

On a de James Gregory *Geometria pars universalis* (Padoue, 1667), où, entre autres choses, il parle de la logarithmique et démontre ces remarquables théorèmes:

Sur la tangente de la courbe OM *et sur l'ordonnée* PM, *prenons* Pm *et* MT *égales à l'arc* OM: *la droite* Tm *est tangente au lieu de* M.

La tangente en M *à la courbe* OM *coupe l'axe des* x *au point* T *où on élève l'ordonnée* Tm *égale à l'ordonnée* MP: *l'aire balayée par l'ordonnée* mp *est double de celle balayée dans le même temps par la tangente* MT.

Si l'ordonnée MP *de la courbe* AM *et le vecteur* Om *de la courbe* am *sont partout égaux, de même que les arcs* AM, am, *la surface* AOPM *est double du secteur* aom *et les angles des tangentes en* M *et* m *avec* PM *et* om *sont égaux.* L'axe des x de la première courbe est l'axe d'*involution* et le pôle o de la deuxième, le

---

mes proprietez spécifiques». C'était dire qu'une courbe peut être définie par une équation différentielle.

Debeaune avait donné la quadrature de cette courbe ainsi définie, ce qui lui valut les vifs éloges de Descartes.

(1) Voir *Progresso matematico*, 1900, pag. 51.

(2) Id., 1900, pag. 408.

(3) La seule démonstration générale alors connue de la relation

$$\lim_{n=\infty}\frac{\Sigma n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

était celle de Pascal, publiée seulement en 1665 et basée sur la difficile sommation des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

centre d'*évolution*. La première est l'*involuta* de la seconde, laquelle est l'*evoluta* de la première ([1]).

L'année suivante, le même auteur publia à Londres ses *Exercitationes geometricæ*, où il traite de la quadrature de l'agnesienne, de la cissoïde et de la conchoïde, ainsi que des intégrales $\int x^m (a+x)^n \, dx$, $\int \sec x dx$, $\int \operatorname{tg} x dx$; — et SLUZE, à Liège, la deuxième édition de son *Mesolabum*, où l'on voit la quadrature et les centres de gravité des perles $y^a = x^b (1-x)^c$, qu'il appelle *ellipsoidis, paraboloidis* et *hyperboloidis* et qu'il compare aux spirales; il montre aussi à déterminer le point d'inflexion à l'aide d'une cissoïde.

Nous arrivons au célèbre ouvrage de BARROW, *Lectiones geometricæ* (Londres, 1669-72), qui a exercé une si grande influence sur les progrès de la géométrie infinitésimale et du calcul différentiel. Les problèmes qu'il traite sont trop nombreux pour qu'on puisse en citer même simplement les énoncés, en langage vulgaire: mais la chose est faisable si on représente algébriquement les transformations qu'il propose. Appellant donc x, y ou ρ, θ les coordonnées de la première courbe; t et n la sous-tangente et la sous normale ([2]); A son aire; s l'arc; T et V la tangente et la normale; désignant en outre les grandeurs correspondantes de la transformée par des indices; on pourra résumer ainsi le travail de BARROW:

Sachant mener la tangente à la courbe $F(x, y) = 0$, ou

([1]) Cette transformation. entrevue par WALLIS, peut se représenter par les relations $y = \rho$, $x = \int \rho d\theta$. On en tire les conséquences suivantes:

La roulette et la podaire d'une courbe ont entre elles la relation d'involuta à évoluta.

Si une courbe roule sur son involuta, suivant qu'elle roule à l'intérieur ou à l'extérieur, le centre d'évolution a pour trajectoire la base d'évolution ou une anticaustique de l'involuta.

Si une courbe roule sur son évoluta, suivant que le mouvement est intérieur ou extérieur, la base d'involution enveloppe le centre d'évolution ou l'anticaustique de l'évoluta.

L'involuta de la circonférence est une circonférence de rayon double; celle de la rosace $\rho = \sin m\theta$, *l'ellipse* $y^2 + mx^2 = 1$; *celle du limaçon* $y = a\cos\theta + b$, *une trochoïde; celle de la spirale* $\rho^m = \theta$ *est la parabole* $my^{m+1} = (m+1)x$; *celle de la spirale hyperbolique, une logarithmique; celle de la spirale logarithmique, une droite. L'evoluta de la roulette du foyer d'une parabole (chaînette) est une droite; celle de la roulette du sommet d'une parabole, une cissoïde; celle de l'hyperbole* $x^2 - y^2 = 1$, *la spirale* $\rho = \mathrm{Sh}\, a\theta$.

De là un grand nombre de théorèmes de CARDAN, TSCHIRUHAUS, PASCAL, GILBERT, SLUZE, FERMAT, GUIDO-GRANDI, VIVIANI, STEINER, HABICH, CHASLES, BESANT, MANHEIM, etc. que nous avons rappélés ailleurs. (Voir *J. S.* 1893, pag. 130.)

([2]) ARCHIMÈDE considerait la sous-tangente polaire; BARROW y ajoute la considération de la sous-normale polaire.

$f(\rho, \theta) = 0$, construire celle de la transformée de cette courbe définie par l'une des relations suivantes:

$y_2 = y + y_1.$	$\rho_1 = k\rho.$
$yy_1 = l^2.$	$\rho_2 = k\rho_1 + \rho.$
$x_2 = kx_1 + lx.$	$\rho\rho_1 = a^2.$
$y_1^2 = y^2 + a^2.$	$\rho_1 = \rho + a.$
$y_1^2 = -y^2 + a^2.$	$k\rho_1 = \rho + a.$
$y_1^2 = y^2 + x^2.$	$k\rho_1^2 = a\rho.$
$y_1 y = x^2.$	$\rho_1 = \rho + s.$
$ky_1 = y + a.$	$\rho_1 = s.$
$y_1 = s.$	$a\rho_1 = A.$
$xy_1 = kys.$	$\rho_1^2 = A.$
$ly_1 = A.$	$\rho_2^2 = \rho\rho_1.$
$y_1^2 = A.$	
$xy_1 = kys, \; x_1 = ks.$	

On reconnait les transformées appellées *inverses cartésiennes*, *homothétiques*, *inverses*, *conchoïdes;* de là, la tangente à la circonférence, à l'hyperbole, à la cissoïde, à la conchoïde, à la spirale et à la quadratice, etc.

Définition du *cappa* (¹) et de la *strophoïde* (²) obliques, et construction de leur tangentes. Ensuite, méthode bien connue des tangentes de Barrow (³) et application au cappa, à la *laméenne* $x^3 + y^3 = 1$, au folium (qu'il appelle *la Galande*), à la quadratice et à la *tangentoide* $x = \operatorname{tg} y$.

Relation entre la quadrature d'une courbe et celle de sa

(¹) Van Gutschoven avait étudié cette courbe dès 1662.

(²) Roverbal connaissait en 1644 cette courbe qu'il appelait l'*aile* ou la *ptéroïde:* il lui croyait d'ailleurs la forme de deux strophoïdes réunies par leur sommet commun.

(³) Voir, par exemple, *Prog. Math.*, 1899, pag. 189.

transformée définie par l'une des relations:

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = t. & y_1x = \sqrt{a^2 - y^2}. \\
y_1 = t + x. & y_1t = ay. \\
y_1 = n. & y_1 = t,\ yy_1 = a^2. \\
x_1 = t. & \rho_1^2 t = a\rho^2. \\
ay_1 = A. & \rho_1^2 = \rho n. \\
yy_1 = A\sqrt{x^2 + y^2}. & x_1 = \rho,\ y_1 = t. \\
y_1^2 = y^2 + x^2. & \rho_1 t = a\rho. \\
yy_1 = t. & \rho_1 = t.
\end{array}
$$

Et quelques autres théorèmes sur les cubatures, les centres de gravité, etc. dont les suivants:

$$
\text{Si} \left\{ \begin{array}{lll}
t\rho_1^2 = ty_1, & & \\
yx_2 = y_1\rho^2 & \text{et} & x_1 = \rho, \\
x_1 = s & \text{et} & y_1T = ty_2, \\
x_1 = s & \text{et} & t\rho^2_2 = \rho y_1 T,
\end{array} \right\} \text{on a} : A_1 = A_2.
$$

Le même auteur, dans ses *Lectiones opticæ* publiées en même temps que l'ouvrage précédent, a montré à déterminer le point de rencontre de deux rayons d'abord parallèles puis réfractés par une surface sphérique, prédulant ainsi à la découverte des enveloppes et des *caustiques;* il enseigne aussi la manière d'utiliser la strophoïde oblique pour la trisection de l'angle et la solution du problème d'AL-HASEN.

La même année, WALLIS donne son *De motu,* où se trouvent la démonstration de la quadrature de la cissoïde, par HUYGENS, et le premier signe d'intégration qu'on ait employé, la notation *omn.* remplaçant le mot «omnia» de CAVALIERI.

Avec GUARINI (*Euclides audactus,* Turin, 1671), se perfectionne un des procédés d'étude des courbes, la pénétration des corps et le développement sur un plan des surfaces qui contiennent leurs intersections.

SLUZE avait, dès 1652, découvert le moyen de tracer la tangente d'une courbe définie par une fonction implicite; il la pu-

blia, sans démonstration, dans les PT [1] de 1673, ainsi que la formule de la dérivée de x^n, qu'il dit démontrer en utilisant cette propriété du développement

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots$$

d'être formé de n monomes du degré $n - 1$.

C'est dans l'admirable *Horologium oscillatorium* (Paris, 1673), d'Huygens, que se trouvent exposées, — outre de belles applications de la géométrie infinitésimale à la dynamique, — la théorie de l'*evoluta* (développée), qu'il applique à la cycloïde et aux coniques. Il en tire de nouvelles démonstrations de la rectification de la cycloïde et de la semi-cubique. Il donne également la complanation des conoïdes, qu'il avait annoncée dans une lettre de 1657 à Schooten, et fait connaître cette belle propriété de la cycloïde d'être la *tautochrone*, c'est-à-dire la trajectoire d'un pendule isochrone.

Leibniz (*Journal des savans*, 1678), indique un nouveau segment quarrable de la cycloïde: celui dont la corde part du sommet et aboutit au point de cette courbe situé au milieu de la hauteur. Il l'avait fait connaître en 1674. Les Bernoulli en ont trouvé plus tard un grand nombre d'analogues.

Ce n'est qu'après sa mort que, malheureusement pour l'avancement de la science, furent publiés les travaux de Fermat qui purent être recueillis (*Opera Varia*, Toulouse, 1679). Outre ce que nous en avons déjà dit, nous y voyons que dès 1629, il avait résolu le problème de Pappus et trouvé sa méthode *de maximis*, et de là sa méthode des tangentes; qu'en 1632 il savait construire la tangente à la conchoïde; qu'en 1636, il quarrait la spirale $\rho^2 = \theta$; qu'avant l'apparition de la *Géométrie*, il avait également découvert les principes de la géométrie cartésienne, qu'il a exposés plus méthodiquement, mais sans les aperçus qu'y avait ajoutés Descartes, lequel en avait beaucoup mieux saisi la haute portée. — En 1636, Roberval lui communique la formule

$$\frac{1}{k+1} < \frac{\Sigma n^k}{n^{k+1}} < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n}$$

(1) *Philosophical Transactions.*

Newton a consigné la même découverte, à peu près en même temps, dans une lettre à Collins.

de la quadrature des paraboles des degrés supérieurs; il l'informe qu'il a considéré depuis longtemps les tangentes de la conchoïde comme determinées par des équations bicarrées, que cette courbe a des points «par lesquels on ne peut mener de tangentes» (points d'inflexion). FERMAT lui répond qu'il a trouvé également la même formule, au moyen des nombres figurés [1]. — En 1638, FERMAT rédigea pour DESCARTES sa méthode *de maximis* avec application à la construction de la tangente à la parabole, à l'ellipse, à la cissoïde, à la conchoïde, à la cycloïde, à la quadratrice, et peu après au folium et à la cartésienne. ROBERVAL remarque que cette dernière possède un point (double) «par lequel peuvent passer deux ovales et partant y avoir deux tangentes», ce que l'équation doit faire découvrir [2]. — FERMAT indique en outre une méthode de recherche des points d'infléxion basée sur la détermination du maximum de l'angle de la tangente avec une droite fixe; donne une étude sur le degré des courbes employées à la solution des problèmes, la quadrature des paraboles fondée sur la considération d'ordonnées correspondant à des abscisses en progression géométrique [3], enfin les premiers exemples de quadratures analytiques qu'on ait encore vues, où il évite les radicaux au moyen de substitutions heureusement choisies: nous en rapporterons quelques-unes exposées à la manière moderne.

Soit le huit $y^2 = x^2 - x^4$. En posant $y = ux$, d'où $u^2 + x^2 = 1$, il viendra:

$$2\int y dx = 2\int uxdx = x^2u - \int x^2 du = x^2u - \int (1 - u^2)\, du \quad (^4)$$

Cette courbe est donc absolument quarrable.

Pour le folium $x^3 + y^3 = xy$, on posera $y = ux^2$, d'ou $u^3x^3 = u - 1$,

(1) Probablement la méthode que nous avons indiquée *Prog. Mat.*, 1900, pag. 408.

(2) CHASLES ne paraît pas avoir remarqué ce passage (*Ap hist.*, pag. 162).

(3) Voir, par exemple, *Prog. Mat.* (1900, pag. 410). Cette méthode et celle des tangentes aux courbes transcendantes, montrent avec quelle habileté FERMAT effectuait la substitution d'infiniment petits de même ordre.

(4) La même substitution dans l'équation de l'*anguinea* $y\,(1 + x^2) = x$, donne

$$2\int y dx = ux^2 - \int \frac{1-u}{u}\, du.$$

La quadrature de cette courbe s'obtient donc au moyen des logarithmes.

et de là,

$$3\int ydx = \int 3ux^2dx = \int ud(x^3) = ux^3 - \int x^3du = ux^3 - \int \frac{u-1}{u^3}du \text{ (}^1\text{)}.$$

Conclusion analogue.

Dans l'*agnésienne* $y^2x + x = 1$, changeons x en u^2 et y en $\frac{v}{u}$, d'où $v^2 + u^2 = 1$; il viendra

$$\int ydx = 2\int vdu \text{ (}^2\text{)}.$$

La quadrature de cette courbe, qui lui avait été proposée «ab erudito geometra» [3], se ramène donc à celle du cercle $v^2 + u^2 = 1$. FERMAT ajoute que la même méthode convient à la *dioclea* [4].

---

[1] Cette substitution, dans l'équation de la *piriforme*, $y^2 = x^3 - x^4$, montre que la quadrature de cette courbe se ramène à celle du cercle $u^2 + x^2 = x$.

En général, écrivons $y = ux^{m-1}$, d'où $m\int ydx = ux^m - \int x^m du$. On obtiendra une infinité de courbes quadrables en posant

$$x^m = F\left(\frac{y}{x^{m-1}}\right)$$

si l'expression $F(z)\,dz$ est intégrable.

[2] De même pour $x = u^{-1}$, $y = vu^2$, on a $ydx = -vdu$; et en général, si on pose $x = u^m$, $y = vu^{-m+1}$, il viendra $ydx = avdu$. De là le moyen de déterminer une infinité de courbes dont la quadrature se ramène à celle de la parabole, de l'ellipse, etc.

[3] LALOUVÈRE, qui dit tenir cette quadrature de FERMAT.

[4] La cissoïde. — Ne serait-ce pas cette solution que FERMAT avait en vue? Dans l'équation $y^2(1-x) = x^3$, faisons $y = x^2v^{-1}$, il viendra $x - x^2 = v^2$, d'où, en différentiant, multipliant par x et remplaçant $x - x^2$ par v^2,

$$x^2dx = v^2dx - 2vxdx, \quad \text{d'où} \quad \int ydx = \int vdx - 2\int xdv = vx - 3\int xdv.$$

La quadrature est ainsi ramenée à celle du cercle $x - x^2 = v^2$.

JEAN BERNOULLI et le MARQUIS DE L'HOSPITAL ont employé des méthodes semblables pour la folium: on verra la première dans le *Tratado* de M. GOMES TEIXEIRA, pag. 58; voici la seconde: différentions, multiplions par y et remplaçons y^3 par $xy - x^3$, il viendra l'expression intégrable

$$6ydx = 3(xdy + ydx) - \frac{2xydy - y^2dx}{x^2}.$$

La même substitution $y = x^2v^{-1}$ dans l'équation du cappa $x^4 = y^2 - y^2x^2$ donne

$$v^2 + x^2 = 1, \quad \frac{x^2dx}{v} = -xdv, \quad 2\int ydx = -\int xdv.$$

Il y aurait, à généraliser ces résultats, d'utiles exercices élémentaires de calcul intégral. Nous en avons donné un aperçu, *J. S.*, 1893 *(Rech. de courbes quarrables et rectifiables)*.

TSCHIRNHAUS communiqua en 1682 à l'*Ac. des Sc.* de Paris, la théorie des *caustiques*, qui lui avait été suggérée par LEIBNIZ. TSCHIRNHAUS considère seulement des rayons parallèles, et comme *dirimante*, le cercle. Les BERNOULLI ont porté cette théorie à son entière perfection.

L'année 1684 marque une date mémorable dans l'histoire du *calcul différentiel*. C'est à cette époque que LEIBNIZ publia, dans les A. E. (1), sa célèbre *Nova Methodus*, où il expose les principes de ce calcul. Au point de vue de notre étude, nous citerons: les formules donnant les différentielles d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance entière ou fractionnaire; celle de la sous-tangente, et son application à la cycloïde, au lieu des points dont la somme de leurs distances à des points fixes est donnée, enfin au problème de DEBEAUNE. Il a également étudié, dans le même volume, ce qu'il appelle la *quadratrice* d'une courbe, c'est-à-dire celle dont les ordonnées représentent la surface de cette courbe, ou la transformée $ay_1 = \int ydx$.

WALLIS a publiée, en 1689, un étude du *cono-cuneus* et de ses sections perpendiculaires aux plans diamétraux, lesquelles sont de la forme $ay = (x+b)\sqrt{c^2-x^2}$, généralisations du huit. Ces études avaient été divulguées par WALLIS en 1662.

TSCHIRNHAUS (*Medicina mentis*, Amsterdam, 1686), propose une méthode universelle de concevoir les courbes comme produites par le moyen d'un stylet tendant des fils enroulés autour de points ou de courbes fixes. La même année, LEIBNITZ émet les premières idées sur l'*osculation* en général; il propose, l'année suivante, la recherche de la courbe *isochrone*, c'est-à-dire celle d'un grave descendant également dans des temps égaux: la solution fut donnée par HUYGENS, LEIBNIZ et JACQUES BERNOULLI, qui trouvèrent que cette courbe n'est autre que la semi-cubique.

Dans ses admirables *Philosophiæ naturalis principia* (Londres, 1687), NEWTON a donné, à titre de lemmes ou de corollaires un certain nombre de propositions importantes de géométrie, dont nous citerons ce qui suit;

A la limite, le rapport d'un arc, de sa corde et de sa projection sur une tangente est l'unité.

A la limite, le rapport des carrés de deux cordes parallèles est égal à celui des flèches correspondantes.

La considération des angles de contact de divers ordres.

L'application aux coniques et à la spirale logarithmique de

(1) *Acta eruditorum Lipsiensæ.*

la théorie des forces centrales et de l'étude des trajectoires dans des milieux résistants.

La construction d'une conique passant par cinq points donnés, en employant deux angles tournant autour de leurs sommets. L'une des intersections décrivant une droite, l'autre décrit la conique.

La méthode déjà indiquée pour changer une figure en une autre de même genre mais plus simple, avec cette remarque que les tangents se correspondent.

Il y a lieu de distinguer les courbes simples (dont l'équation est irréductible) *des courbes composées, et celles qu'une droit peut rencontrer en un nombre fini de points, de celles qui peuvent l'être en une infinité de points.*

Une courbe du n^e *degré peut être coupée en* n *points par une droite. Deux courbes de degrés* m *et* n *ne penvent se coupcr en plus de* mn *points.*

Une figure ovale ne peut être quarrée in rectifiée par un expression d'un nombre fini de termes. Autrement, en prenant un point intérieur comme pôle et construisant les deux spirales dont les vecteurs croissent comme les aires (1) ou comme les arcs correspondants de la proposée, toute droite passant par le pôle coupera l'une et l'autre spirales en une infinité de points, de sorte que l'équation donnant la quadrature ou la rectification doit être d'un degré infini (2).

Rectification et développée de l'épicycloïde.

Solution du problème de Kepler (3) à l'aide de la trochoïde.

Quadrature approchée d'une courbe, dont on donne diverses ordonnées; la solution, divulguée en 1676 et étendue plus tard

---

(1) Newton suppose qu'un point se ment sur le vecteur de la première spirale, avec une vitesse proportionnelle au carré du vecteur de la proposée, ce qui donne

$$\frac{d\rho_1}{d\theta} = 2k\rho^2 \quad \text{d'où} \quad \rho_1 = 2k\int \rho^2 d\theta = \text{KA}.$$

(2) L'expression de la rectification d'un certain arc droit donner non seulement celle de cet arc, mais encore celles de tous les arcs obtenus en lui ajoutant un nombre quelconque de tours.

On a objecté à ce théorème de Newton que la lemniscate est absolument quarrable, mais cette objection tombe quand on remarque que cette courbe n'est pas ovale, et que par suite de son point double, les secteurs s'augmentent tantôt positivement, tantôt négativement et que rien n'empêche par suite qu'il passe par des valeurs périodiques.

(3) On sait qu'il s'agit de partager un secteur focal d'ellipse en proportion donnée.

par NEWTON lui-même, COTES et STIRLING, s'obtient en faisant passer une *courbe parabolique* par les extrémités des ordonnées et quarrant par les méthodes ordinaires.

Les sinus des rayons incidents, puis réfractés par l'ovale de DESCARTES, étant dans le rapport de k à l, on aura entre ces mêmes rayons la relation $\frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{k}{l}$, d'où le moyen de construire cette courbe par des intersections d'arc de cercles.

Enfin la détermination du *solide de moindre résistance*, premier exemple d'un genre de problèmes dont le principe est devenu le *calcul des variations*.

LEIBNIZ (*A. E.*, 1689), signale plusieurs généralisations des caustiques, par réfraction et par double réflexion, sur une ou deux courbes, auxquelles il donne les noms d'*acampta* et d'*aclasta*. Il propose ensuite l'étude de la courbe que parcourt un grave s'approchant uniformément d'un point fixe, l'*isochrona paracentrica*.

Dans son trop longtemps méconnu *Traité de la lumière* (Leide, 1690), lu treize ans auparavant à l'*Académie des sciences*, HUYGENS restitue la méthode probable de DESCARTES dans la recherche de ses ovales (1); examine l'*onde* (2) correspondant à des rayons parallèles et refractés par un cercle, c'est-à-dire la ligne (3), qui coupe ceux-ci à angles droits; il trouve que cette onde est la développée de l'enveloppe (4) de ces mêmes rayons, laquelle il montre être une épicycloïde. Dans le cas de rayons réfléchis, cette épicycloïde est d'indice $\frac{1}{2}$. Dans un traité annexé sur la *cause de la pesanteur*, il donne la tangente, la quadrature, la rectification de la *logarithmique* ou *logistique*, à laquelle il donne ces deux noms; il dénomme aussi la *soutangente* (sic).

La même année, JACQUES BERNOULLI (*A. E.*) propose l'étude de la *catenaria* (chaînette). L'année suivante, il étudie la *parabola helicoidis* ou *spiralis parabolica* $(1-\rho)^2 = \theta$, déjà considérée par FERMAT, ainsi que la spirale logarithmique et la loxodromie, en se servant du nouveau calcul de LEIBNIZ; et propose, à l'instigation de ce dernier, l'étude de l'*elastica* ou *elaterum curva-*

(1) Soit du l'élément de la normale, on a :

$$\frac{k}{l} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = \frac{d(u\sin\alpha)}{d(u\sin\alpha_1)} = \frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{\int d\rho}{\int d\rho_1} = \frac{\rho_\theta - \rho_0}{\rho_{1\theta_1} - \rho_{1 0}}.$$

(2) On l'appelle aujourd'hui, d'après Quételet, la *caustique secondaire*.

(3) Trajectoire orthogonale.

(4) Caustique.

tura. A noter de JACQUES BERNOULLI cette importante remarque que l'on peut assigner sur la parabola helicoidis deux arcs dont la différence est exprimable algébriquement.

Cette même année 1691, JEAN BERNOULLI propose l'étude de la *velaria* ou *figura veli;* et OZANAM (*Dictionnaire mathématique*, Paris, 1691), fait voir pour la première fois, l'équation de la strophoïde, de la *cycloïde géométrique* (cardioïde) et de la conchoïde; la construction de la tangente à la sinusoïde et à la courbe $\rho = 1 + \theta$; cette remarque que *le lieu de l'intersection des tangentes aux points correspondants de la cycloïde et du cercle, n'est autre que la développante du même cercle;* enfin la description par points de l'*ellipse de Cassini*.

L'importante théorie des *enveloppes* et de la différentiation *de curva incurvam* (des paramètres) a été exposée par LEIBNIZ (*A. E.*, 1642), l'année et dans le recueil où JEAN BERNOULLI perfectionne la théorie des caustiques et imagine la courbe appelée depuis *astroide;* — où JACQUES BERNOULLI étend cette même théorie à l'*anti evoluta* (lieu du symétrique du centre de courbure relativement à la tangente), à la *peri-caustica* (lieu du symétrique d'un point de la caustique par rapport au point correspondant sur la courbe donnée) et à l'*anti-caustica* (homothétique de la podaire); — et où VIVIANI propose sa fameuse *Ænigma geometricum,* qui se réduisait, comme on sait, à déterminer sur la sphère des surfaces quarrables. LEIBNIZ en donna immédiatement plusieurs solutions qui se réduisent aux deux constructions suivantes: projection sphérique du *scutum* (surface de l'onglet demi-cylindrique, laquelle est quarrable), et surface sphérique *(carbasa)* limitée par l'*anti-projection* du cercle construit sur une rayon de l'équateur comme diamètre. On rapportera également celles de JACQUES BERNOULLI, qui peuvent servir d'exercices, à part leur intérêt propre: soit un grand cercle PLK passant par le pôle P, et un point variable K sur l'équateur; on prend les arcs KL, AK ou leurs sinus toujours en même proportion; les deux lieux de L ainsi définis résolvent le problème. — Voici une autre solution du même: dans le plan de l'équateur AHL, traçons une surface quarrable quelconque, qui soit coupée en L par le rayon OLK, et soit H le milieu de l'arc AK; le plan mené parallèlement à l'équateur à une distance du pôle P, égale à $\frac{OL^2}{OK}$, coupe l'arc PH en un point dont le lieu répond à la question [1].

[1] JACQUES et JEAN BERNOULLI ont depuis étendu cette question aux conoïdes.

La solution de VIVIANI consistait à forer la sphère par deux cylindres de rayon moitié moindre: c'est donc la seconde de LEIBNIZ. La courbe qui en résultait *(vivianienne)* était d'ailleurs connue; c'était la *cyclocylindrica* de ROBERVAL et de LALOUVÈRE que ce dernier avait du reste remarquée être une courbe sphérique ([1]). — Dans l'opuscule *Curioza Esercitazione matematiche* (Florence, 1692), VIVIANI donne à la surface sphérique le nom de *vela quadrabile fiorentina,* et remarque en outre que *la surface latérale intérieure du cylindre est également quarrable,* — c'est le théorème de ROBERVAL, — et que *la rectification de la courbe se ramène à celle d'une ellipse aisément déterminable.*

Parurent en 1693: les travaux de ROBERVAL (*Diverses ouvrages de Messieurs de l'Académie*) lesquels comprennent, outre diverses choses déjà citées, la quadrature de la conchoïde et du *limaçon de Monsieur* (Etienne) *Pascal,* au moyen de l'intégrale $\int \sin^2 x dx$, qu'il connaissait en 1638; — la théorie des tangentes admise définitivement depuis (*id.*), par HUYGENS, qui l'avait divulguée dès 1663; — la solution du problème de la *tractoria* (tractrice), par LEIBNIZ (*A. E.*) à qui elle avait été proposée par PERRAULT ([2]); — enfin le second volume des *Opera*, de WALLIS, qui contient quelques découvertes de NEWTON remontant à plus de dix-huit ans; c'est ainsi qu'on voit pour la première fois: la formule du binome, présentée de cette manière

$$\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ +$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \text{etc.}$$

A, B, C,... désignant les termes successifs; le *parallélogramme analytique*, dont STIRLING, de GUA et CRAMER ont plus tard montré l'importance pour l'étude des courbes; la série donnant la rectification de l'ellipse; l'aire de la quadratice et sa rectification, des approximations des arcs circulaires, les intégrales

---

([1]) *La vivianienne se projette en vraie grandeur sur le cylindre circonscrit à la sphère* (COLLIGNON), *et sa projection après développement est une sinusoïde* (ROBERVAL). De plus *elle est la courbe dont les accroissements sont égaux en longitude et en latitude* (JEAN BERNOULLI) *et la stéréographique de la lemniscate* (d'ARREST). Nous avons donné plusieurs autres définitions de cette courbe célèbre (*J. S.*, 1895).

([2]) SLUZE parle, dans une lettre à HUYGENS datée en 1662, de la courbe dont les tangentes sont égales.

$\int(e+fz^n)^\lambda z^\theta dz$, $\int(f+ez^{-\eta})^\lambda z^{\theta+\lambda} dz$, diverses autres quadratures employant la formule du binome, et enfin un essai d'intégration des équations différentielles en général.

LAHIRE publia en 1694, un travail sur les épicycloïdes (*A. S.*) (1) où il avance que DESARGUES avait appliqué ces courbes au tracé des engrenages. — La même année, JACQUES BERNOULLI (*A. E.*) donna l'équation différentielle de l'elastica, son identification avec la *lintearia* (courbe d'un linge pressé par un liquide), la solution de l'isochrona paracentrica, qu'il construit moyennant la rectification de l'elastica ou d'une nouvelle courbe qu'il appelle *lemnisci* (nœud de ruban, GALLIS) ou *curva lemniscata*. — C'est également en 1694, (*A. E.*) que JEAN BERNOULLI fit connaître sa célèbre formule

$$\text{Integr. } ndz = nz - \frac{z^2dn}{1.2dz} + \frac{z^3d^2n}{1.2.3dz^2} - \frac{z^4d^3n}{1.2.3.ndz^3} \text{ etc.}$$

identique à celle que TAYLOR n'a donnée qu'en 1715.

En 1695, nous voyons: la solution, par l'HOSPITAL, LEIBNIZ et JACQUES BERNOULLI (*A. E.*) de la *curva æquilibrationis* (courbe du pont-levis) proposée à l'HOSPITAL par SAUVEUR, et qui n'est autre qu'un limaçon; — les théorèmes relatifs à la différence des arcs (JEAN BERNOULLI) et des aires (LEIBNIZ) de deux développantes parallèles; — enfin l'*Analysis infinitorum*, de NIEUWENTÜT (Amsterdam), essai d'exposition élémentaire, à la manière de BARROW, des nouvelles méthodes infinitésimales. Dans cet ouvrage, qu'a vite fait oublier celui dont nous parlons au paragraphe suivant, nous relevons quelques nouveaux problèmes: les transformations

$$y_2^2 = yy_1,\quad y_1 = F(y),\quad \rho_1 = F(\rho),\quad \rho_1^2 - \rho^2 = 1,\quad xx_1 = y^2,\quad x_1 = T;$$

la tangente à la *laméenne* $x^n + y^n = 1$; la courbe $y^x = 1$; la relation qui lie l'evoluta (au sens de GREGORY) d'une courbe avec sa *curva subtangentialis* ($y_1 = y$, $x_1 = t$) et sa transformée $y_2 = \rho$, $x_2 = \rho\theta$; enfin plusieurs questions dépendant de la méthode inverse des tangentes.

Les principes du calcul différentiel ont été donnés par le marquis de l'HOSPITAL, dans son *Analyse des infiniment petits* (Paris, 1696), rédigée d'après les leçons de JEAN BERNOULLI. Nous en citerons, comme nouvelles acquisitions à la théorie

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences*, de Paris.

des courbes; la démonstration des règles de la *Nova Methodus;* — la recherche de l'asymptote de la courbe $y^3 - x^3 = y$; — la tangente aux courbes définies par les transformations

$$y_1 = y + F(1), \quad y_1 = F(1), \quad y_2 = F(y, y_1), \quad \rho_1 = F(s), \quad \rho_2 = F(\rho, \rho_1),$$

connaissant celle de sa proposée; — la tangente à diverses généralisations des perles, du trident, de la cissoïde, de la logarithmique, de la tractrice; au lieu [1] du sommet d'un angle mobile dont les côtés touchent deux courbes données; au lieu d'un point d'une droite dont deux autres points glissent sur deux courbes données; — la détermination du point d'inflexion de la cycloïde raccourcie, et de la courbe $(\rho - \sec\theta)\rho \sec\theta = 1$ [2]; — l'étude des *points de rebroussement* des deux espèces, avec application à la courbe définie par la relation $x + t = kT$ ou $kyds = xdy - ydx$; — la preuve de l'existence des points de rebroussement de seconde espèce [3] tirée de la forme de la développée d'une courbe à inflexion: — l'étude des développées des courbes définies par des coordonnées cartésiennes ou polaires; — ces deux remarques: *la roulette d'une courbe roulant symétriquement sur cette courbe est une développante de sa caustique,* et *si la caustique par réfraction se réduit à un point, la courbe est un ovale de Descartes;* — théorie des enveloppes, en particulier celle des circonférences ayant pour centres les pieds des ordonnées et celles-ci pour rayons, celle des droites joignant les pieds des perpendiculaires abaissées de chaque point d'une courbe sur les axes de coordonnées, celle d'une droite dont deux points glissent sur deux droites données, enfin celle des droites joignant les points de contact des couples de tangentes menées des points d'une courbe donnée a deux autres courbes données: le problème inverse de ce dernier (lieu des intersections des tangentes à deux courbes en des points où les coupe une tangente à une troisième courbe donnée), est une généralisation de théorèmes connus sur les coniques.

C'est cette même annnée 1696, que Jacques Bernoulli, généralisant, suivant sa coutume, le problème de Debeaune, donna (*A. E.*) la solution de l'équation

$$ady = ypdx + by^n qdx,$$

(1) Appelé aujourd'hui *isoptique.*

(2) Appelée aujourd'hui *conchoïde sluzienne* du nom du géomètre qui l'avait remarquée le premier vers 1673. Voir le t. IV des *Oeuvres* d'Huygens.

(3) Malgré l'examen détaillé des développées des courbes à inflexions par l'Hospital, cette existence fut longtemps discutée.

la première de ce genre qu'on ait encore abordée; — que JEAN BERNOULLI (*id.*) fit cette remarque que la surface d'une figure décrite sur la surface d'une cône droit est à sa projection sur la base comme le côté du cône au rayon de la base ([1]); — et proposa (*id.*) l'étude de la *brachystochrone*, que GALILÉE avait crue un arcle de cercle, et dont la solution exacte fut trouvée peu après par LEIBNIZ, NEWTON, les BERNOULLI et l'HOSPITAL; — que NICOLAS *De spiralibus hyperbolicis et lineis logarithmicis*, Toulouse), étudia les evoluta de plusieurs courbes et démontra les théorèmes de HUYGENS sur la logarithmique; — enfin que HALLEY (*P. T.*) montra que la *stéréographique* de la loxodromie est une spirale logarithmique.

La théorie des *trajectoires orthogonales*, ainsi que celles du *calcul exponentiel*, des *courbes géodésiques* et des *courbes isopérimètres*, datent de 1967. JEAN BERNOULLI (*Journal des savans*), proposa, d'une part, la recherche de la courbe coupant normalement les cycloïdes de même base et de même origine, — courbe qu'il appelle *synchrone* parce que toutes ces portions de cycloïdes sont parcourues dans des temps égaux, — ainsi que les logarithmiques de même axe et passant par un même point; d'autre part l'étude des courbes de longueur minimum entre deux points donnés sur une surface donnée, et de celles qui retranchent des courbes d'une même famille des arcs ou des segments égaux à partir de l'origine ([2]); enfin l'étude des courbes $x^x = y$, $x^y = 1$, $x^x = y^y$. — JACQUES résolut en 1698, la première de ces questions, en l'étendant au cas de la parabole se mouvant de diverses manières et à la parabole cubique. JEAN y est revenu d'ailleurs plus tard et a complètement élucidé le problème. — La troisième question ne le fut pleinement que par son auteur, en 1728. — Quant à la dernière, — généralisation du problème de la brachystochrone, et par laquelle on se propose de déterminer parmi les courbes isopérimètres, celle

---

([1]) Delà, cette transformation, que nous avons appelée *ductévolution*, qui revient à la considération des formules $\rho_1 = k\rho$, $\theta_1 = k\theta$ (*J. S.*, 1895, pag 200) et qui donne immédiatement la quadrature et la rectification d'un grand nombre de courbes. La droite, le cercle, le cappa ont respectivement pour *ductévoluée* l'*épi* $\rho = \sec k\theta$, la *rosace* $\rho = \cos k\theta$, le *nœud* $\rho = \operatorname{tg} k\theta$. *Si une droite et une courbe* A *tournent uniformément autour d'un point fixe, le lieu de leur intersection est une ductévoluée de* A. *Il en est de même si la droite est remplacée par une ductévoluée de* A.

([2]) Appliquée au cercle, la première de ces deux transformations donne la *spirale hyperbolique* étudiée par NICOLAS et ensuite par JEAN BERNOULLI lui-même; ainsi que la *cochleoïde* $\rho\theta = \cos\theta$, définie explicitement par BOSSUT (*Calc. int.*, 1796), de la manière qui vient d'être dite.

dont la transformée $y_1 = F(y, s)$ a une surface maximum, — elle fut la cause d'une longue et attristante discussion entre les deux frères, qui la résolurent successivement et elle devint l'objet d'importants travaux d'EULER, lesquels, entre les mains de LAGRANGE aboutirent à la découverte du *calcul des variations*.

En 1698, JEAN BERNOULLI abord un problème d'un genre nouveau et qui devait avoir des conséquences importantes, celui de la recherche des courbes dont les arcs égaux se correspondent d'après une loi donnée (*A. E.*).

Nous mentionnerons de 1699: l'opuscule de NICOLAS, *De cissoidibus et conchoidibus* (Toulouse), intéressantes généralisations de la cissoïde et de la conchoïde; — puis la publication du t. III des *Opera* de WALLIS, contenant diverses lettres de NEWTON et de LEIBNIZ, qui n'offraient déjà plus alors qu'un intérêt purement historique. Nous citerons de ces dernières: la rectification par NEWTON, à l'aide de développements en séries, de l'hyperbole et de la quadratrice, ainsi que diverses approximations des arcs circulaires et elliptiques *(lettre du 13 Juni 1676)*; — de LEIBNIZ, les séries donnant la quadrature du cercle et de l'hyperbole, à l'aide de l'artifice de ROBERVAL, ainsi que des vues sur la reduction à la géométrie des questions mécaniques: élasticité, résistance des solides, hydraulique, etc. *(lettre du 27 Août 1676)*; — dans la *lettre de Newton du 24 Octobre 1676*, la manière dont il est arrivé à son extension de la formule du binome, son calcul des logarithmes, découvertes remontant à 1665 et 1666; la rectification de la cissoide; une liste de fluentes (intégrales) se ramenant à la quadrature des coniques; le problème de faire passer une cubique par sept points (dont un point double); ses deux théorèmes du *retour des suites*, consistant à exprimer y en z sachant que

$$z = ay + by^2 + cy^3 + \dots \quad \text{ou bien} \quad z = ay + by^3 + cy^5 + \dots;$$

enfin l'explication des anagrammes sous lesquelles, dans la rédaction primitive adressée à LEIBNIZ, NEWTON cachait sa méthode. Citons pour terminer, la *lettre de Leibniz du 21 juin 1677*, où il rélatait ses premiers travaux sur le calcul différentiel et ses applications.

En 1704, nous voyons: LAHIRE (*A. S.*) étudier les roulettes en général et démontrer que toute courbe peut être considérée comme une roulette; étudier les isoptiques de la cycloïde et des coniques et rectifier la cardioïde; — VARIGNOU (id.) examiner les courbes figurant les propriétés des logarithmes, telles que celles appelées depuis *lituus* et *spirale tractrice;* — enfin NEWTON

publier sa *quadratura curvarum*, recueil d'intégrales et de théorèmes propres à en évaluer d'autres par leur réduction à des intégrales plus simples.

JEAN BERNOULLI (*A. E.* 1705), donna son ***Motus reptorius*** permettant de déduire d'une courbe algébrique une infinité de courbes, ayant des arcs égaux aus siens. Il appelle *curva reptoria* la courbe M décrite par un point du plan d'une courbe (*perreptans*) A se mouvant parallèlement à elle-même tout en restant tangente à une courbe fixe (*perreptenda*) B; les arcs de M sont égaux à la somme ou à la différence des arcs correspondants de A et de B. Il donne aussi le théorème suivant, qui conduit au même résultat: *considérons sur les courbes quelconques* $F_1(x_1, y_1)$, $F_2(x_2, y_2)$, ... *des arcs dont les tangentes aux extrémités se coupentsous des angles égaux, et imaginons une courbe dont les coordonnées sont*

$$x = x_1 + x_2 + \ldots, \quad y = y_1 + y_2 + \ldots$$

les arcs de cette dernière courbe sont égaux à la somme de leurs correspondants sur les premières.

Cette même année vit paraître le premier traité de géométrie analytique: GUISNÉE (*Application de l'algèbre à la géométrie*, Paris, 1705), traité par les nouvelles méthodes, les coniques, la strophoïde, le cappa et diverses courbes transcendantes.

Nous sommes arrivé au terme de la période héroïque du calcul infinitésimal. Les savants vont suivre la voie féconde tracée par LEIBNIZ et les BERNOULLI, et appliquer principalement le puissant instrument qui leur a été donné, au perfectionnement de la mécanique: la curiosité ne se satisfaisant plus de la géométrie abstraite, mais voulant s'attaquer aux théories physiques, dont GALILÉE, HUYGENS et NEWTON ont posé les fondements et qu'on peut maintenant aborder. La théorie des courbes n'est cependant pas abandonnée; elle entre même dans une nouvelle phase: par l'emploi des coordonnées, on pouvait aisément étudier la forme et les propriétés analytiques des courbes algébriques; la géométrie infinitésimal, créée par ARCHIMÈDE, et qui arrive à son plein épanouissement avec BARROW, en permettait une étude plus intime; le calcul infinitésimal, délivrant celle-ci de ses *vinculi*, — pour parler comme LEIBNIZ, qui, avec FERMAT et bien mieux que NEWTON, avait compris que l'avenir de la science infinitésimale dépendait des simplifications qu'on apporterait dans les méthodes de calcul, — lui fournissait la possibilité d'en scruter les propriétés les plus cachées. On pouvait donc penser qu'aucun perfectionnement nouveau n'était possi-

ble; c'est cependant ce qui arriva à cette époque même: de quelques théorèmes recueillis, coordonnées et complétés par PAPPUS, naissait sous la plume de NEWTON une méthode générale d'étude des courbes, préparée par DESARGUES et PASCAL, et qui, d'abord comprise et étudiée seulement par COTES et MAC-LAURIN, a définitivement conquis l'attention après les travaux de CARNOT, BRIANCHON, PONCELET, MOBIUS, PLUCKER, etc. et est devenue la *géométrie projective*, dont le magnifique développement se poursuit encore aujourd'hui.

Cette découverte de NEWTON parut en 1706, dans un opuscule du plus haut intérêt intitulée *Ennumeratio linearum tertii ordinis*, où il examine les formes des branches infinies des courbes: une branche *(crura)* a une inflexion *(contraria)*, est *nodata* (avec boucle), *cuspidata* (à rebroussement), *conchoidalis* (a une asymptote unique, qu'elle ne coupe pas), *anguinea* (a une asymptote unique, qu'elle coupe), *campaniformis*, *parabola* (sans asymptote), *hyperbola* (avec une ou deux asymptotes), *circumscripta, inscripta* ou *ambigena* (coupant les deux asymptotes, ou une seule des deux). Particulièrement, une cubique peut être *cruciformis* (avoir deux branches qui se coupent), *punctata* (avec point isolé), *cum ovali*, *pura* (sans ovale, boucle, rebroussement ni point isolé), *hyperbola parabolica*, avec ou sans diamètre, *defectiva* (avec une seule asymptote), *redundantis* (avec trois asymptotes concourantes ou non). Il classe les courbes du troisième degré en soixante-douze espèces (1), parmi lesquelles de *tridens*, la *parabola campaniformis* $y^2 = (\alpha + x)(\beta + \gamma x)^2$, la *parabola nodata* $y^2 = (\alpha + \beta x)^3$, la *semi-cubica* et la *cubica;* et donne ce beau théorème: les cubiques peuvent être considérées comme perspectives des cinq *paraboles divergentes* $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$; ainsi que la construction des cubiques et des quartiques à point double à l'aide de deux angles tournant autour de leur sommet: si l'une des intersections des côtés mobiles décrivent une conique, l'autre décrit la courbe en question. — Nous terminerons par l'énoncé des théorèmes généraux que nous avions en vue dans notre digression de tout à l'heure: *Une transversale quelconque ne peut couper une courbe du* n^e *degré en plus de* n *points. — La perspective d'une courbe du* n^e *degré est également une courbe du* n^e *degré. — Une courbe du* n^e *degré ne peut avoir plus de* n *asymptotes. — Le lieu du centre des moyennes distances des points où une parallèle à une droite donnée coupe une courbe don-*

(1) Ce nombre a été augmenté successivement par STIRLING, DE GUA et PLUCKER.

née est une droite qu'on appelle le diamètre conjugué *de la droite donnée.* Si elle lui est perpendiculaire, c'est un *axe;* si deux diamètres se coupent, l'intersection est un *centre.* — *Si une courbe a son maximum d'asymptotes, le centre des moyennes distances des points qu'elle détermine sur une droite donnée coïncide avec le centre de celles déterminées sur les asymptotes.* — *Si par un point du plan d'une courbe, on mène deux parallèles à deux droites données, les produits des segments déterminés sur ces droites sont dans un rapport constant,* quel que soit le point choisi.

Leibniz en 1706 a donné deux intéressantes études de géométrie infinitésimale: celle du lieu des centres de gravité des segments d'une courbe ayant même origine sur celle-ci (*M. B.*) (1) et celle des courbes appelées aujourd'hui *glissetes* (*A. E.*).

En 1707, fut publié à Cambridge l'*Arithmetica universalis,* de Newton, résumé des leçons qu'il professait en 1669. A notre point de vue, il convient de mentionner: l'étude des sections planes du solide produit par une droite tournant autour d'une droite donnée, la construction de la cissoïde par un mouvement continu, et l'emploi de cette courbe ainsi que de la conchoïde pour la solution des équations du troisième degré. Cette même année, Jean Bernoulli (*M. B.*) applique sa théorie du motus reptorius à l'ellipse (ou *curva bigibba*) rampant sur une ellipse égale mais disposée dans un sens perpendiculaire, ce qui lui donne successivement la *curva quadrigibba,* l'*octogibba,...,* d'où il déduit une méthode de calcul du nombre π et cette approximation indéfinie de la rectification d'une ellipse dont les axes sont a et b (2): prendre sur une droite $AO = a$, $OB = b$, joindre O aux points de division en n parties égales de la circonférence ayant AB pour diamètre. Si M_n est la moyenne arithmétique des n vecteurs ainsi définis, la circonférence ayant M_n pour rayon approche d'autant plus du périmètre de l'ellipse que le nombre n est plus grand. — A citer aussi de Jean Bernoulli (id.) ce théorème: *abaissons du sommet* O *une perpendiculaire* OA *sur la base du triangle isocèle* OMN, *pronons sur* OM, $OA' = OA$, *projetons de même* O *sur* AA' *en* B, *prenons sur* OM, $OB' = OB$, *etc.; les points* A, B, ... *sont sur une même quadratrice.*

(1) *Miscellanea Berolinensia.*
Cette courbe s'appelle aujourd'hui la *barycentrique* de la première. Celle du cercle n'est autre que la cochléoïde, dont nous avons parlé plus haut.

(2) Prouhet a donné en 1865, dans les *Nouv. Ann.* une autre démonstration de ce remarquable théorème.

Mentionnons l'excellent *Traité analytique des sections coniques* (Paris, 1707), de l'HOSPITAL, où ces courbes sont très clairement étudiées et appliquées à la solution de questions géométriques variées. Citons aussi de cet ouvrage: la construction élémentaire de la tangente à la parabole $x^n = y$, fondée sur cette remarque que le développement de $(a+b)^n$ est de la forme $a^n + na^{n-1}b + Aa^{n-2} + Ba^{n-3} + \ldots$, la quadrature de cette même parabole déduite de la connaissance de sa tangente; la transformée $x_1 = \frac{T}{y}$, $y_1 = y$, analogue à celle de VAN HEURAET; enfin ce théorème: *on peut sur une parabole* $y^2 = x$ *déterminer une infinité d'arcs associés deux à deux et dont la différence soit une longueur assignable,* ce qui se ramène à trouver des trapèzes hyperboliques dont les aires diffèrent de quantités données, chose facile à exécuter. Cette dernière théorie est due à JEAN BERNOULLI.

Citons pour mémoire le *Traité des conchoïdes*, de Lahire (*A. S.*, 1708).

En 1710, Jean Bernoulli fit connaître (*A. S.*) une remarquable propriété dynamique de la spirale hyperbolique. — Il avait, ainsi que son frère, étudié plusieurs cas particuliers du problème des trajectoires orthogonales; en 1715, LEIBNIZ le posa, dans toute sa généralité, ce qui amena JEAN BERNOULLI à en donner une théorie complète, étendue aux *trajectoires orthogonales réciproques.*

En 1716, PARENT (*A. S.*), dans un mémoire lu en 1701, traite l'équation de la sphère et de son plan tangent, et SAURIN (id.) examine la question des tangentes aux points doubles.

STIRLING, dans son *Lineæ tertii ordinis Newtonianæ* (Oxford, 1717) commente l'opuscule du même titre, de NEWTON, en étendant plusieurs de ses théorèmes. On a surtout à citer ce qui suit. *L'équation d'une courbe du* n^e *degré peut avoir* $\frac{1}{2}n(n+3)$ *termes, et tel est le nombre de points qui déterminent une telle courbe. — Une branche d'une courbe algébrique est infinie ou fermée. — Une transversale quelconque coupe une courbe du* n^e *degré en* n *points réels ou imaginaires. — Toute ligne de degré impair a des branches infinies.* — Il donne en outre les formules générales des asymptotes des courbes des second et troisième degrés: — considère les *asymptotes courbes*, les *asymptotes doubles*, telles que celle de la conchoïde, et enseigne à les déterminer, soit élémentairement, comme dans l'*Analyse des infiniment petits,* soit par le développement de l'une des indéterminées en série fonction de l'autre, série qu'il obtient au moyen du parallélo-

gramme de NEWTON, ou encore en se servent du théorème dit de MAC-LAURIN mais en réalité du à STIRLING. — A noter aussi que *les cinq paraboles divergentes sont déterminées par six points, la parabole cubique par quatre et le trident par cinq.*

Les premiers travaux de MAC-LAURIN concernent la théorie des *podaires* et de leur usage dans l'étude des courbes (*P. T.*, 1718). Peu après, il publia sa *Geometria organica* (Londres, 1720), où il envisage, d'une manière générale, la construction des courbes au moyen d'angles mobiles. Il démontre, à l'aide de l'analyse de DESCARTES, un grand nombre de théorèmes qu'on peut résumer ainsi:

Démonstration et discussion, dans ses divers cas, de la construction cinématique de NEWTON des cubiques à points doubles.

Les sommets S, C, *du quadrilatère* SCNP *étant fixes et les angles* P, N *constants, si* N *décrit une droite,* P *décrit une certaine cubique* (1). De là la construction de la cissoïde oblique analogue à celle donnée par NEWTON pour la cissoïde droite.

Si le quadrilatère PNQC *se meut de manière que,* S *et* C *étant fixes,* NQ *passe toujours par un point fixe,* S, *que les angles* C *et* N *restent constants, et que deux des trois sommets* O, P, N, *décrivent des droites, le troisième tracera une cubique ayant un point double en* S *ou en* C.

Les côtés PN, PR *du quabrilatère* PNQR *passant par deux points fixes* C, S; *les angles* N *et* R *restant constants: si trois des quatre sommets se meuvent sur des droites, le quatrième décrit une quartique ayant deux points doubles en* C *et en* S. *Si ces trois droites sont parallèles, le lieu est une cubique.*

Un $(n+3)^{gone}$ *a deux sommets fixes;* n *des autres sommets parcourent des droites fixes et leurs angles sont constants. Le sommet libre décrit une courbe de degré* $n+2$. Théorèmes analogues, où les droites sont remplacées par des courbes de degrés désignés.

Tangentes aux podaires, podaires successives, podaires du cercle, de la parabole, de l'hyperbole. Roulette d'une courbe sur la même courbe renversée *(épicycloïdale)*.

Etude de la courbe dont le vecteur est en raison constante avec la puissance n^e du vecteur correspondant de sa podaire (2). Relation entre les arcs des deux courbes, propriétés du rayon de courbure, cas particuliers, recherche de l'*antipodaire* de la droite, de la parabole, etc.

---

(1) Une des courbes désignées par NEWTON par les numéros 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44.

(2) C'est la courbe appelée aujourd'hui *orthogénide* ou *spirale sinusoïde.*

Une ligne du degré n *ne peut avoir plus de* $\frac{n^2 - 3n + 2}{2}$ *points doubles*. Formules donnant le nombre des points triples, etc.

Construction d'une courbe de degré n déterminée par un ensemble de points dont un point n^{uple}, et d'une courbe déterminée par des points, dont trois n^{uples} ou trois n^{uples} et quatre $(n-1)^{uples}$.

Dans son ouvrage posthume *Harmonia mensurarum* (Cambrige, 1722), COTES appelle *curvæ logisticæ*, à l'imitation de VARIGNON, les courbes qui représentent les logarithmes et étudie deux courbes de ce géomètre: la *complicata tractrix* définie par la relation $s = L\rho$, ou comme inverse de la développante du cercle, ou comme ayant ses tangentes polaires égales (1); en second lieu, le *lituus*, lieu des extremités des arcs circulaires formant avec l'axe polaire des secteurs de surface constante, ou courbe qu'on peut définir par l'une des deux relations $t\rho = 1$, $A = L\rho$.

GUIDO-GRANDI (*P. T.*, 1723), a fait connaître des courbes qu'il a étudiées dans un ouvrage dont nous nous occupons plus loin.

OFFENBURG avait proposé (*A. E.*, 1718) la recherche de courbes sphériques rectifiables, ce qui donna à HERMANN l'occasion d'imaginer les *épicycloïdes sphériques* dont certaines résolvent le problème (*Com. Acad. Petrop.*, 1727).

C'est dans son opuscule *Flores Geometrici* (Florence, 1728), que GUIDO-GRANDI donne la quadrature des *rosaces* et des *clélies* et la comparaison de leurs arcs avec ceux de l'ellipse. La rosace *(rhodonea)* n'est autre que la courbe $\rho = \sin k\theta$ et la clélie *(clælia)*, l'antiprojection, sur la sphère de rayon I, de la rosace décrite sur le plan de l'équateur avec le centre comme pôle (2).

MAUPERTUIS a apporté une importante contribution à l'étude des points singuliers, par ses recherches sur les *points de serpentement* et les *points de double pointe* (*A. S.*, 1729). A citer aussi les travaux de NICOLE sur les théorèmes de l'*Ennumeratio* de NEWTON et ceux de BRAGELONGUE sur les points singuliers et sur un essai de classification des quartiques.

Clairaut, dans ses célèbres *Recherches sur les courbes à double*

---

(1) MAC LAURIN *(Treat. of Flux)* a remarqué que cette courbe est la podaire de la spirale hyperbolique. Elle a été retrouvée par GIRARD (*N. A.*, 1862), qui l'appelle *tractrice polaire* et par ROUQUEL (*N. A.*, 1863), qui lui a donné son nom de *spirale tractrice*.

(2) Nous avons résumé les principaux théorèmes de GUIDO-GRANDI dans notre article *sur un théorème de Gregory* (*J. S.*, 1895).

courbure (¹), a fondé la théorie analytique de ces courbes (²). Il enseigne à les représenter par des équations, construire leurs tangentes, les rectifier et quarrer les surfaces qu'elles comprennent.

C'est à BOUGUER (*A. S.*, 1732), qu'est due l'idée des *courbes de poursuite,* dont il a étudié la plus simple, celle qui a lieu alors que le mobile poursuivi décrit une droite. La même année HERMANN a abordé l'étude des surfaces (*Com. Acad. Petr.*).

BRAIKENRIDGE (*Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum*, Londres, 1733), a montré une nouvelle méthode générale de construction des courbes, généralisation de celles de NEWTON et de MAC LAURIN: une transversale menée d'un point donnée coupe une courbe en un point qu'on joint à un deuxième pôle par une droite coupant une deuxième courbe en un point qu'on joint à un troisième pôle, et ainsi de suite. On comprend tout le parti qui peut être tiré de cette idée.

Nous citerons la méthode de la CONDAMINE (*A. S.*, 1734), pour le tracé d'une courbe connaissant sa *rosette*, c'est-à-dire la conchoïde généralisée décrite par un point du plan d'une droite passant par un pôle fixe et dont un point décrit la courbe demandée.

En 1735, MAC LAURIN fit connaître (*P. T.*) le fragment d'un supplément à sa *Geom. org.* écrit en 1723, et contenant plusieurs théorèmes qui se résument en celui-ci: *si les côtés d'un* n^gone^ *passent par* n *points fixes et que* n — 1 *sommets se meuvent sur des courbes de degrés* a, b, c, ..., *le sommet libre décrira une courbe du degré* 2abc...

La *Methodus Fluxionum* de NEWTON, écrite en 1671, a été publiée seulement en 1736, à une époque où la science, ayant franchi un espace immense, ne pouvait guère en tirer d'autre secours que celui de voir l'illustre géomètre couvrir de son autorité les méthodes du calcul infinitésimal, encore très discutées à cette époque. Toutefois le grand nom de NEWTON demande qu'on dise quelques mots sur la manière dont il envisageait et exposait le calcul infinitésimal.

(¹) CLAIRAUT a écrit ce livre à seize ans. A dix ans il possédait l'*Analyse des inf. petits* de l'HOSPITAL et à douze ans et demi, il avait écrit un traité sur les quatre courbes $x^4 = x^2 + y^2$ (kampyle), $x^4 + x^2y^2 = 1$, $x^2 - x^2y^2 = 1$ et $x^4 = 1 - y^2$ (*M. B.*, 1734). Son frère a publié également en 1731, un opuscule sur diverses quadratures de *lunules coniques* et la description des paraboles: c'est là qu'a été publiée pour la première fois, la construction cinématique bien connue du cappa. L'auteur avait quatorze ans.

(²) Cette dénomination est due à PITOT (*A. S.*, 1724).

Après avoir expliqué l'extension des opérations arithmétiques à l'algèbre, il enseigne à trouver les racines des équations, l'usage du parallélogramme analytique, sa théorie et son calcul des fluxions, le retour des équations fluxionnelles aux équations de leurs fluentes, et la recherche des maxima, à la suite de quoi il propose plusieurs problèmes, dont les suivants: *par un point donné, mener une droite minimum entre deux courbes données.* — *Déterminer le plus petit angle qu'un diamètre d'une conique peut faire avec ses ardonnées.* — *Par quatre points donnés faire passer une ellipse maximum.* — Il donne ensuite la construction des tangentes, comme Sluze, et applique à plusieurs cas, dont ceux du trident, de la conchoïde et des transformées

$$y_1 = \mathrm{F}(\mathrm{A}); \quad y_1 = \mathrm{F}(s); \quad x_1 = s,\ y_1 = \mathrm{F}(y); \quad \operatorname{tg}\frac{y}{x} = \mathrm{F}(y); \quad \rho_1 = \mathrm{F}(\rho).$$

Il montre à déterminer les points d'infléxion par la condition du maximum de la sous tangente, avec application à la conchoïde; construit les tangentes aux courbes définies en coordonnées pôle-directrice ou en coordonnées bipoloires, à la courbe $\rho = \mathrm{F}(\theta)$, à la courbe $\rho \operatorname{tg} \theta = \mathrm{F}(\theta)$ et propose la construction de la tangente commune à deux courbes données.

Ensuite il expose la théorie de la courbure et l'applique aux coniques, à la cissoïde, à la conchoïde, à la cycloïde, à la quadratrice et à diverses spirales, à la recherche du point où la courbure a une valeur donnée ou nulle (point d'inflexion) ou infinie (rebroussement), maximum ou minimum; il donne enfin la développée de la parabole et de la cycloïde et la théorie de l'osculation parabolique.

Il enseigne à trouver des courbes quarrables, en partant de courbes dont on connaît la quadrature: par exemple en posant $\mathrm{A}_1 = \mathrm{F}(x)$ d'où $y_1 = \mathrm{F}'(x)$; ou bien $\mathrm{A}_1 = \mathrm{F}(\mathrm{A})$, d'où si $y_1 = f(x)$, $y = f(x)$, $f_1(x) = \mathrm{F}[f(x)]$; ou encore $y = \rho\theta$, $x = \rho$, ce qui donne $\int y dx = \rho^2\theta - \int \rho^2 d\theta$, ou $\mathrm{A}_1 = \rho^2\theta - \mathrm{A}$ et de là, la quadrature des spirales. Il donne ensuite une table d'intégrales, diverses manières d'intégrer ou de ramener les quadratures à celles des coniques, ou en développant en séries, ce qu'il applique à la cissoïde, à la conchoïde, à l'agnésienne, à l'hyperbole, au cappa, au lieu d'un point d'un côté RM d'un angle MKO dont l'autre côté passe toujours par un point fixe O et dont le sommet parcourt une droite, enfin à la courbe dont les ordonnées représentent les arcs d'une conique. Il quarre également ces quatre dernières figures par la géométrie infinitésimale.

Newton termine par diverses rectifications de courbes obte-

nues par la théorie des développées, ou en résolvant l'équation $dx^2+dy^2=dx_1^2+dy_1^2$, ou par la théorie de l'évolution (au sens de Gregory), ou par des procédés qui, généralisés, reviennent à poser:

$$2y=\mathrm{F}(x)-\int\frac{dx}{\mathrm{F}'(x)},\quad \text{ou bien}\quad y^2=\mathrm{F}(x),$$

l'expression $\sqrt{1+\frac{\mathrm{F}'(x)^2}{4\mathrm{F}(x)}}$ étant intégrable dans ce dernier cas, ce qui a lieu si, par exemple, $9\mathrm{F}(x)=(1+x^2)^3$ ou si $\mathrm{F}(x)=x^3$ (¹). Il donne en dernier lieu la rectification de la cissoïde à l'aide des logarithmes et celles de l'hyperbole et de la quadratrice au moyen des séries.

De Gua, dans un excellent opuscule, *Usage de l'analyse de Descartes* (Paris, 1740) se propose d'enseigner l'étude des courbes algébriques sans aucune intervention du calcul différentiel. Ses réflexions sont intéressantes à noter. Il montre la nécessité «de rappeler à leurs vrais principes les conaissances acquises par des voyes éloignées», d'autant qu'un pareil travail conduit toujours à des découvertes nouvelles. La simplicité est un des caractères des vrais principes, et la recherche de ceux-ci doit être le vrai but de la science: C'est ce qui fait qu'ils sont en petit nombre et qu'on saisit facilement les propositions qui en dependent. La fécondité en est un autre caractère, et c'est ce qui produit «ces chaines ininterrompues de conséquences qui sont seules capables de composer un véritable corps de science».

Il commence par une théorie des centres et la manière de les découvrir quand ils existent; il donne ensuite les formules de transformation des coordonnées, une étude des asymptotes, de l'osculation et des points singuliers, basée sur la forme de l'équation disposée suivant un triangle comme ci-contre, ce qu'il appelle le *triangle analytique* et n'est autre qu'une modification du parallèlogramme de Newton: l'examen du nombre des termes manquants dans la première, la seconde, ... rangées, leurs racines égales, leurs racines communes lui fournissent tous ses critères. Il déduit de là diverses remarques sur la forme et les

$$\begin{array}{ccccccc} ny^3 & & ixy^2 & & kx^2y & & lx^3 \\ & ey^2 & & fxy & & gx^2 & \\ & & by & & cx & & \\ & & & a & & & \end{array}$$

(¹) Courbe fermée à trois points doubles. Ce nom est dû à de Bragelongue.

combinaisons des branches infinies; — la définition d'un grand nombre de points singuliers très compliqués, entre autres ceux que produisent les multiflexions ou les multinœuds des *serpentement*, *folium*, *lemniscate*, *bezace*, *trèfle*, *lemnisceros* (¹),... évanouissants, lesquels deviennent ainsi *double rebroussement*, *point de double contact*, *rebroussement adhérent*, *branches osculantes*, etc.; — et met sur la voie de la définition et de la recherche de tous les autres. Il compte une espèce de points dans les coniques (les points non singuliers), cinq dans les cubiques, quatorze dans les quartiques et quarante dans les quintiques.

De Gua a découvert, entre les points singuliers et les branches infinies, une correspondance remarquable, qui lui a été revélée par l'usage du triangle analytique et qu'il démontre ensuite par le tracé de l'*ombre* ou perspective de la courbe. On lui doit ce théorème (²): *Si une courbe a trois points d'inflexion* (réels) *il sont en ligne droite*; — les premières vues sur la manière de définir analytiquement une courbe de forme donnée; — la considération des points singuliers à l'infini; — l'introduction des imaginaires dans la théorie des courbes: *droites imaginaires* (telles que $y^3 = x^3$), *paramètres imaginaires* (tels que ceux de la courbe $a^4x^4 + b^2y^2 = 0$), *inflexions*, *sommets*, *branches*, *ordonnées imaginaires* (³); — la critique des méthodes du calcul différentiel pour l'étude des points singuliers, calcul qui n'est en somme qu'une simplification de la méthode cartésienne et qui, comme toute simplification, demande des soins spéciaux si on ne veut s'égarer: or une méthode dont il faut vérifier les résultats n'est pas la vraie méthode. Ajoutons que De Gua a prétendu démontrer l'impossibilité du rebroussement de seconde espèce.

Dans son célèbre ouvrage *A treatise of fluxions* (Edinburg, 1742), Mac Laurin, dans le but d'établir sur des bases solides le calcul infinitésimal, donne une exposition détaillée de la méthode de Newton, avec des applications aux plus beaux problèmes de la géométrie et de la mécaniqne. Parmi les premiers,

---

(¹) Nous avons donné (*J. S.*, 1894), un assez grand nombre de résultats de ce genre en appliquant l'analyse de Diophante,

(²) Retrouvé par Mac Laurin et généralisé par Hesse, qui en a déduit une belle théorie algébraico-géométrique des inflexions des cubiques.

(³) Descartes avait introduit implicitement et incidemment les imaginaires dans la géométrie, mais il s'agissait seulement des valeurs des variables. Newton avait fait la même chose explicitement et d'une manière beaucoup plus méthodique. De Gua ensuite plus systématiquement et en étendant aux quantités données ou paramètres.

on peut citer: la construction des tangentes aux courbes définies comme dans la *Geom. organica;* à celles déterminées par l'intersection de deux droites tournant autour de deux pôles fixes ([1]); au lieu du point M tel que la parallèle MK à une direction donnée coupe une courbe donnée en un point K tel que MK soit égale au vecteur OK; au lieu du point M du vecteur OMK d'une courbe fixe et tel que, O' étant un pôle fixe, O'K=OK; au lieu de l'intersection M du vecteur OMK d'une courbe donnée et d'un côté d'un angle constant MO'K dont le sommet est fixe et l'autre côté passe par le point K de la courbe donnée; — le rayon de courbure d'une conique définie par cinq points, d'une courbe définie par des coordonnées bipolaires, d'une podaire, d'une sectrice, de la spirale sinusoïde; — la considération de la trisectrice qui porte son nom, avec sa quadrature obtenue géométriquement, et cette remarque que cette courbe est une affine du folium, d'où la quadrature géométrique de ce dernier et la construction de sa tangente; — cette définition de la lemniscate qui permet d'en obtenir aisément la quadrature géométrique, ainsi que la différentielle de l'arc: *lieu du point* M *tel que*, *sur la sécante circulaire* OKL, *on ait toujours* OM = KL, *le cercle étant vu du pôle* O *sous un angle droit;* — enfin les cinq propositions suivantes, dont les trois premières étaient déjà exposées dans la *Géom. organica* mais d'une manière très embrouillée:

La podaire d'une spirale hyperbolique est une spirale tractrice.

Celle d'une spirale sinusoïde est une autre spirale sinusoïde, et leurs vecteurs correspondants ont même vitesse angulaire.

Un arc de spirale sinusoïde d'indice n *est égal à* n + 1 *fois la somme de l'arc correspondant de sa seconde podaire et de la seconde tangente.*

La corde déterminée par un vecteur de la spirale sinusoïde sur le cercle de courbure correspondant est proportionnelle à ce même vecteur ([2]).

Si du point A *d'une cubique on lui mène deux tangentes* AS, AC; *que d'un autre point* P *de cette courbe on tire les droites* PC, PS, *qui la coupent en* M *et* N: CN *et* SM *se coupent sur la courbe.*

Il convient de signaler du même ouvrage deux démonstrations de la règle de différenciation de x^n, l'une géométrique et l'autre algébrique. La première utilise seulement la théorie des

([1]) Ce sont les *sectrices* de M. Schoute.

([2]) On trouvera, dans les *Nouv. Ann.* de 1876, une monographie de ces intéressantes courbes, par Mr. H. de la Goupillière.

triangles semblables, mais elle est extrêmemente prolixe; elle consiste à faire voir que *étant donnés un point fixe* S *sur* SO *et un point mobile* A *sur la perpendiculaire à* SA *et coupant* OS *en* B, *puis* BC *perpendiculaire à* AB *et coupant* OA *en* C,... *Si* OA *flue uniformément, les fluxions des longueurs* OA, OB, OC,... *formeront une progression arithmétique* (¹).

La deuxième démonstration est fondée sur la relation

$$n(x+h)^{n-1} > \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} > nx^{n-1}$$

résultant immédiatement de la formule donnant la sommation d'une progression géométrique, relation que SLUZE paraît avoir utilisée dans le même but, ainsi que plus tard CAUCHY, en l'étendant au cas de n quelconque (*Ex. d'anal. et de phys.*, t. IV, 1847).

La même année, CLAIRAUT (*A. S.*, 1742), dans un mémoire lu deux ans auparavant, examine les courbes tracées par un stylet fixe sur le plan d'une circonférence roulant sur une droite ou sur une autre circonférence. Il trouve que la première est une généralisation de la spirale d'ARCHIMÈDE; la seconde, comme l'a montré CHASLES, est une épicycloïde.

C'est également en 1742 que fut publié l'*Opera omnia* de JEAN BERNOULLI où, en outre de ses travaux déjà divulgués par les journaux scientifiques, se trouvent quantités de pièces inédites, dont il y a lieu de citer: son excellent *De methodo integralium*, écrit à l'usage de l'HOSPITAL; divers théorèmes concernant la rectification des courbes; la propriété de la quadratrice de pouvoir se quarrer au moyen des logarithmes; une certaine question de cinématique conduisant à la courbe $\rho = Ch\theta$, dont la spirale de POINSOT est l'inverse; enfin cette belle propriété de la cycloïde d'être la limite vers laquelle tendent les développées successives et alternées d'un arc de courbe quelconque limité à deux points dont les tangentes sont perpendiculaires entre elles (²).

De même, dans l'*Opera* de JACQUES BERNOULLI, publié en 1744,

---

(¹) La démonstration de MAC LAURIN revient à faire voir que $d(x^2) = 2xdx$ et à appliquer à l'identité $(x^2)^n = x^{n-1}x^{n+1}$, la formule $d(xy) = xdy + ydx$.

(²) Ce théorème a été démontré par EULER, puis par POISSON. On trouve, dans le t. IX des *Annales de Gergonne* une démonstration étendue au cas où les tangentes font un angle quelconque. On verra, dans les *Nouv. Ann.* de 1846, que le théorème de JEAN BERNOULLI a lieu également pour les orthoptiques d'une courbe quelconque.

on trouve de nombreux travaux posthumes. Nous signalerons le problème de *trouver la ligne dont la courbure est partout proportionnelle à l'arc* (1), c'est-à-dire la courbe définie par la relation $Rs = 1$, et qu'on appelle la *clothoïde*.

Comme on le voit par leur *Commercium epistolicum*, publié en 1745, LEIBNIZ et JEAN BERNOULLI ont en 1712 une longue controverse au sujet des logarithmes des quantités négatives; ce qui a amené LEIBNIZ à conclure que la logarithmique n'a qu'une branche, au contraire de BERNOULLI, qui prétendait qu'elle en a deux. Les arguments de part et d'autre étaient tirés de la propriété de cette courbe de représenter l'aire de l'hyperbole et des identités $\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$, $\log(-a)^2 = \log(a^2)$. EULER a trouvé la solution de cette difficulté en inventant les logarithmes imaginaires et montrant, comme on le verra plus loin, que la logarithmique a une seconde branche *pointillée*.

C'est d'ALEMBERT (*Mém. de Berlin*, 1746), qui a le premier mis hors de doute la possibilité de l'existence du rebroussement de seconde espèce, en traitant l'exemple $y = x^2 + \sqrt{x^5}$.

Dans le t. II de son *Introductio in analysin infinitorum* (Lausanne, 1748), EULER a exposé magistralement la théorie génerale des courbes. Entre autres choses, il traite complètement des changements d'axes de coordonnées, des asymptotes, des points singuliers; — propose un nouveau classement des cubiques et des quartiques, qu'il répartit respectivement en seize et cent quatre — vingt-seize genres; — examine plusieurs difficultés que présente l'étude des courbes transcendantes : la courbe *interscendante* (2) $y = x^{\sqrt{2}}$ est indéfinissable pour $x = -1$; la logarithmique a au-dessous de l'axe des x, une infinité de points discontinus (innumerabilia puncta discreta) (3); la courbe $y = (-1)^x$ a

---

(1) C'est le premier exemple de l'emploi des *coordonnées intrinsèques* du regretté CESARO.

(2) Ce mot a été crée par LEIBNIZ.

(3) Comme contribution à l'histoire des courbes discontinues, nous citerons la courbe de KRAMP $y = a^{\sin x}$ (*A. G.*, 1812-1813), discontinue pour $x = 0$; les études de VINCENT (id. 1824-25) sur les branches *pointillées* ou *ponctuées* des courbes $y = a^x$, $y = (-x)^x$, $y = \mathrm{Ch}x$, $y^x = a$, $y = x^x$, $y^x = x$, $y \log x = x$, $\rho = a^\theta$.

Nous permettra-t-on de rappeler que nous avons signalé (*J. S.*, 1893) la courbe bien connue définie ci-dessous, laquelle, bien qu'évidemment discontinue, peut être rectifiée par les moyens les plus élémentaires. Sur le milieu de l'hypoténuse BC du triangle rectangle ABC, on construit en dehors du triangle, une perpendiculaire A'C' égale au quart de AC; puis

une branche semblable de part et d'autre de l'axe; la courbe $y=x^x$ s'arrête brusquement (subito cessare); la courbe $x^y=y^x$ s'étudie au moyen d'une variable auxiliaire t déterminée par la relation $y=tx$, artifice bien des fois employé depuis (1). EULER termine en abordant la géométrie analytique à trois dimensions, les transformation des coordonnées et l'étude des quadriques et de leurs intersections.

On trouve dans les *Instituzioni analitiche* (Milan, 1748), de la savante AGNESI, ouvrage qui longtemps resta classique, l'étude de plusieurs courbes, la strophoïde, la *versiera* ou la cubique qui port son nom, la courbe $x^4-yx^2+by^3=0$ (point triple à l'origine), la courbe $x^x=y$ (point d'arrêt), la courbe $x^2=(\log y)^3$, (id.). C'est là qu'on put voir pour la première fois les éléments du calcul intégral (2).

Nous avons à parler à présent de célèbre *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus* de MAC LAURIN, publié en *Appendix* de son *A Treatise of Algebra* (Londres, 1748) et où on voit avec raison le premier traité de géométrie moderne. Après avoir rappelé les deux théorèmes généraux donnés par NEWTON dans son *Enumeratio*, il démontre les suivants:

Par un pôle O *passe une transversale mobile coupant une courbe du degré* n *en* n *points par lesquels on mène des tangentes rencontrant en* A, B, C, ... *la droite fixe* OM. *La somme* $\frac{1}{OA}\pm\frac{1}{OB}\pm\ldots$ *est constante* (3). Ce beau théorème lui permet de construire les asymptotes, et, en plaçant le pôle sur la courbe, la construction

sur les milieux de BC′ et de CC′ les perpendiculaires A″C″, A″C″ égales chacune au quart de A′C′; et ainsi de suite. Les points B, . ., C″, C′, C″,... C dessinent la courbe en question.

(1) On voit, dans les œuvres des BERNOULLI, plusieurs courbes définies de cette façon au moyen de deux équations entre trois variables.

(2) L'*Analyse démontrée* du P. REYNEAU, publiée quarante ans auparavant était le seul ouvrage où ces éléments pouvaient être étudiés, et on conçoit ce que pouvait être un traité sur une matière aussi étendue, à une époque où la science était à peine fondée. Nous ne disons rien de plusieurs traités sur les fluxions, qui n'avaient aucune valeur; ni du traité de JEAN BERNOULLI, qui n'était, à vrai dire qu'un recueil, — excellent à la vérité — des problèmes agités à l'époque où il a été écrit, époque où les méthodes du calcul intégral, et encore moins celles des équations différentielles, n'avaient pas encore été étudiées d'une manière générale. Quant aux traités de NEWTON et de MAC LAURIN, ils n'étaient rien moins que des traités élémentaires et de vulgarisation.

(3) On prend le signe + pour les segments situés d'un côté du point O et le signe — pour les autres.

du cercle de courbure et celle de la différentielle de la courbure (1).

Si par le pôle O *passe une transversale coupant en* n *points une courbe du degré* n *et qu'on prenne sur cette droite le point* M *tel que* $\frac{1}{OM} = \frac{1}{OA} \pm \frac{1}{OB} \pm \ldots$, *le lieu de* M *est une droite.* Mac Laurin attribue ce nom moins beau théorème à Cotes.

Il applique ces théorèmes aux coniques et aux cubiques, ce qui lui donne, entre autres propositions très intéressantes, les suivantes, prises parmi les plus simples:

Las tangentes à une cubique en trois points en ligne droite coupent la courbe en trois points également en ligne droite.

Du point A *d'une cubique, on lui mène deux tangentes* AF, AG; *la droite qui joint les points de contact rencontre la courbe en* B; *les tangentes en* A *et en* B *se coupent sur la courbe. Si le point* A *est un point d'inflexion, la droite* AB *est tangente en* A.

Du point A *d'une cubique menons trois tangentes, en* F, G, H; FG *coupe la courbe en* B *et* BH *en* C: *la droite* AC *est tangente en* C.

Si d'un point d'inflexion A *d'une cubique, on lui même trois tangentes* AF, AG, AH, *la droite des contracts* FGH *coupe harmoniquement toute droite joignant* A *à un autre point quelconque de la courbe* (2). De là le théorème de De Gua mentionné plus haut. *Si en outre on mène les transversales quelconques* ABC, ADE, *les droites* BD, CE *se coupent sur la droite* FGH.

Si par le point A *d'une cubique on lui mène quatre tangentes, les cordes de contact se couperont sur la courbe et toute transversale passant par* A *sera divisée harmoniquement par la courbe et deux des cordes de contact.*

Du point A *d'une cubique menons-lui deux tangentes et joignons les points de contact* B, C, *à un autre point* D *de la courbe. Les tangentes aux points où la courbe est coupée par les droites* BD, BC *se coupent sur la courbe* (3).

(1) Ces constructions, qui paraissent de prime abord nécessiter l'emploi du calcul, présentent un haut intérêt, bien qu'on en ait trouvé depuis d'autres analogues et plus simples. Voir par exemple, Chasles, l. cit., pag. 846.

(2) Chasles (l. cit, pag. 349) tire de là la démonstration de ce théorème, que *toute cubique peut être considérée comme la perspective d'une des cinq paraboles divergentes* (Newton) *ou d'une des cinq cubiques à centre* (Chasles).

(3) A la suite de ses *Mélanges de Géométrie* (Paris, 1856), de Jonquières a donné la traduction et un commentaire de ce traité de Mac Laurin, sauf ce qui concerne les coniques. Nous pensons qu'une monographie didacticohistorique sur les cubiques serait une œuvre très intéressant et très utile.

Maintenant nous avons à mentionner l'examen par Euler (*Mém. de Berlin*, 1749) d'une difficulté qu'on peut exposer ainsi: *il faut au plus neuf points pour déterminer une cubique*, or *deux cubiques ne peuvent se couper en plus de neuf points;* ce qui fait voir que si ces deux cubiques se coupent en effet en neuf points, les neuf équations linéaires déterminant les coefficients ne sont pas toutes distinctes, et réciproquement.

De Gua avait produit son travail sur l'étude des courbes algébriques sous la forme d'une longue dissertation qui eût été, avantageusement pour le lecteur, coupée en théorèmes ou au moins en chapitres nettement définis, et accompagnés d'exercices. Cramer a réalisé cette amélioration en précisant, développant et complétant la conception de De Gua, dans son importante *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* Genève, 1750), encore souvent consultée aujourd'hui, à cause surtout des très nombreux et très intéressants exemples de courbes qu'il y traite. Signalons parmi ceux-ci, le huit, la strophoïde, la rosace à quatre branches, la lemniscate et la besace, courbes déjà connues; — celle appelée depuis *courbe du diable;* — plusieurs courbes définies géométriquement, telles que celles dont les ordonnées sont les moyennes arithmétiques de deux cercles (courbe fermée, deux inflexions et point double de contact), ou d'un cercle et d'une parabole qui lui est tangente (courbe fermée, point double et point double de contact), ou des deux paraboles $y=x^3$, $y^2=x$ (deux branches infinies, point double et point double de contact; — celles dont les ordonnées sont moyennes proportionnelles des coordonnées du cercle (forme de bifolium), ou de la parabole $y^2=x+a$ (deux branches infinies se coupant en un point triple), ou du cercle $x^2+y^2-2\sqrt{2}(x-y)=1$ (forme de trifolium), ou encore de la parabole $(y+1)^2=x+1$ (branche infinie avec point triple); — enfin les suivantes:

$y^4-x^4+2x^2y=0$, en forme de coupe;
$y^5+x^4-kxy^2=0$, imitant la lettre R;
$x=y^2-y^4$, imitant la lettre Σ;
$(1-x^2)^2=y^2(y^2-2a^2)$, deux cœurs qui se coupent;
$x^2(x-\sqrt{2})^2=y^2(y+1)$, branche infinie avec deux points doubles et deux inflexions;
$(x^2-1)^2=y^2(2y+3)$, branche infinie avec trois points doubbles;
$y^2(y^2-2x)=x^2(3-x^2)$, cœur accolé à un ovale;
$y^4-2y^3=x^4$, forme de trèfle;

$y^2(8+4y-y^2) = 4(x^2-\sqrt{2})^2$, courbe fermée, deux points doubles, quatre inflexions;
$(y^2-2)^2 = x^3(1-x)$, forme analogue.

Quant aux perfectionnements que Cramer a apportés dans l'application de l'algèbre à la géométrie, il serait difficile de les relater sans une analyse complète de son volumineux ouvrage [1]; nous nous contenterons de rappeler ses découvertes beaucoup plus importantes de la théorie des *dérangements*, des *déterminants*, de la solution des équations linéaires déterminées, et ses travaux sur l'*élimination*.

Nous arrêtons là notre étude, car la suite se rapporte à une nouvelle période dans laquelle la coordination et le rapprochement des découvertes antérieures ont produit une moisson de théories, de méthodes et d'applications, trop riche et trop variée pour qu'on puisse en donner une unique description chronologique, telle que celle qui précède. D'un côté la géométrie se dégage entièrement de ses origines empiriques pour se subjectiver de plus en plus, et d'un autre côté, elle s'assouplit de toutes les manières pour une foule d'utilisations analytiques ou physiques, qui en retour lui offrent de nouveaux motifs de recherches et suggèrent de nouvelles considérations et de nouvelles méthodes. La géométrie a acquis ainsi une étendue que les savants des siècles précédents n'eussent pu soupçonner. D'ailleurs, insuffisamment préparé à retracer ce prodigieux labeur, nous craindrions d'en donner une idée par trop fausse, en publiant les quelques pages que nous avions écrites sur ce sujet [2]. Et même notre conclusion sera de solliciter toute l'indulgence du lecteur: chétif pionnier perdu dans l'immense

---

[1] D'ailleurs aucun de ces perfectionnements ne lui a survécu, et c'est peut-être à tort; car quand on voit la facilité avec laquelle il découvre les exemples qui doivent illustrer ses préceptes, on ne peut s'empêcher de se demander s'il n'y aurait pas lieu de réédifier cette méthode en la combinant avec le calcul différentiel et les diverses méthodes modernes, qui sont loin de satisfaire à tous les cas.

Nous croyons d'ailleurs qu'on s'attarde généralement trop à la géométrie analytique, qui doit être un moyen et non un but. La géométrie infinitésimale dont il n'existe encore aucun manuel, est autrement importante, surtout comme préparation à l'étude de la mécanique et de la physique.

[2] On peut prendre une idée suffisante des immenses progrès de la géométrie dans le XIXe siècle, en lisant l'important rapport lu par M. Darboux en 1904 au Congrès de St. Louis.

Voir aussi l'esquisse historique de Hankel (*B. D.*, 1885), le *Rapport* de Chasles (Paris, 1868), et pour les détails l'*Encycl. des sc. math.* en cours de publication.

Domaine, nous avons eu l'audace de vouloir retrouver les traces laissées par les Ancètres dans le grand défrichement et de raconter leurs hauts faits scientifiques. Le contact de ces grands hommes nous a d'autant plus fait sentir notre insuffisance pour un tel travail; aussi nous sommes-nous borné à une sèche chronologie des faits, autant dire sans commentaires ni généraux ni particuliers: nous nous sommes même à peu près interdit le procédé commode des citations. Cependant, quelque imparfait qu'il soit, peut-être notre travail contribuera-t-il quelque peu à éveiller le gout des études historiques et le désir de connaître ces fondateurs de la science, dont les tatonnements et les erreurs même commandent l'attention de ceux qui voient dans l'étude autre chose que le banal désir de collectionneur d'agrandir le cercle de leurs connaissances: le vrai but de la science n'est-il pas l'elargissement de l'esprit humain? et l'histoire de ses progrès n'est-il pas le moyen le plus puissant de l'obtenir?

QUELQUES REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UNE CHAINE PARFAITEMENT FLEXIBLE

PAR

PAUL APPELL
Membre de l'Institut de France

(Suite)

Pour terminer cette étude, nous indiquerons une forme, particulièrement simple, sous laquelle on peut mettre les équations du mouvement d'un fil homogène, dans un plan fixe, sous l'action de forces *dépendant uniquement du temps*.

Prenons, comme unité de masse, la masse de l'unité de longueur du fil, appelons x et y les coordonnées rectangulaires d'un élément ds, T la tension de cet élément, Xds, Yds les projections de la force appliquée à l'élément: nous supposons que X et Y sont des fonctions de t seul.

Les équations du mouvement sont alors

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y \\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 &+ \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \end{aligned} \right.$$

x, y, T étant fonctions des deux variables indépendantes s et t.

Différentions les deux premières équations par rapport à s:

$$\frac{d^3x}{dsdt^2}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dsdt^2}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right).$$

Soit i l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$; multiplions la seconde équation par $\pm i$, ajoutons la à la première et posons

$$\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}=z$$

$$\frac{dx}{ds}-i\frac{dy}{ds}=z_1,$$

nous aurons:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d^2}{ds^2}(\mathrm{T}z)\\ &\frac{d^2z_1}{dt^2}=\frac{d^2}{ds^2}(\mathrm{T}z_1)\\ &zz_1=1. \end{aligned}\right.$$

La dernière équation montre qu'on peut poser

$$(3)\qquad z=e^{i\varphi},\quad z_1=e^{-i\varphi},$$

φ étant une fonction de s et t, représentant l'angle de l'élément ds avec Ox; les deux premières équations (2) deviennent alors, en développant

$$i\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{d^2\mathrm{T}}{ds^2}+2i\frac{d\mathrm{T}}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+\mathrm{T}\left[i\frac{d^2\varphi}{ds^2}-\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right],$$

$$-i\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{d^2\mathrm{T}}{ds^2}-2i\frac{d\mathrm{T}}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+\mathrm{T}\left[-i\frac{d^2\varphi}{ds^2}-\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right].$$

D'où enfin, par addition et soustraction

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=-\frac{d^2\mathrm{T}}{ds^2}+\mathrm{T}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\\ &\frac{d^2\varphi}{dt^2}=2\frac{d\mathrm{T}}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+\mathrm{T}\frac{d^2\varphi}{ds^2}. \end{aligned}\right.$$

On a ainsi deux équations qui, jointes aux conditions initiales et aux conditions aux limites, déterminent T et φ en fonction de s et t.

En différentiant la première équation (3), par rapport à s, et la deuxième deux fois successivement, par rapport à s, on obtient 5 équations linéaires en T, $\frac{dT}{ds}$, $\frac{d^2T}{ds^2}$, $\frac{d^3T}{ds^3}$. L'élimination de ces quatre quantités donnera, pour φ, une équation du quatrième ordre, qu'il serait intéressant d'étudier.

Les équations (3) fourniront immédiatement les mouvements du fil dans lesquels T est *constant:* nous n'insisterons pas sur ce problème qui est une généralisation du problème des cordes vibrantes.

PRÓDROMO DA FLORA PORTUGUEZA

POR

GONÇALO SAMPAIO

(Continuação)

67. HELIÁNTHEMUM, Tour.

196. **H. umbellátum** (Lin.) Mill.; Cistus umbellatus, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 263; Halimium umbellatum, Spach. — Norte e centro.

 raç. **verticillátum** (Brot.); Cistus verticillatus, Brot. in Fl. lusit. II, 262, non Willk. in Prod. Fl. Hisp. nec. J. Daveau in Bol. Soc. Brot. — Da Extremadura ao Alto Alemtejo.

197. **H. libanótis** (Lin.) Willd.; Cistus libanotis, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 261; Halimium libanotis, Lge. — Desde Ovar ao Algarve, no littoral.

198. **H. ocymoides** (Lamk.) Pers.; Cistus ocymoides, Lamk., Brot. in Fl. lusit. II, 263; Halimium ocymoides, Willk. et Lge. — Do Douro ao Algarve.

 var. *algarvénse* (Dun.); Helianthumum algarvense, Dunal. — Da Louzã ao Algarve.

199. **H. lasiánthum** (Lamk.) Pers.; Cistus lasianthus, Lamk.; Brot. in Fl. lusit. II, 264; Halimium eriocephalum, Willk. — Alemtejo littoral.

raç. **formósum** (Curt.); Cistus formusus, Curt.; Halimium formosum, Willk.; J. Daveau in Bol. Soc. Brot. IV, 50. — Serra de Monchique.

200. **H. occidentále** (Amo) Samp.; Cistus occidentalis, Amo; Halimium occidentale, Willk. — Norte e centro.

var. *alyssoides* (Lamk.); Cistus alyssoides, Lamk.; Cistus scabrosus, Ait. — Norte.
for. *rugósum* (Dun.); Helianthum rugosum, Dun.

var. *cheirantoides* (Lamk.); Cistus cheirantoides, Lamk. — Norte e centro.

201. **H. halimifólium** (Lin.) Willd.; Cistus halimifolius, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 362; Halimium halimifolium, Willk. et Lge. — De Aveiro ao Algarve.

raç. **involucrátum** (Lamk.); C. involucratus, Lamk., Brot. loc. cit. II, 265; Helianthemum multiflorum, Salz.; Halimium multiflorum, Willk. — Centro e sul.
raç. **lasiocalycinum** (Bois. et Reut.); Helianthemum lasiocalycinum, Bois. et Reut. — Portugal, ex herb. Schousboe, teste Lange. (n. v.).

202. **H. tuberária** (Lin.) Mill.; Cistus tuberaria, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 268. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Alcar*.

for. *alpestris* (Willk.) — Norte a sul.

203. **H. globulariaefólium** (Lamk.) Pers.; Cistus globulariæfolius, Lamk., Brot. in Fl. lusit. II, 267. — Quasi todo o paiz.

for. *minor* (Willk.) — Norte e centro.
for. *major* (Willk.) — Sul.

204. **H. guttátum** (Lin.) Mill.; Cistus guttatus, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 268; Tuberaria variabilis, Willk., Helianthum variabile, Amo. — Todo o paiz.

for. *plantaginea* (Willd.); Cistus plantagineus, Willd. — Norte a sul.
for. *minor* (Lamk.); Cistus guttatus, var. minor, Lamk. — Centro e sul.

var. *macrosépalum* (Dun.); Helianth. macrosepalum, Dunal; Tuberaria macrosepala, Willk., J. Dav. in Bol. Soc. Brot. IV, 60. — Beira meridional.
var. *bupleurifólium* (Lamk.); Cistus bupleurifolius, Lamk.; Tuberaria bupleurifolia, Willk. in Icon. tab. 115. — Da Beira ao Algarve.
var. *inconspicuum* (Thib.); Helianthemum inconspicuum, Thibaut; Tuberaria inconspicua, Willk., J. Dav. in Bol. Soc. Brot. IV, 59. — Desde a Beira ao Alemtejo.

205. **H. ledifólium** (Lin.) Willd.; Cistus ledifolius, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 271. — De Bragança ao Algarve.

raç. **villósum** (Thib.); Helianthemum villosum, Thibaut. — Algarve, em Faro (n. v.).

206. **H. salicifólium** (Lin.) Pers.; Cistus salicifolius, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 272. — Extremadura, ex Brotero (n. v.).

raç. **intermédium** (Thib.); Helianthemum intermedium, Thibaut. — Centro e sul.

207. **H. aegiptiacum** (Lin.) Mill.; Cistus aegyptiacus, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 272. — De Bragança ao Algarve.

208. **H. polifólium** (Lin.) DC.; Cistus polifolius, Lin.; Helianthemum pulverulentum, Willk. in Icon., 103, tab. 137-138. — Norte e centro.

var. *velutinum* (Jord.); Helianth. velutinum, Jord. — Centro.
var. *appeninus* (Lin.); Cistus appeninus, Lin. — Beira.

raç. **pilósum** (Lin.); Cistus pilosus, Lin.; Helianthemum pilosum, Pers. — Centro.
var. *tomentellum,* Willk. — Centro.

209. **H. vulgáre**, Gaert.; Cistus helianthemum, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 269. — Norte.

raç. **serpyllifólium** (Lin.) Mill.; Cistus serpyllifolius, Lin. — Norte.

210. **H. gláucum** (Cav.) Pers., Willk. in Prod. Fl. Hisp. III, 731; Cistus glaucus, Cav. — Sul do paiz.

var. *stoechadifolium* (Brot.); Cistus stoechadifolius, Brot. in Fl. lusit. II, 270, non Jacq. — Alemtejo ao Algarve.

211. **H. hírtum** (Lin.) Pers., Willk. in Icon. 122, tab. 147; Cistus hirtus, Lin. — Norte a sul (raro) n. v.

var. *baeticum*, Dun. — Alemtejo.

212. **H. lavandulaefólium** (Lamk.) DC., Willk. et Lge. in Prod. Fl. Hisp. III. 736. — Centro? n. v.

213. **H. paniculatum**, Dunal, Willk. et Lge. in Prod. Fl. Hisp. III, 738. — Centro? n. v.

214. **H. marifólium** (Lin.) DC.; Cistus marifolius, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 266. — Sul do paiz.

215. **H. origanifólium** (Lamk.) Pers.; Cistus origanifolius, Lamk., Brot. in Fl. lusit. II, 266. — Algarve.

216. **H. thymifólium** (Lin.) Pers.; Cistus thymifolius, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 269; Fumana glutinosa, Bois. — Centro e sul.

var. *Barreliérii* (Ten.); Helianthemum Barrelierii, Ten. — Centro.

var. *juniperína* (Lag.); Helianth. juniperinum, Lag. — Centro e sul.

217. **H. laevipes** (Lin.) Willd.; Cistus laevipus, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 267; Fumana laevipes, Spach. — Alemtejo e Algarve.

218. **H. procúmbens**, Dunal; Fumana procumbens, G. Godr., J. Dav. in Bol. Soc. Brot. IV, 69; Cistus fumana, Lin. p. p. — Centro.

219. **H. ericoides** (Cav.) Dun.; Cistus fumana, Lin. p. p., Brot. in Fl. lusit. II, 267; Fumana Spachii, G. Godr.— Coimbra.

Entre as especies deste genero produzem-se hybridos diversos, estando conhecidas no paiz algumas formas dos seguintes: **H. occidentale × ocymoides, H. halimifolium × ocymoides, H. hirtum × polifolium.**

Fam. X — VIOLACEAE, Juss.

68. VÍOLA, Tour.

220. **V. trícolor,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 306, p. p.; Mach. in Cat. met., 28. — Todo o paiz. Vulg. *Amor perfeito*, *Flor seraphica*, *Erva da trindade*.

raç. **horténsis,** DC.; P. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 38. — Muito cultivado como planta ornamental, em todo o paiz.

raç. **arvénsis** (Murr.); V. arvensis, Brot. in Fl. lusit. I, 306, p. p. — Quasi todo o paiz, nos campos.

var. *Machadeána*, P. Cout.; V. tricolor β. Machadeana, P. Cout.

var. *lusitánica*, Samp. in herb. Acad. Polyt. do Porto.

var. *triméstris*, DC.; V. tricolor v. trimestris, DC., Mach. loc. cit. 28.

var. *rurális* (Jord.); V. ruralis, Jord. ap. Bor.

var. *Henriquesi*, Willk.; V. tricolor, δ. Henriquesi, Wk. ap. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 36.

raç. **Albuquerqueána,** Samp. in herb. Acad. Polyt. Porto. — Villa do Conde, nos areaes maritimos.

221. **V. caespitósa,** Lgc., J. Henriq. in Exp. scient. 117; Viola tricolor var. flore omnino luteo Herminii, Brot. in Fl. lusit. I, 306; V. lutea, Welw., Mach. in Cat. met. 28, non Huds. — Serra da Estrella, na parte alta.

for. *condensata*, Henriq. in Exp. scient., 117.
for. *láxa*, Henriq. in Exp. scient. 117.

222. **V. odoráta,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 305. — Cultivada nos jardins e espontanea no centro e sul. Vulg. *Violeta de cheiro*.

223. **V. álba,** Bess. — Cultivada e subespontanea em algumas localidades. Vulg. *Violeta branca*.

raç. **scotophylla** (Jord.); V. collina, Samp. in An. Sc. Nat. VI, 68, non Bess. — Margens do rio Douro.

224. **V. palústris,** Lin., J. Henriq. in Exp. scient. 116.

raç. **Juressi,** Link. in Neus Jour. Bot. III, 140 (an. 1805); V. hirta, Brot. in Fl. lusit. I, 305 non Lin.; V. uliginosa, Welw. non Schred., Mach. loc. cit. 27; V. epipsila, Ledb. in Ind. Dorp.; V. palustris β. epipsila, P. Cout. in Bol. Soc. Brot. X, 27.—Desde o Minho á Serra da Estrella.

225. **V. silvática,** Fries., J. Henriq. in Exp. scient. 116; V. silvestris, Lamk. p. p. Kock. Mach. in Cat. met. 27; V. canina, Brot. in Fl. lusit. I, 305, non Lin.?—Todo o paiz. Vulg. *Violeta brava*, *Benesse*.

raç. **Reichenbachiana** (Jord.); V. silvatica β. micrantha, Döll., P. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 30. —Desde o Minho á Beira.

for. *pygmaea* (Lge.); V. silvatica, μ pigmaea, Lge.

raç. **Riviniána** (Reich.); V. silvatica β. macrantha, Wallr., P. Cout. in loc. cit. 30.—Desde o Minho ao Algarve.

var. *rostráta*, Cout.; V. silvatica μ rostrata, Cout. in loc. cit.

226. **V. canína,** Lin. (?) Auct., J. Henriq. in Exp. scient. 117.—Desde as Beiras ao Algarve.

var. *lucórum*, Reich.; V. canina β. montana, J. Henriq. in loc. cit.; V. canina β. montana + μ lucorum. P. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 32.—Com o typo.

raç. **lusitánica** (Brot.); Viola lusitanica, Brot. in Phyt. lusit. fasc. 1.º (ediç. an. 1800), pag. 22; Phyt. lusit. (ediç. an. 1816) pag. 39, tab. 17; Fl. lusit. I, pag. 306; Viola lactea, Sm. (an. 1800); Viola lancifolia, Thore (an. 1803), Mach. in Cat. met. 27.—Do Minho ao Algarve.

var. *májor*, Rouy et Fouc.

var. *pumiliſórmis*, Rouy et Fouc.

raç. **elátior** (Clus.); V. montána, Lin. p. p.; Viola Ruppii, Brot.! (?) in Fl. lusit. I, 305; Viola canina, β. montana, Horn., P. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 32.—Beiras.

227. **V. arboréscens,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 306. var. *serratifólia,* DC. — Cabo de S. Vicente.

Não é raro, em mistura com os productores, o hybrido **V. lusitanica × silvatica** (V. *sabuletorum*, Rouy et Fouc.), geralmente infecundo.

Fam. XI — POLYGALACEAE, Lindley

69. POLYGALA, Tour.

228. **P. microphylla,** Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 30; Phyt. lusit. II, 214, tab. 175; Hoff. et Link. in Fl. port. I, 280, tab. 56; Brachytropis microphylla, Willk. — Do Minho ao Alemtejo (terrenos piçarrosos).

229. **P. vulgáris,** Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 29; P. vulgaris et P. rosea, Mach. in Cat. met.; J. Henriq. in Exp. scient. 109. — Todo o paiz. Vulg. *Poligala*, *Erva leiteira.*

var. *lusitánica*, P. Cout. in Bol. Soc. Brot. X, 71. — Norte e centro.

var. *oxyptéra* (Reich.), P. Cout. in loc. cit. — Todo o paiz.

rac. **serpylliácea** (Weihe); Polygala depressa, Wend., J. Henriq. in Exp. scient. 109. — De norte a sul do paiz (n. v.).

230. **P. monspelíaca,** Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 29, et in Phyt. lusit. II, 216, tab. 176. — Da Bairrada ao Algarve.

Fam. XII — FRANKENIACEAE, St. Hill.

70. FRANKENIA, Lin.

231. **F. pulverulénta,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 556. — Desde o Douro ao Algarve (terrenos salgados e humidos).

232. **F. laevis**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 556; F. hirsuta α. laevis, Bois, in Fl. ori. I, 780. — Littoral, desde o Minho ao Algarve.

var. *intermédia* (DC.); F. hirsuta β. intermedia, Bois., P. Cout. in Bol. Soc. Brot. x, 23. — Centro (n. v.).

233. **F. Boissiéri**, Reut., Mach. in Cat. met. 29. — Littoral do Algarve (n. v.).

Fam. XIII — DIANTHACEAE, Lindley

71. CUCÚBALUS, Tour.

234. **C. baccífer**, Lin., Mach. in Cat. met. 36; Silene baccifera, Brot. in Fl. lusit. II, 183. — Norte e centro.

72. SILÉNE, Lin.

235. **S. venósa** (Gilib.) Asch.; Concubalus venosus, Gilib.; C. Behen, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 180; Silene inflata, Sm. — Todo o paiz. Vulg. *Erva traqueira.*

raç. **marítima** (Horn.); Viscago maritima, Horn.; Cucubalus maritimus, Lamk., Brot. in Fl. lusit. II, 180; Silene maritima, With. — Norte e centro (Beira mar).

236. **S. cónica**, Lin.; Silene conoidea, Samp. in An. Sc. Nat. VI, 69, non Lin. — Margens do rio Douro (rara).

237. **S. itálica** (Lin.) Pers.; Rohrbach in Mon. der Gatt. Sil., 219; Cucubalus italicus, Lin. — Do Douro á Extremadura.

raç. **nemorális** (W. et K.); Silene nemoralis Waldst. Kitaib. — Margens do rio Douro (Gaia, etc.).

238. **S. nútans**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 193. — Norte e centro do paiz (n v.).

raç. **longicília** (Brot.); Cucubalus longicilius, Brot. in Fl. lusit. II, 180; Silene longicilia, Oth. — Norte a sul do paiz.

raç. **mellífera** (Bois. et Reut.); Silene melifera, Bois. et Reut., Mach. in Cat. met., 35. — Serra de Monchique (n. v.).

239. **S. muscípula,** Lin.; Mach. in Cat. met. 35; Silene stricta, Brot. in Fl. lusit. II, 187 non Lin. apud Nym. — Centro e sul (n. v.).

240. **S. crética,** Lin.; Rohrbach in Mon. der Gatt. Silen. 167. — Centro (de Coimbra a Buarcos) (n. v.).

241. **S. inapérta,** Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 188. — Desde o Douro ao Alemtejo.

242. **S. porténsis,** Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 192. — Quasi todo o paiz.

243. **S. rubélla,** Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 188. — Centro e sul do paiz.

244. **S. fuscáta,** Brot. in Fl. lusit. II, 187. — Centro do Paiz.

245. **S. nicaensis,** All., Brot. in Fl. lusit. II, 191. — Areaes maritimos, do Minho ao Algarve.

246. **S. ramosissíma,** Desf., Welw. in It. lusit. n.º 216. — Littoral do centro e sul do paiz.

247. **S. macrorhiza,** Gay; S. foetida, Link. (nom. antiq. sed error.); S. Herminii, Welw. — Serra da Estrella, nos Cantaros.

248. **S. acutifólia,** Link.; S. melandrioides, Lge.; S. melandrioidas β. acutifolia, Mariz in Bol. Soc. Brot. V, 109. — Norte, nas regiões montanhosas e elevadas, desde Castro Laboreiro á Serra da Estrella.

249. **S. Boryi,** Bois.; S. Ramburiana, Webb. in It. Hisp. 64.

var. *duriensis,* Samp. in An. Sc. Nat. VII, 112. — Margens do Douro (rara).

250. **S. ciliáta,** Pour., J. Henriq. in Exp. scient. 114. — Serra da Estrella.

for. *geniculáta* (Pour) — Com o typo.
for. *elégans* (Link.) — Com o typo.

251. **S. legionénsis,** Lag., Samp. in An. Sc. Nat. VIII, 115. — Bragança.

252. **S. apétala,** Willd., Rohrbach in Mon. der Gatt. Sil., 118. — Centro e sul do paiz.

253. **S. longicáulis,** Pour., Rohrbach in Mon. der Gatt. Sil., 117. — Centro e sul do paiz.

254. **S. coloráta,** Poir., Mariz in Bol. Soc. Brot. v, 106; S. bipartita, Desf. — Do norte a sul do paiz.

var. *decúmbens* (Biv.); Samp. in An. Sc. Nat. x, 18. — Sul, nos areaes maritimos.
var. *canéscens* (Ten.); Mariz in loc. cit. — Centro (Areaes do Sado).

raç. **distáchya** (Brot.); Silene distachya, Brot. in Fl. lusit. II, 189 et in Phy. lusit. I, 175, tab. 71 non Mariz in Bol. Soc. Brot. v, 105; Silene bipartita var. lasiocalyx, Soy Will. et Godr. — Centro e sul.

255. **S. dísticha,** Willd., Mariz in Bol. Soc. Brot. v, 106. — Desde a Figueira da Foz a Setubal.

256. **S. vespertína,** Retz., Mach. in Cat. met. 32, Mariz in Bol. Soc. Brot. v, 105, excl. syn. Broter. — Norte e centro (n. v.).

257. **S. psammitis,** Link., Rohrbach in Mon. der Gatt. Sil. 112; S. villosa, Welw. in It. lusit. n.º 501, non Torsk.

var. *lasiostyla* (Bois.); Silene lasiostyla, Bois. — De Traz dos Montes ao Alto Alemtejo.

258. **S. littórea,** Brot. in Fl. lusit. II, 186. Elisanthe littorea, Samp. in herb. Ac. Polyt.; Silene Cambessedesii, Bois. — Areaes maritimos, do Minho ao Algarve.

for. *elatior*, Willk. — Com o typo, em varias localidades.

259. **S. scabriflóra,** Brot. in Fl. lusit. II, 184 et in Phyt. lusit. I, 177, tab. 72, non Mariz in Bol. Soc. Brot. V, 107, nec Link, Rohrbach et Gürke; S. hirsuta, Lag. in Var. cienc. II, 212. — Terrenos arenosos de quasi todo o paiz.

var. *sabuletorum* (Link.) — Terrenos do littoral, de norte a sul.
var. *hirta*, Willk., Mariz in loc. cit. — Com o typo.

260. **S. laxiflóra,** Brot. in Fl. lusit. II, 188, non Mariz in Bol. Soc. Brot. V, 103 nec Gürke in Pl. europ. II, 294; Silene micropetala, Lag. in Gen. et sp. 15. — Desde o Douro ao Algarve.

261. **S. noctúrna,** Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 183. — Desde o Alto-Douro á Extremadura.

var. *brachypétala* (Rob.) — Da Extremadura ao Algarve.

262. **S. gállica,** Lin., Mach. in Cat. met. 32; Silene lusitanica Brot. in Fl. lusit. II, 184. — Quasi todo o paiz.

var. *lusitánica* (Lin.); Silene lusitanica, Lin. — Da Beira ao Algarve.
var. *quinquevulnera* (Lin.); Silene quinquevulnera, Lin. — Muitas localidades, sobretudo no littoral.

raç. **ánglica** (Lin.); Silene anglica, Lin. — Centro e sul, em varias localidades.

263. **S. praténsis** (Rafn.) Gren. et Godr.; Lychnis pratensis, Rafn.; Lychnis dioica, Lin. p. p., Brot. in Fl. lusit. II, 222; Lychnis vespertina, Sibth.; Melandryum pratense, Rochl. — Quasi todo o paiz.

raç. **divaricáta** (Reich.); Lychnis divaricata, Reich., Mach. in Cat. met. 36; Melandryum macrocarpum, Willk. — Desde Traz dos Montes ao Algarve.
var. *crassifolium* (Rouy et Fouc.); M. divaricatum. var. crassifolium, Rouy et Fouc. in Fl. Fr. III, 96. — Areaes maritimos do sul do paiz.

264. **S. Marizi,** Samp.; Melandryum viscosum, Mariz in Bol. Soc. Brot. V, 98 p. p. non Celak. + M. pratense

β. coloratum Mariz in loc. cit. 100; Melandryum glutinosum, Rouy in Bol. Soc. Bot. Fr. LXI, 325; Melandryum silvestre Mach. in Cat. met. 36. non Rochl.; Lychnis dioica var. floribus rubris Brot. in Fl. lusit. II, 222; Lychnis diclinis Samp. in An. Sc. Nat. V, 66 non Lag. — Norte e centro.

A **S. arméria** Lin., conhecida vulgarmente pelo nome de *Alfinetes*, é cultivada nos jardins e aparece, por vezes, no estado subespontaneo.

73. LYCHNIS, Tour.

265. **L. laéta**, Ait., Brot. in Phyt. lusit. I, 183, tab. 74; Lychnis palustris, Brot. in Phyt. lusit. fasc. 1.ª (ed. 1.ª) pag. 67 et in Fl. lusit. II, 221, Eudianthe laeta, Rchb. — Quasi todo o paiz, de norte a sul.

266. **L. flos-cucúli**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 221. — Desde Aveiro a Cintra.

267. **L. githágo**, Scop., Mach. in Cat. met. 37; Agrostema githago, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 220. — Quasi todo o paiz, nos trigaes. Vulg. *Nigella bastarda*.

São cultivados nos jardins e aparecem ás vezes subespontaneos o **L. coronária** (Lin.) Desr. vulgarmente chamado *Candellaria dos jardins*, *Beijos de freira* ou *Orelhas de lebre*, e o **L. coeli-rósa** (Lin.) Desr. Tambem se cultiva como ornamental o **L. chalcedónica**, Lin. conhecido pelo nome popular de *Crus de Jerusalem*.

74. GYPSÓPHILA, Lin.

268. **G. vaccária** (Lin.) Sibth. et Sm.; Saponaria vaccaria, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 175; Vaccaria vulgaris, Hort. — Desde o Douro ao Algarve.

75. SAPONÁRIA, Lin.

269. **S. officinalis**, Lin., Brot. in Fl. lusit. II, 175. — Todo o paiz. Vulg. *Saboeira legitima*, *Erva saboeira*.

76. VELÉZIA, Lin.

270. **V. rígida,** Lin., Brot. in Fl. lusit. I, 413. — Do Alto Douro e Traz dos Montes ao Algarve.

(Continúa.)

MOUVEMENT D'UNE PARTICULE ÉLECTRISÉE SOUMISE À L'ACTION D'UN POINT ÉLECTRIQUE ET D'UN POLE MAGNÉTIQUE CONFONDUS

PAR

PAUL APPELL

Membre de l'Institut de France

Le problème du mouvement d'une particule électrisée soumise, à la fois, à l'action d'un champ électrique et d'un champ magnétique a été étudié par divers auteurs. Si l'on désigne par m la masse de la particule, par x, y, z ses coordonnées, par ε sa charge électrique, par P, Q, R les composantes du champ électrique, enfin par X, Y, Z celles du champ magnétique, les équations du mouvement sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\varepsilon P+\varepsilon\left(Z\frac{dy}{dt}-Y\frac{dz}{dt}\right)$$

et deux autres analogues. (Voir mon *Traité de mécanique rationnelle*, 3ième édition, t. I, N° 221).

M. POINCARÉ a traité le cas où le champ électrique est *nul*, le champ magnétique provenant d'un seul pôle O: la trajectoire est alors une ligne géodésique d'un cône de révolution de sommet O. L'analyse de M. POINCARÉ est la même que celle qu'avait employée M. DARBOUX (Note VII à la mécanique de DESPEYROUS, t. I, Hermann éditeur, 1884) pour résoudre un problème de statique: *équilibre d'un fil flexible parcouru par un courant électrique et soumis à l'action d'un pôle magnétique.*

Je me propose ici de traiter le problème en supposant que le champ soit produit, à la fois, par une masse électrique et un pôle magnétique, placés au même point O. En prenant ce point

pour origine, et appelant r la distance $Om = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, on sait que la force électrique P, Q, R dérive alors d'un potentiel de la forme $\frac{p}{r}$, où p est constant, et la force du champ magnétique X, Y, Z d'un potentiel $\frac{q}{r}$, où q est constant.

Les équations du mouvement de la particule sont alors de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\lambda}{r^3}x + \frac{\mu}{r^3}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\lambda}{r^3}y + \frac{\mu}{r^3}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\lambda}{r^3}z + \frac{\mu}{r^3}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right), \end{aligned}\right.$$

λ et μ désignant deux constantes. Ce sont ces équations qu'il s'agit d'intégrer. Si $\lambda = 0$, on a le problème de M. Poincaré. Si $\mu = 0$, on a le mouvement keplérien d'une planète.

D'abord, le théorème des forces vives donne

$$(2)\qquad v^2 = -\frac{2\lambda}{r} + h;$$

le théorème des moments par rapport à Oz donne ensuite

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu}{r^3}z\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right) - \frac{\mu}{r^3}\frac{dz}{dt}(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \frac{\mu}{r^2}z\frac{dr}{dt} - \frac{\mu}{r}\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{r}z\right).$$

D'où en intégrant

$$(3)\qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = -\frac{\mu z}{r} + C;$$

on a de même les deux équations

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = -\mu\frac{x}{r} + A$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = -\mu\frac{y}{r} + B;$$

d'où en multipliant par z, x, y et ajoutant

$$O = -\mu r + Ax + By + Cz.$$

La trajectoire est donc sur un cône de révolution de sommet O. Prenons l'axe de ce cône pour axe Oz et appelons α l'angle constant des génératrices avec Oz. Nous aurons, en appelant ρ et θ les coordonnées polaires de la projection du mobile sur le plan xOy,

$$\rho = r \sin \alpha, \quad z = r \cos \alpha.$$

L'équation (3) s'écrit alors

$$(4) \qquad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = -\mu \cos \alpha + C;$$

le théorème des aires s'applique donc à la projection du mouvement sur le plan xOy.

Les trois équations du mouvement

$$(4) \qquad \begin{cases} v^2 = -\dfrac{2\lambda}{r} + h \\ z = r \cos \alpha \\ \rho^2 \dfrac{d\theta}{dt} = C^{te}, \end{cases}$$

sont alors identiques aux équations du mouvement d'un point assujetti à glisser *sans frottement* sur le cône $z = r \cos \alpha$ et sollicité par une force centrale $\frac{\lambda}{r^2}$ en raison inverse du carré de de la distance.

Les intégrations se font par les méthodes élémentaires et on arrive à ce résultat, d'ailleurs intuitif, que *la trajectoire est une courbe qui, par le développement du cône, devient une conique de foyer* O.

Dans le cas $\lambda = 0$, la trajectoire devient une droite par le développement; dans le cas $\mu = 0$, le cône est un plan et la trajectoire une conique de foyer O.

DEMONSTRAÇÃO DE UM THEOREMA DE LIOUVILLE SOBRE AS LINHAS GEODESICAS DO ELLIPSOIDE

POR

F. GOMES TEIXEIRA

Consideremos o ellipsoide representado pela equação

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

e sejam $u=C$ e $v=C'$ (C e C' representando duas constantes) as equaçães das linhas de curvatura que passam por um ponto (x, y, z) desta superficie, e seja ω o angulo que o plano osculador no mesmo ponto (x, y, z) de uma linha geodesica, que passe por este ponto faz com uma das secções principaes, relativas ao ponto mencionado. Entre u, v e ω existe a relação

$$u\cos^2\omega+v\operatorname{sen}^2\omega=k,$$

k sendo constante, qualquer que seja a posição do ponto (x, y, z) sobre uma mesma linha geodesica.

Esta proposição foi demonstrada por LIOUVILLE em 1844 no *Journal de Mathématiques* por meio de considerações de Mecanica, e depois por CHASLES em 1846, no mesmo jornal, por um methodo puramente geometrico. Aqui vou dar uma nova demonstração do mesmo theorema, que, segundo creio, não foi ainda notada.

Designemos, para brevidade, por P e Q as expressões

$$P=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}, \quad D=\frac{1}{a^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2,$$

e recordemos que as equações das linhas geodesicas do ellipsoide são

$$(2) \qquad \frac{a^2}{x}\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{b^2}{y}\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{c^2}{z}\frac{d^2z}{ds^2} = \mu\,,$$

e que dellas resultam, por um calculo simples que aqui não exporemos ([1]), as relações

$$(3) \qquad k\mathrm{P} + \mathrm{D} = 0\,, \quad \mathrm{PD} = \mu\,;$$

k designando uma constante.

Recordemos ainda que pelo ponto (x, y, z) do ellipsoide passam dois hyperboloides homofocaes, que cortam a primeira superficie segundo as suas linhas de curvatura, e que as equações destes hyperboides são

$$\frac{x^2}{a^2-h} + \frac{y^2}{b^2-h} + \frac{z^2}{c^2-h} = 1\,,$$

h designando as raizes u e v da equação

$$x^2(b^2-h)(c^2-h) + y^2(a^2-h)(c^2-h) + z^2(a^2-h)(b^2-h)$$
$$-(a^2-h)(b^2-h)(c^2-h) = 0\,,$$

ou, eliminando z^2 por meio da equação (1),

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} & h^2 + \left(\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + \frac{b^2-c^2}{b^2}y^2 - a^2 - b^2\right)h \\ & - \left[b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + a^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)y^2 - a^2b^2\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Posto isto, designemos por R o raio de curvatura da linha geodesica considerada, relativo ao ponto (x, y, z). Temos, applicando uma expressão geral bem conhecida do raio de curvatura das curvas empenadas e attendendo ás equações (2) e (3),

$$\mathrm{R} = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mu\sqrt{\mathrm{P}}} = \frac{\sqrt{\mathrm{P}}}{\mathrm{D}}\,.$$

([1]) Veja-se, por exemplo, o *Traité de Mécanique* de M. Appell, tom. I, pag. 472.

Esta equação determina o raio de curvatura das linhas geodesicas do ellipsoide, e ao mesmo tempo dá, attendendo á segunda das equações (3),

$$P^3 = k^2 R^2.$$

Mas, por outra parte, como o plano osculador da curva no ponto (x, y, z) é normal á superficie do ellipsoide, o theorema de EULER sobre a curvatura das secções normaes dá

$$\frac{\sqrt{P^3}}{R} = \frac{\sqrt{P^3}}{R_1} \cos^2 \omega + \frac{\sqrt{P^3}}{R_2} \operatorname{sen}^2 \omega = k,$$

R_1 e R_2 representando os raios de curvatura das secções principaes e ω o angulo já designado.

Podemos calcular R_1 e R_2 por meio de uma formula geral conhecida ([1]), da qual resulta que R_1 e R_2 são as raizes da equação

$$\rho^2 - \left[\frac{b^2+a^2}{c^2} z^2 + \frac{a^2+c^2}{b^2} y^2 + \frac{b^2+c^2}{a^2} x^2\right] \sqrt{P}\rho + a^2b^2c^2P^2 = 0,$$

a qual, pondo $h\rho = a^2b^2c^2\sqrt{P^3}$, toma a forma

$$a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)$$
$$- \left[\frac{b^2+a^2}{c^2} z^2 + \frac{a^2+c^2}{b^2} y^2 + \frac{b^2+c^2}{a^2} x^2\right] h + h^2 = 0.$$

Eliminando agora z^2 entre esta equação e a equação (1), vem uma outra que coincide com a equação (4). Logo

$$uR_1 = a^2b^2c^2\sqrt{P^3}, \quad vR_2 = a^2b^2c^2\sqrt{P_3},$$

e portanto temos a equação de LIOUVILLE

$$u \cos^2 \omega + v \operatorname{sen}^2 \omega = a^2b^2c^2k,$$

que pretendiamos demonstrar.

([1]) Veja-se, por exemplo, o *Calcul différentiel* de SERRET, 1879, pag. 476.

ECHINODERMES DU PORTUGAL

PAR

AUGUSTO NOBRE

Ayant terminé la révision des Échinodermes du Musée de Zoologie de l'Académie Polytechnique de Porto, il m'a semblé intéressant de publier le résultat de mon étude sur les Échinodermes du Portugal qui s'y trouvent déposés. J'ai en même temps, pour rendre ces notes plus complètes, réuni dans ce catalogue toutes les espèces qui ont été recueillies par le Dr. R. GREEFF et par le Dr. PAULINO D'OLIVEIRA, dont la collection appartient maintenant au Musée de Coïmbra, celles que j'ai pu examiner au Muséum Bocage, de Lisbonne, et aussi les formes trouvées pendant les campagnes scientifiques du *Porcupine*, du *Challenger*, du *Travailleur*, du *Talisman*, de la *Princesse Alice* et de l'*Amelia*, effectuées sur les côtes du Portugal.

En réunissant tous ces renseigments je crois donner une idée si exacte que possible de la série des Échinodermes qui habitent nos mers.

Musée de Zoologie de l'Académie Polytechnique
de Porto, le 11 février 1909.

ECHINODERMES

STELLEROIDA

Fam. BRISINGIDÆ

Brisinga, Asbjörnsen

Brisinga endacnemos, Asbjörnsen

Brisinga endacnemos, Asbjörnsen, Fauna litt. Norveg., Sudet Hefte, p. 95, pl. IX, f. 1-15 (1856) — Carpenter and Jeffreys, On deep sea researches *Porcupine*, p. 155, 157 (1870) — W. Thompson, Les Profond. de la mer (trad. Lortet) p.p. 55, 84, 100 (1879) — Sladen, Report on the Asteroidea, *Challenger*, v. XXX, p.p. 603, 679, 680 (1889) — Perrier, Exp. *Travailleur* et du *Talisman*, Échinodermes, 1.e partie, p. 62, pl. II (1894).

Hab.: Côte occ. — Au large du Cap Mondego. à la prof. de 380-469 brasses; station 14, et à la prof. de 600-1095 brasses, station 17, 17 *a* (Exp. du *Porcupine*, 1870) (1).

Brisinga coronata, Sars

Brisinga coronata, G. O. Sars, Vidensk-Selsk. Forhandlinger, p. 5 (1871); On some remark. forms Norveg. Coast, pt. II, University Program. Christiania (1875) — W. Thomson, Les Profondeurs de la Mer (trad. Lortet), p.p. 56, 100, fig. 5 (1879). Sladen, Report on the Asteroidea, *Challenger*, v. XXX, p.p. 604, 697 (1889) — Perrier, Expl. *Travailleur* et du *Talisman*, Échinodermes, 1.e partie, p. 68 (1894).

Hab.: Côte occ. — Entre 30 à 40 miles à l'ouest du Cap Mondego et aux profondeurs de 100 et 220 brasses; station 13 (Exp. du *Porcupine*, 1870) (2).

---

(1) Dans l'ouvrage de Sladen l'*habitat* est indiqué comme il suit: Off the west coast of Spain. Lat. 40° 6′ 0″ N., long. 9° 44′ 0″ W.

(2) Même observation que pour l'*habitat* de l'espèce précédente, d'après Sladen.

Fam. PEDICELLASTERIDÆ

Pedicellaster, Sars

Pedicellaster sexradiatus, E. Perrier

Pedicellaster sexradiatus, Perrier — Milne-Edwards, Rapport sur les trav. de la comm. chargée d'étud. la faune sous-mar. dans les gr. prof. de la Médit. et de l'Atlant., p. 50 (1882) — Sladen, Report on the Asteroidea, *Challenger*, v. xxx, p.p. 557, 558, 814 (1889) — Perrier, Expl. *Travailleur* et du *Talisman*, Échinodermes, 1.^{e} part., p. 109, pl. ix, f. 2 (1894).

Hab.: Côte occ. — Au large du Cap Mondego. Lat. N. 39°, 47′, 50″; Long. O. 12°, 3′, 30″, à la prof. de 3.307^m, vase grisâtre; trois exemplaires brisés, drag. n° 3; au large du Cap Sines. Lat. N. 38°, 5′. Long. O. 12°, 5′. Prof. 3.165^m, vase grisâtre; deux bras.: drag. n° 5. (Expl. du *Travailleur*, 1881).

Fam. ASTERIDÆ

Polyasterias, E. Perrier

Polyasterias tenuispina, (Lamk.)

Asterias tenuispina, Lamk.; An. sans vert., 2.^{e} ed., 3^e. p. 250 (1840) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 7 (1881) — Carus, Prod. Faun. médit.; p. 104 (1892) — Nobre, Annuario Acad. Polyt. Porto, p. 6 (1897); Subsidios Fauna sul Portugal, p. 155 (1901) — Ludwig, Fauna und Flora Neapel; Seesterne, p. 344 (1897).

Asteracanthion tenuispina, Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p. 16, pl. 1, f. 1 *a*. *b* (1842).

Asterias (Solasterias) *tenuispina*, Lamarck — Sladen, Report on the *Asteroidea;* Challenger, v. xxx, p.p. 583, 884 (1889).

Hab.: Côte occ. — Baie de Setubal (Museum Bocage, d'après Greeff); Sines (Paulino d'Oliveira, A. Nobre); Villa Nova de Milfontes (A. Nobre).

Très commune à Sines et Milfontes sur les rochers découverts pendant la basse mer. Le nombre des bras est très variable. C'est intéressant à constater l'abondance de cette espèce

sur cette partie de la côte. On ne l'a trouvée jamais sur le rivage, au nord du Tage.

Stolasterias, Sladen.

Stolasterias glacialis (L.)

Asterias glacialis, L., Syst. Nat., ed. x, p. 661 (1758); ed. Gmelin, p. 179 (1776) — Müller, Zool. Dan., p. 234 (1776) — Lamarck, An. sans vert., 2^{e} éd., 3, p. 248 (1840) — Perrier, An. Sc. Nat., 19, p. 15 (1885) — Carus, Prod. Faun. Medit., i, p. 86 (1884-85) — Herdman, Report. Crin., p. 133 (1886) — Nobre, Annuar. Acad. Polyt. Porto, p. 6 (1897) — Chadwick, Echinod of the L. M. B. C. dist., p. 51 (1889) — Bell. Brit. Echinod., p. 98 (1892) — Nobre, Fauna norte Portugal, p. 52 (1901); Fauna sul Portugal, p. 155 (1901) — Ludwig, Fauna und Flora Neapel; Seesterne, p. 364, pl. 3, f. 1-3; pl. 12, f. 1-16 (1897).

Asterias spinosa, Pennant, Brit. Zool., 4, p. 53 (1777).

Asterias angulosa, O. F. Müller, Zool. Dan., 2^{e}, p. 1, pl. 41 (1788).

Stellonia Webbiana, d'Orbigny, Hist. Naturelle des Canaries, p. 148, pl. 2, f. 8-13 (1839).

Uraster glacialis, Lin. Ag. — Forbes, Brit. Starfishes, p. 78 (1840).

Asterias africana, Müller et Troschel. — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 3 (1881).

Asteracantion glacialis, L. — Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p.p. 14, 126 (1842).

Stolasterias glacialis, Linck — Perrier, Expl. *Travailleur* et *Talisman*, Échinodermes, 1^{e} part., p. 323 (1894).

Syn. *Asterias Madeirensis*, Stimpson.

Hab.: Côte occ. — Moledo do Minho, Vianna do Castello, Leça da Palmeira, Foz do Douro, Aveiro, Estoril, Cascaes (A. Nobre); Baie de Setubal (Greeff, A. Nobre). Sines (Paulino d'Oliveira, A. Nobre).

Moins commune que la *D. rubens*, elle vit aussi sur les rochers dans la région inférieure de la zone littorale. Pendant l'hiver elle habite plus près du rivage. On trouve des variations de coloration depuis le jaune blanchâtre jusqu'au jaune foncé. Plusieurs exemplaires atteignent d'assez grandes dimensions. Je l'ai trouvée aussi dans les dragages éffectuées sur la côte de Porto.

Diplasterias, E. Perrier

Diplasterias rubens (L.)

Asterias rubens, L. Syst. Nat., v. x, p. 661 (1758), éd. Gmelin, p. 178 (1776)—Müller, Zool. Dan., p. 234 (1766)—Encycl., pl. 112, f. 3-4; pl. 113, f. 1-2 (1789)—Lamk., An. sans vert., 2e éd., v. 3, p. 250 (1840)—Danielsen og Koren, Den Norske Nord-Exped., Asteroidea, p. 24, pl. 3, f. 14; pl. 4, f. 10 (1884)—Herdman, Report. Crin., p. 133 (1886)—Nobre, Annuar. Acad. Polyt. Porto, p. 6 (1897)—Chadwick, Echinod. of the L. M. B. C., dist., p. 50 (1889)—Bell. Brit. Echinod., p. 100 (1892)—Nobre, Subs. Fauna mar. norte Portugal, p. 52 (1901); Sub. sul Portugal, p. 155 (1901).

Asterias chlatrata, Pennant, Brit. Zool., 4e, p. 51 (1777).

Asterias violacea, Müller, Zool. Dan., 2e, p. 7, pl. 46 (1788)—Lamarck, An. sans vért., 2e éd., 3, p. 256 (1840).

Uraster rubens, Lin. Ag.—Forbes, Brit. Starf., p. 83 (1840).

Uraster violaceus, Müller—Forbes, Brit. Starf., p. 83 (1840).

Asteracanthion rubens, Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p.p. 17 et 126 (1842).

Asteracanthion violaceus, Müll. et Troschel, Syst. der Asteriden, p.p. 16 et 126 (1842).

Hab.: Portugal (Paulino d'Oliveira). Côte occ.—Moledo do Minho. Vianna do Castello, Povoa de Varzim, Villa do Conde, Leça da Palmeira, Foz do Douro, Espinho, Figueira da Foz, Parede, Estoril, Cascaes, Setubal et Sines (Nobre).

Très commune sur les rochers des plages du nord du Portugal. Recueillie dans les filets traînants des bateaux de pêche à Matozinhos. Je l'ai recueillie toujours dans les dragages éffectuées sur la côte de Porto.

Fam. ECHINASTERIDÆ

Echinaster, Müller und Troschel

Echinaster sepositus (Gray)

Ropia seposita, Gray, Synop. gen. esp. of the Class *Hypostoma* (Asterias Linnæus), in An. M. N. H., v. 6, p. 282 (1840).

Echinaster sepositus, Müller und Troschel, Syst. der Asteri-

den, p. 25 (1842) — Carus, Prod. Faun. medit., v. I, p. 8 (1884).

Echinaster sepositus (Lamk.) Müller und Troschel — Sladen, Report on the Asteroidea, *Challenger*, v. xxx, p.p. 553, 810.

Echinaster sepositus, Retzius — Perrier, Expl. *Travailleur* et *Talisman*, Échinodermes, 1e part., p. 148 (1894).

Echinaster sepositus, Gray — Ludwig, Fauna und Flora Neapel: Seesterne, p. 313, pl. 4, f. 4, 5; pl. 10, f. 1-18 (1897).

Hab.: Côte occ. — Vianna do Castello (Paulino d'Oliveira, Coll. Mus. Bocage); Côte de Setubal (L. do Nascimento). Le Musée de l'Académie Polytechnique de Porto possède deux exemplaires recueillis par les pêcheurs au large de Setubal.

Par l'examen de plusieurs exemplaires des côtes d'Angleterre et de Naples je me suis convaincu que l'espèce portugaise corpond à la forme mediterrannéenne que Mr. Ludwig considère comme *E. sepositus*, Gray, espèce différente du *E. sepositus*, Retzius qui est, d'après lui, identique au *Cribella oculata*, Pen. = *Henricia sanguinolenta*, Müller. C'est sous ce nom que j'avais réunies les deux formes (Annaes Sc. Nat., v. VIII, 1903) dont la synonimie est bien confuse.

Fam. ASTERINIDÆ

Asterina, Nardo

Asterina gibbosa, (Pennant)

Asterias gibbosa, Pennant, Brit. Zool., 4e, p. 62, nº 59 (1777).

Asterina gibbosa, Pennant — Forbes, Brit. Starf., p. 119 (1840) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p.p. 2 et 5 (1881) — Bell, Brit. Echinod., p. 82, pl. x, f. 9-10 (1892) — Herdmann, Report, Crin., p. 134 (1886) — Nobre, Annuar. Acad. Polyt. Porto, p. 5 (1897); Subs. Fauna norte Portugal, p. 53 (1901); Subs. Fauna sul Portugal, p. 151 (1901) — Mar. Biol. Ass. Plymouth, p. 207 (1904) — Ludwig, Fauna und Flora Neapel; Seesterne, p. 207, pl. 5, f. 5-8; pl. 9, f. 1-14 (1897).

Asteriscus vermiculata, Müller und Troschel, Syst. Asteriden, p. 41 (1842) — Perrier, Ann. Sc. Nat., 12e, p. 290, pl. 18, f. 10 (1869).

Hab. Portugal: Côte occ. — Moledo do Minho, Vianna do Castello, Povoa de Varzim, Leça da Palmeira, Foz do Douro, Plages de Parede et Estoril, embouchure du Tage (A. Nobre);

Carcavellos (Girard, Coll Mus. Bocage); Tage et Baie de Setubal (Greeff, Nobre): Sines (Paulino d'Oliveira, A. Nobre); Villa Nova de Mil Fontes (Abel Ribeiro, Coll. Mus. Bocage, A. Nobre).

Côte mérid. — Lagos, Albufeira A. (Nobre).

Très commune au nord du pays, surtout à Vianna. Vit sous les pierres dans la zone littorale à découvert pendant la basse mer.

Fam. ASTROPECTNIDÆ

Luidia, Forbes

Luidia Sarsi, Düben et Koren

Luidia fragillisima, Forbes (pars), Hist. Brit. Starfishes, p. 135 (1841).

Luidia Sarsii, Düben et Koren, K. Vet. Akad Handlingar, Stockolm, p. 254 (1844); Oefv. Vet. Akad. Forhandl, p. 113 (1844) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 5 (1881) — Danielsen og Koren, Den Norske Nord-Exp. Asteroidea, p. 94 (1884) — Sladen, Report on the Asteroidea. *Challenger*, v. XXX, p. 258 (1889) — Bell, Brit. Echinod., p. 72 (1892) — Perrier, Expl. *Travailleur* et du *Talisman*, Echinodermes, 1e part., p. 195 (1894) — Ludwig, Fauna und Flora Neapel: Seesterne. p. 85, pl. 4, f. 3; pl. 7, f. 1-12 (1897).

Hab.: Côte occ. — Cezimbra (Greeff).

Astropecten, Linck.

Astropecten aurantiacus (Lin.)

Asterias auranciaca, Lin., Syst. Nat., ed. X, p. 662 (1758) — Lamarck, An. sans vert., v. II, p. 563, part., (1816) — d'Orbigny, Faune des Canaries, p. 148, pl. 1, f. 1-7 (1839) — Müller und Troschel, System der Asteriden, p. 67 (1842) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 5 (1881) — Carus, Prod. Faun. Medit., v. I, p. 88 (1884) — Ludwig, Fauna und Flora Neapel: Seesterne, p. 3, pl. 2, f. 1-2; pl. 6, f. 1-5 (1897) — Subsidios para a Fauna sul Portugal, p. 154 (1903).

Hab.: Côte occ. — Povoa de Varzim, Matozinhos, dans les filets des bateaux de pêche (A. Nobre). Côte de Caparica (Coll,

Mus. Bocage); Cascaes (A. Nobre); Baie de Setubal et Portinho d'Arrabida (Greeff); Baie de Setubal (A. Nobre); Sines (Paulino d'Oliveira).

Côte mérid. — Lagos, Albufeira (A. Nobre).

Les exemplaires que j'ai examinés sont tout a fait identiques à ceux de la Méditerranée.

Astropecten irregularis, Linck

Astropecten irregularis, Linck, De Stellis marinis, p. 27, pl. VI, f. 13; pl. VIII, f. 11-12 (1733) — Pennant, Brit. Zool., IV, p. 61 (1777) — Danielsen og Koren, Den Norske Exp. Asteroidea, p. 82 (1884) — Bell, Brit. Echinod., p. 66 (1892) — Nobre, Fauna Marit. Portugal, p. 53 (1901) — Herdman, Rep. upon the Crin., etc., p. 135 (1886) — Chadwick, Echinod. of the L. M. B. C. dest., p. 51 (1889) — Sladen, Report on the Asteroidea, *Challenger*, v. XXX, p. 209 (1889) — Meissner und Collin, Bestr. Fauna der süd und östl Nordsee, II, Echinod., p. 337 (1894).

Hab.: Côte occ. — Portugal (Paulino d'Oliveira); Povoa de Varzim, Matozinhos, dans les filets des bateaux de pêche.

Cette espèce présente des caractères qui l'approchent assez de l'espèce précedente.

Astropecten pentacanthus (Delle Chiaje)

var. **serratus**, Müller und Troschel

Astropecten serratus, Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p. 72 (1842) — Carus, Prod. Faun. Medit., I, p. 90 (1884-1885) — Sladen, Report on the Asteroidea; *Challanger*, v. XXX, p.p. 195, 212 (1889).

Asteropecten pentacanthus (Delle Chiaje), var. *serratus* (M. T.) — Ludwig, Fauna und Flora Neapel, Seesterne, p. 47 (1897).

Hab.: Portugal (Paulino d'Oliveira).

Fam. ARCHASTERIDÆ

Pararchaster, Sladen

Pararchaster armatus, Sladen

Pararchaster armatus, Sladen, Report on the Asteroidea;

Challenger, v. xxx, p.p. 19, 651, 653, 716, pl. 1, f. 5-6; pl. iv, f. 5-6 (1889).

Hab.: Côte occ. — Au large de la côte du Portugal, janvier 1873 (Expl. du *Challenger*).

Plutonaster, Sladen

Plutonaster bifrons (Wyville Thomson)

Archaster bifrons, Wyville Thomson, The Depts of the Sea, p. 122, f. 17 e 74 (1873); Les profondeurs de la mer (trad. Lortet), p.p. 103, 185, f. 17, 74 (1875).

Plutonaster bifrons, Wyville Thomson — Sladen, Report of the Asteroidea, *Challenger*, v. xxx, p.p. 84, 653, 720, pl. xi, f. 1-4; pl. xiii, f. 9-10 (1889) — Perrier, Expl. *Travailleur* et *Talisman*, Échinodermes, 1e part., pag. 314 (1894).

Hab.: Côte occ. — Au large de la côte du Portugal, janvier 1873 (Expl. du *Challenger*). Au large du Cap de S. Vicente. Lat. N. 36°, 55′, Long. O. 10°, 48′ à la prof. de 106m, trois exemplaires (Expl. du *Talisman*, 1883).

Plutonaster subinermis (Philippi)

Asterias subinermis, Philippi, Archiv für Naturg. Iahrg, iii, Bd. i, p. 193 (1837) — Lamarck, An. sans vert., v. iii, p. 258 (1840).

Astropecten subinermis, Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p. 74 (1842) — Carus, Prod. Faun. Médit., i, p.p. 90-91 (1885) — Nobre, Subsid. Faun. sul Portugal, p. 155 (1901).

Theliaster subinermis, Philippi sp. — Sladen, Report on the Asteroidea, *Challenger*, v. xxx, p. 102 (1889) — Perrier, Expl. *Travailleur* et *Talisman*, Échinodermes, 1e part., p. 323 (1894).

Plutonaster subinermis (Philippi) — Ludwig, Fauna und Flora Neapel, Seesterne, p. 105, pl. 1, f. 1-2; pl. 6, f. 10-24 (1897).

Hab.: Côte occ. — (Paulino d'Oliveira); Côte de Setubal, recueillie dans les filets des pêcheurs de fond (L. do Nascimento). Les exemplaires de Setubal recueillis par Mr. Nascimento appartiennent maintenant au Musée de l'Académie Polytechnique de Porto.

Mr. Sladen donne comme habitat de cette espèce Alger, Naples, Nice et Secilie. L'exploration du *Talisman* en a recueilli un exemplaire dans la baie de Cadix par 60.m de fond.

OPHIUROÏDA

Fam. OPHIURIDÆ

Ophiura, Lamk.

Ophiura lævis (Rondelet)

Stella lævis, Rodelet, De Pisc., p. 120 (1554).

Ophioderma longicauda, Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p. 86 (1842) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 5 (1881) — Carus, Prod. Faun. Medit., I. p. 92 (1884) — Nobre, Annuar. Acad. Polyt. Porto, p. 6 (1897).

Ophiura lævis, Lym., Report on the Ophioroidea, *Challenger*, v. XIV, p. 10 (1882).

Hab.: Côte occ. — Côte d'Arrabida (Greeff); Sines (Dr. Paulino d'Oliveira, A. Nobre); Villa Nova de Mil Fontes (Abel da Silva Ribeiro, Coll. Mus. Bocage).

Fam. OPHIOPYRGIDÆ

Ophimusium, Lym.

Ophimusium planum, Lym.

Ophimusium planum, Lym., Report on the Ophioroidea, *Challenger*, v. XIV, p. 385 (1882).

Hab.: Côte occ. — Au large de la côte du Portugal, 470-1090 brasses? (Expl. du *Challenger*).

Ophiomusium Lymani, Wyv. Thompson

Ophiomusium lymani, W. Thom. — Lyman, Report on the Ophiuroidea, *Challenger*, v. XIV, p. 385.

Hab.: Côte occ. — Au large de la côte du Portugal (Expl. du *Challenger*).

Ophioglypha, Lym.

Ophioglypha ciliata (Retzius)

Asterias ciliata, Retzius, Diss., p. 29 (1805).

Ophiura terturata, Lamarck, An. sans vert., 2e ed., v. 3, p. 221 (1840) — Forbes, Brit. Starfishes, p. 22 (1840).

Asterias lacertosa, Pennant, Brit. Zool., iv, p. 63 (1777).

Ophiolepis ciliata, Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p. 91 (1842).

Ophiura ciliaris, L. — Bell, Brit. Echinod., p. 106 (1892) — Nobre, Annuar. Acad. Polyt. Porto, p. 6 (1897).

Ophioglypha lacertosa, Lyman — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 6 (1881) — Carus, Prod. Faun. medit., v. i, p. 9 (1894).

Ophioglypha ciliata, Lyman, Report on the Ophioroidea, *Challanger*, v. xix, p. 76 (1882).

Hab.: Côte occ. — Cascaes (Coll. Museum Bocage); Setubal (Capello, Coll. Museum Bocage; Paulino d'Oliveira). Côte d'Arrabida (Greeff).

Ophioplypha albida (Forbes)

Ophiura texturata (pars), Lamk, An. sans vert., 2e éd., 3e, p. 221 (1840).

Ophiura albida, Forbes, Brit. Starfishes, p. 27 (1840) — Bell, Brit. Echinod., p. 108 (1892).

Ophioglypha albida, Lyman — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 5 (1881) — Lyman, Report on the Ophioroidea, *Challenger*, v. xiv, p. 76 (1882) — Ludwig, Fauna und Flora Neapel: Seesterne, p. 547 (1879) — Carus, Prod. Fauna medit., v. i, p. 93 (1884).

Hab.: Côte occ. — Côte d'Arrabida (Greeff); Cezimbra (Coll. Museum Bocage); Sines (Paulino d'Oliveira, Nobre).

Ophioglypha irrorata (?), Lym.

Ophioglypha irrorata (?), Lym. (adult.), Report on the Ophioroidea, *Challenger*, v. xiv, p. 385 (1882).

Hab.: Côte occ. — Au large de la Côte du Portugal, 470-1125 brasses de fond (Expl. du *Challenger*).

Ophioglypha confragosa, Lym.

Ophioglypha confragosa, Lym., Report on the Ophiroroidea, *Challenger*, v. XIV, p. 385 (1882).

Hab.: Côte occ. — Au large de la côte du Portugal; 470-1090 brasses (?) (Expl. du *Challenger*).

Fam. AMPHIURIDÆ

Amphiura, Forbes

Amphiura squamata (Delle Chiaje)

Asterias squamata, Delle Chiaje, Mem., v. 3, p. 77 (1828).
Ophiura neglecta, Forbes, Brit. Starfishes, p. 30 (1840).
Amphiura squamata, Delle Chiaje (sp.) — Chadwick, Rep. Ophi., p. 142 (1886).
Amphiura squamata, Sars. — Carus, Prod. Fauna medit., v. I, p. 94 (1884) — Lyman, Report on the Ophioroidea, *Challenger*, v. XIV, p. 136 (1882).
Amphiura elegans, Leach — Bell, Brit. Echinod., p. 54 (1892) — Nobre, Annuar. Acad. Polyt. Porto, p. 6 (1897) — Subs. Faun. mar. norte Portugal, p. 54 (1901); Subs. Faun. sul Portugal, p. 156 (1891) — Mar. Biol. Assoc. Plymouth, p. 209 (1904).

Hab.: Côte occ. — Moledo do Minho, Vianna do Castello, Leça, Foz do Douro, Parede, Tage, assez commune sous les pierres, pendant la basse mer (Nobre); Portinho d'Arrabida (Greeff).
Côte mérid. — Lagos (Nobre).

Amphiura filiformis, O. F. Müller

Asterias filiformis, O. F. Müller, Prod. Zool. Dan., p. 235, n.° 2843 (1776).
Ophiocoma filiformis, Forbes, Brit. Starfishes, p. 40 (1840).
Ophiolepis filiformis, Müller und Troschel, Syst. Asteriden, p. 94 (1842).
Amphiura filiformis — Carus, Prod. Faun. medit., v. I, p. 94 (1884).
Amphiura filiformis, O. F. Müller — Lyman, Report on the

Ophioroidea, *Challenger*, v. XIV, p. 124 (1852) — Bell, Brit. Echin., p. 119 (1892) — Marine Biol. Associat., p. 209 (1904).

Hab.: — Portugal (Paulino d'Oliveira).

Ophiopsila, Forbes

Ophiopsila aranea, Forbes

Ophiopsila aranea, Forbes, Trans. Linn. Soc., v. XIX, p. 149 (1842) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 6 (1881) — Lyman, Report on the Ophioroidea, *Challenger*, v. XIV, p. 160 (1882) — Carus, Prod. Faun. Medit., v. I, p. 95 (1884).

Hab. Côte occ. — Cezimbra (Greeff).

Fam. OPHIOHELIDÆ

Ophiothamnus, Lym.

Ophiothamnus affinis, Ljn.

Ophiothamnus affinis, Ljn — Goës, *Josephina* exped. atl. oc., *Ophior.*, p. 622, in Köng. Akad. (1871).

Hab.: Côte occ. — Portugal, 790 brasses de fond. (*fide* Lyman).

Fam. OPHIOCANTHIDÆ

Ophiocantha, Müller und Troschel

Ophiocantha Smith, Ljn.

Ophiocantha Smith, Ljn. — Goës, *Josephina* exped. atl. oc., *Ophior.*, p. 621, in Kong. Akad. (1871) — Lyman, Report on the Ophioroidea, *Challenger*, v. XIV, p. 198 (1882).

Hab.: Côte occ. — Portugal, 790 brasses (*fide* Lyman).

Fam. OPHIOCOMIDÆ

Ophiocoma, Agassiz

Ophiocoma nigra (Abildg.)

Asterias nigra, Abildgaard, *in* Müller, Zool. Dan., pl. XCIII (1789).

Asterias nigra, Müller — Lin., Syst. Nat., éd. Gmelin, 8e, p. 187 (1758).

Ophiocoma granulata, Forbes, *non* Linck, Brit. Starfishes, p. 50 (1840).

Ophiocoma Nilssoni, Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p. 100 (1842).

Ophiocoma nigra, Müller — Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p. 100 (1842) — Lyman, Report on the Ophioroidea, *Challenger*, v. XIV, p. 172 (1882) — Chadwick, Rep. Ophioroidea, p. 141 (1886) — Bell, Brit. Echinod., p. 129 (1892) — Nobre, Annuar. Acad. Polyt. Porto, p. 7 (1897).

Hab.: Côte occ. — Sines (Paulino d'Oliveira, Coll. Mus. Bocage, Musée de Porto, Musée de Coimbra).

Ophiotrix, Müller und Troschel

Ophiotrix fragilis (Abild. Müller)

Asterias fragilis, Abild. (Müller), Zool. Dan., p. 28, pl. XCVIII, (1879).

Ophiura fragilis, Müller — Linné, Syst. Nat., ed. Gmelin, 8.e, p. 187 (1794) — Lamarck, An. sans vert., 2.e ed., v. 3, p. 225 (1840) — Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p. 110, pl. 9, f. 2 (1842) — Allen, On the Fauna Eddystone, p. 471 (1899) — Grieg, Oversigt nord. Norges Echinod., p. 16 (1902) — Marine Biolog. Assoc. Plymouth, p. 210 (1904) — Grieg, Echinod. *Michael Sars*, I, Ophioroidea, p. 32 (1904).

Ophiotrix rosula, Forbes, Brit. Starfishes, p. 60 (1840).

Ophiotrix rammelsbergii, Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p. 113. pl. 8, f. 3 (1842).

Ophiotrix fragilis, Abildg., apud O. F. Müller — Bell. Brit Echinoderm, p. 131 (1892).

Asterias pentaphyllum, Pennant, Brit. Zool., 4.e, p. 54 (1777) — Pen. (sp.), Chadwick. Rep. Ophioroidea, p. 143 (1886).

Ophiotrix fragilis, Dub. et Kor. — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 6 (1881) — Lyman, Report on the Ophioroidea, *Challenger,* v. XIV, p. 224 (1882) — Carus, Prod. Fauna Medit., v. I, p. 95 (1884) — Nobre, Annuario Acad. Polyt., p. 7 (1897); Subs. Norte Portugal, p. 54 (1901); Subs. Sul Portugal, p. 156 (1901).

Hab.: Côte occ. — Vianna do Castello, 40 brasses de fond, filet de vapeur de pêche; Foz do Douro, sous les pierres dans la zone inférieure des marées; côte de Porto, dragages; assez commune jusqu'à 20 brasses de fond en face de Leça da Palmeira et Boa Nova (Nobre). Setubal (Greeff, Coll. Museum Bocage, Nobre). Sines (Paulino d'Oliveira, Nobre). Milfontes (Nobre).

Les exemplaires que l'on trouve sous les pierres dans la zone litorale sont généralment d'une couleur verdâtre ou brunâtre avec des tâches plus foncées sur les bras. À Sines nous en avons trouvé des individus d'une couleur marron, ayant une zone plus foncée sur les bords du disque du côté aboral. Par contre l'exemplaire que nous avons recueilli en 1897 dans le filet traînant, à bord du Hercules, était d'un violacé clair, couleur qu'il conserve un peu encore dans l'alcool. La face supérieure du disque se rapproche de la fig. que répresente la forme décripte par Müller et Troschel sous le nom de O. Rammelsbergii (pl. VII, fig. 3).

Ophiotrix lusitanica, Ljn.

Ophiotrix lusitanica, Ljn. — Goës, Josephina expl., atl. oc., Ophioroid., p. 625, in Köng. Akad, (1871) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 6 (1881) — Lyman, Bull. Mus. Comp. Zool., v. III, pt. 10, p. 249 (1874); Report on the Ophioroidea, *Challenger,* v. XIV, p. 225 (1882).

Hab: — Portinho d'Arrabida, près Setubal, Greeff.

Ophiotrix alopecurus, Müller und Troschel

Ophiotrix alopecurus, Müller und Troschel, Syst. der Asteriden, p. 111 (1842) — Lyman, Report on the Ophior., *Challenger,* v. XIV, p. 225 (1882) — Carus, Prod. Faun. Medit., v. I, p. 96 (1884).

Hab.: — Portugal (Paulino d'Oliveira, Coll. Mus. Coimbra).

Ophiotrix maculata, Ljn.

Ophiotrix maculata, Ljn. — Göes, Josephina exp. atl. oc., Ophior., p. 623, in Köng. Akad (1871) — Lyman, Report on the Ophioroidea, *Challenger*, vol. XIV, p. 225 (1882).

Hab.: — Portugal, à 120 brasses de fond (*fide* Lyman).

FAM. ASTROPHYTIDÆ

Gorgonocephalus, Leach

Gorgonocephalus arborescens (Rondelet)

Stella arborescens, Rondelet, De Pisc., p. 121 (1554).
Euryale costosum, Lamk., An. sans vert., ed. Deshayes, v. III, p. 216 (1840).
Astrophyton arborescens, Müller und Troschel, Syst. der Asteden, p. 124 (1842) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 7 (1881).
Gorgonocephalus arborescens, Agassiz — Lyman, Report on the Ophior., *Challenger,* v. XIV, p. 263 (1882) — Nobre, Sub. Sul Portugal, p. 156 (1901).

Hab.: Côte occ. — Buarcos (Paulino d'Oliveira, Coll. Mus. Coimbra); Setubal (Coll. Mus. Bocage; Nobre, Nascimento). Cette espèce est parfois recueillie dans les filets des pecheurs.

CRINOIDA

FAM. PENTACRINIDÆ

Pentacrinus, Müller

Pentacrinus Wyville-Thomsoni, Jeffreys

Pentacrinus Wyville-Thomsoni, Jeffreys, Proceed. Roy. Soc., v. XIX, p. 157 (1870) — W. Thomson, Proceed. Roy. Soc. Edinb., v. VIII, p. 767 (1872); The Depths of the Sea, p. 444 (1873); Les profondeurs de la mer, p.p. 156, 374, f, 71 (trad. Lortet), (1875).
Pentacrinus wyville-thomsoni, Jeffreys — Carpenter, Report

on the Crinoidea, *Challenger*, v. XXII, p. 313, pl. XVII, f. 2-6; pl. XVIII, XXIV: pl. LVII, f. 1 (1884) — Clark, Nomencl. rec. *Crinoides*, p. 534 (1908).

Hab.: Côte occ. — Au large de la côte du Portugal. Lat. 39° 42' N.; Long, 9° 42' W. St. 17; 1905 brasses (Exp. du *Porcupine*).

FAM. COMATULIDÆ

Antedon, Fréminville

Antedon bifida (Pennant)

Asterias bifida, Pennant, Brit. Zool., 4e, p. 55 (1777) — Clark, Nomencl. rec. *Crinoides*, p. 499 (1908).

Antedon bifida, Penn. Bell. British. Echinoderms, p. 54, pl. 9 (1892) — Nobre, Sub. N. de Portugal, p. 52 (1901) — Marine Biolog. Association, p. 207 (1904).

Comatula rosacea, Fleming — Hist. Brit. Animals, p. 490 (1828) — Forbes, British Starfishes, p. 5 (1841) — Clark. Nom. Crin., p. 513 (1908).

Comatula mediterranea, Lamarck, An. sans vert., 2.e éd., 3, p. 210 (1840) — Clark. Nom. *Crin.*, p. 512 (1908).

Antedon rosacea, Norman. — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 2 et 7 (1881) — Carus, Prod. Faun. medit., I, p. 85 (1864-1885) — Perrier, Nouv. Arch. Mus. Paris, 9, p. 53 (1886) — Carpenter, Report. Crinoid. *Challenger*, p. 158 (1888).

Antedon rosaceus, Linck — Herdman, Report upon the Crinoidea, etc., of the L. M. B. C. dist., p. 131 (1886).

Pentacrinus Europaeus, J. V. Thompson. A Mem. on the Pent. Europaeus, p. 1, pl. I (1827) — Clark, Nom. *Crin.*, p. 532.

Antedon rosaceus, Link (sp.) — Chadwick, Echinod. of the L. M. B. C. dist., p. 48 (1889) — Carpenter, Rep. on the Crinoidea, *Challenger*, v. XXXII, p. 432, pl. LVI, f. 6; pl. LIX, f. 5 (1884).

Antedon de Fréminville, 1811 (*Asterias bifida*, Pennant—Clark, Notice some Crinoids, coll. Mus. Comp. Zoology, Cambridge, Mass. p. 247 (1908).

Syn. *Asterias decacnemos*, Pennant; *Asterias pectinata*, Adams; *Antedon gorgonia*, Fréminville; *Alecto europaea*, Leach; *Comatula europaea*, Forbes; *Alecteo rosea*, Müller; *Pentacrinus europaeus*, J. V. Thompson (forme jeune, pédonculée), etc.

Hab.: Côte occ. — Povoa de Varzim, dans les filets de pê-

che: côte de Porto, dragages entre 12 et 50 mètres de fond; port de Leixões, contre les jetées du port (A. Nobre). Cette espèce est quelquefois très commune à Povoa de Varzim; je l'ai trouvée, la forme jeune et l'adulte, en assez grande abondance dans les dragages éffectuées sur les côtes de Porto en face de Leça da Palmeira et Foz do Douro. Tage, Quai do Sodré; Portinho d'Arrabida, à Setubal (Greeff); Setubal (Coll. Mus. Bocage); Sines (Paulino d'Oliveira).

Antedon lusitanica, P. H. Carpenter

Antedon lusitanica, P. H. Carpenter, Proceed. Roy. Soc. Edimb., v. XII, p. 368 (1884) — Report. on the Crinoidea, *Challenger,* v. XXII, p. 315 (1884) — Hartlaub, Rep. dredg. oper. *Albastross,* XVIII, *Die Comatuliden,* p. 131 (1895) — Clark, Nomencl. rec. *Crinoides,* p. 481 (1908).

Hab.: Côte occ. — Au large de la côte du Portugal, Lat. 39° 39′ N., Log. 9° 39′ W., 740 brasses (Expl. du *Procupine*).

ECHINOIDEA

Fam. CIDARIDÆ

Salenia, Gray

Salenia hastigera, A. Agassiz

Salenia hastigera, A. Agassiz, Report on the Echinoidea, *Challenger,* v. III, p.p. 54, 259, pl. IV, f. 3-17; pl. XXXVIII, f. 10 (1881).

Hab.: Côte occ. — Côte du Portugal (Exp. du *Challenger*).

Dorocidaris, A. Agassiz

Dorocidaris papillata (Lesk.)

Cidaris papillata, Lesk. — Forbes, Brit. Starfishes, p. 146 (1841) — Lovén, On the sp. of. *Echinodea,* p. 140, f. 1-3 (1887) — Bell, Brit. Echinod., p. 139 (1892) — Nobre, Subs. Norte Portugal, p. 54 (1903).

Cidarites histrix, Lamarck, An. sans vert., 2.ᵉ éd., 3, p. 379 (1840).

Dorocidaris papillata, A. Agassiz — Report *Echinoidea, Challenger,* p. 259 (1881) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 7 (1881) — Carus, Prod. Faun. médit., v. I, p. 98 (1884) — Pallary, Enum. Oursins viv. golphe Oran, p. 1 (1898) — Grieg, Oversigt nordl. Norges Echinod,, p. 31 (1902) — Clark, The *Cidaridae,* p. 209 (1907).

Dorocidaris papillata, Lesk. — Bernard, Liste Echinid. *Travailleur* et *Talisman,* p. 207 (1905).

Hab.: Côte occ. — Cap Sagres, 165 brasses (Expl. *Challenger*); Povoa de Varzim, recueilli dans les filets des pècheurs de fond (A. Nobre). Très rare. Baie de Setubal (Coll. Mus. Bocage).

Parocidaris, Des.

Parocidaris purpurata, Wyl. Thomp.

A. Agassiz, Report on the Echinoidea, *Challenger,* v. III, p.p. 40, 259.

Hab.: Côte oc. — Cap Espichel (Exp. du *Porcupine*).

Fam. ECHINOTHURIDÆ

Astenosoma, Gaübe

Astenosoma hystrix, A. Agassiz

Astenosoma hystrix, A. Agassiz, Report on the Echinoidea, *Challenger,* v. III, p.p. 87, 260.

Hab.: Côte oc. — Portugal (Agassiz).

Fam. ECHINOMETRIDÆ

Strongylocentrotus, Brandt

Strongylocentrotus lividus (Lamk.)

Echinus lividus, Lamk. — An. sans vert., 2.ᵉ ed., 3.ᵉ, p. 367 (1840) — Valentin, Anatomie Echinus, p. 1 (1841) — Forbes, Brit. Starf., p. 167 (1841).

Strongylocentrotus lividus, Brdt. — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 6 (1881) — Carus, Prod. Faun. medit., v. I, p. 99 (1884).
Strongylocentrotus lividus, Lamk. — Bell, Brit. Echinod., p. 157 (1892) — Pallary, Enum. Echinod. Oran, p. 2 (1898) — Nobre, Subs. Nort. Portugal, p. 55 (1903); Subs. Sul Portugal, p. 156 (1903) — Bernard, Liste Echin. *Travailleur* et *Talisman*, p. 208 (1905).

Hab.: Côte occ. — Portugal (Paulino d'Oliveira). Abondant sur les rochers de toute la côte du nord; dragages dans la côte de Porto (A. Nobre). Côte d'Arrabida (Greeff, Coll. Museum Bocage); Cezimbra (Greeff); Setubal, Milfontes (A. Nobre).

Sphærechinus, Desor

Sphærechinus granularis (Lamk.)

Echinus granularis, Lamk., An. sans vert., 2.e ed. Desh., 3e, p. 359 (1840).
Sphærechinus granularis, Lamk. — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 6 (1881) — Bell, Br. Echinod., p. 158, pl. XV, f. 2-3 (1892) — Pallary, Enum. Echin. Oran, p. 1 (1898).
Sphærechinus granularis, A. Agas. — Carus, Prod. Faun. Medit., v. I, p. 100 (1894).

Hab.: Côte occ.: — Portugal (Paulino d'Oliveira); Foz do Douro (A. Nobre); Portinho d'Arrabida (Greeff, Coll. Museum Bocage); Cezimbra (Greeff); Setubal, Milfontes (A. Nobre).
Cette espèce est très rare dans la côte du nord.

Fam. ECHINIDÆ

Echinus, Rondelet

Echinus acutus, Lamk.

Echinus acutus, Lamk., An. sans vert., 2.e ed. Deshayes, 3.e, p. 361 (1840) — Agassiz, Rep. on the Echinoidea *Challenger*, v. III, p. 260 (1881) — Carus, Prod. Faun. medit., I, p. 100 (1884) — Bell, Brit. Echinod, p. 146 (1892) — Pallary, En. Oursins Oran, p. 1 (1898) — Allen, Fauna Eddystone, p. 472 (1899) — Marine Brit. Assoc., p. 210 (1904) — Bernard, Liste Echin. *Travailleur* et *Talisman*, p. 208 (1905).

Echinus acutus, Ball — Forbes, Brit. Starf., p. 164 (1841) — A. Agassiz, monogr. Echinod., 1e livr., p. III (1842).

Hab.: Côte occ. — Cap Sagres, 165 brasses (Exp. du *Challenger*); Paulino d'Oliveira; Povoa de Varzim, filets des bateaux de pèche (A. Nobre). Côte de Porto (Vasco Gonçalves).

Echinus esculentus, L.

Echinus esculentus, L., Syst. Nat., ed. x, p. 663 (1758) — Pennant, Brit. Zool., 4.e ed., v. IV, p. 57, pl. 34 (1777) — Vandelli, Fauna et Flora specimen, p. 77 (1797) — Lovén, On the Echin. descr. Lin., p. 64 (1887) — Bell, Brit. Echin., p. 152 (1892) — Meissner und Collin, Bestr. Faun. Ostlich Nordsee, II, Echinod., p. 340 (1894) — Brit. Mar. Assoc., p. 210 (1899) — Bidenkap, Tromsosundets Echinod., p. 111 (1889) — Grieg, Oversigt nordl. Norges Echinod., p. 3 (1902) — Nobre, Subs. Nort. Portugal, p. 55 (1903); Subs. Sul Portugal, p. 156 (1903) — Allen, On the Fauna Eddystone, p. 472 (1904).
Echinus esculentus, Rumph. — Bernard, Liste Echin., *Trav.* et *Talism.*, p. 208 (1905).
Echinus sphæra, Müller, Zool. Prod. Faun., p. 235, n.° 2845 (1776) — Forbes, Brit. Starf., p. 149 (1841) — Agassiz, Monogr. Echinod., 1.e livr., p. II (1841).

Hab.: — Portugal (Vandelli, Paulino d'Oliveira); Povoa de Varzim, Setubal (Nobre).
Cette espèce n'est pas rare à Povoa de Varzim dans les filets de pèche *rasqueiras*. Elle est utilisée comme aliment par les pècheurs.

Echinus miliaris, Lin.

Echinus miliaris, Lin., Syst. Nat., XIII. p. 3169 (1778) — Lamarck, An. sans vert., 2.e éd. Deshayes, 3.e, p. 367 (1840) — Forbes, Brit. Starf., p. 161 (1841) — Agassiz, Monogr. Echin., 1.e livr., p. VI (1842) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p.p. 3 et 6 (1881) — Bell, Brit. Echinod., p. 150 (1892) — Meissner und Collin, Beitr. Fauna Ostlich. Nordsee, II, Echinod., p. 340 (1894) — Allen, On the Fauna Eddystone, p. 474 (1899) — Mar. Biol. Associat., p. 210 (1904).

Hab.: Côte occ. — Tage et Portinho d'Arrabida, à Setubal (Greeff); Setubal (Greeff, Coll. Mus. Bocage).

Echinus melo, Lamk.

Echinus melo, Lamk., An. sans vert., 2.e éd., Desh., 3.e, p. 360 (1810) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 7 (1681) — Bell, Brit. Echinod., p. 155 (1892) — aut, Carus, Prod. Faun. Medit., I, p. 100 (1894) — Pallary, Echinod. d'Oran, p. 1 (1898) — Bernard, Liste Echin. *Trav.* et *Talism.*, p. 208 (1005).

Hab.: — Portugal (Paulino d'Oliveira); Setubal (Coll. Mus. Bocage, *fide* Greeff).

Fam. CLYPEASTRIDÆ

Echinocyamus pusillus, Van Phels.

Echinocyamus pusillus (Müller)

Spatagus pusillus, O. F. Müller, Prod. Zool. Dan., p. 236 (1776).

Echynocyamus pusillus, Müller — Forbes, Brit. Starf., p. 175 (1841) — Meissner und Collin, Bestr. Faun. östlich Nordsee, II, Echinod., p. 341 (1894) — Allen, Fauna Eddystone, p. 475 (1895) — Grieg, Oversigt Nordl. Norges Echinod., p. 32 (1902) — Nobre, Sub. Norte Portugal, p. 55 (1903); Sub. Sul de Portugal, p. 156 (1903) — Mar. Biol. Assoc., p. 210 (1904) — Bernard, Liste Echin. *Trav.* et *Talism.*, p, 208 (1905).

Echinocyamus pusillus, Gray — Carus, Prod. Faun. medit., I, p. 101 (1884) — Pallary, Echin. Oran, p. 2 (1898).

Hab.: Côte occ. — Matozinhos (A. Nobre).

Côte mérid. — Villa Nova de Portimão, Lagos, Cap Santa Maria (A. Nobre).

Je n'ai trouvé que le test dans les dépôts de sables coquilliers.

Fam. SPATANGIDÆ

Echinocardium, Gray

Echinocardium cordatum (Pennant)

Echinus cordatus, Pennant, Brit. Zool., IV, p. 58, pl. XXXIV, f. 75 (1777); p. 139, pl. XXXVI, f. 2 (1812).

Spatangus arcuarius, Lamk., An. sans vert., 2e éd. Deshayes, 3, p. 328 (1840) — Encycl., pl. 156, f. 7-8 (1789).

Amphidotus cordatum, Penn. — Forbes, Brit. Starf., p. 190 (1841).

Echinocaster cordatum (Penn.) — Meissner und Collin, Bestr. p. 343 (1894).

Echinocardium cordatum, Penn. — Bell, Brit. Echinod., p. 169, pl. XVI, f. 1-4 (1892) — Allen, Fauna Eddystone, p. 476 (1899) — Grieg. Oversigt. Nordl. Norges Echinod., p. 33 (1902) — Nobre, Sub. Norte de Portugal, p. 56 (1903); Sub. Sul de Portugal, p. 156 (1903) — Mar. Biol. Assoc., p. 411 (1904).

Echinocardium cordatum, Gray — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 7 (1881) — Carus, Prod. Faun. Médit., I, p. 102 (1884) — Pallary, Echinod. Oran, p. 2 (1898).

Hab.: Côte occ. — Matozinhos, fonds près du rivage (Nobre); Cascaes (Mus. Bocage), Malha da Costa (Girard, Coll. Mus. Bocage); Baie de Setubal (Coll. Mus. Bocage); Cezimbra (Greeff); Milfontes, commun (Nobre).

Côte mérid. — Cap Sant Maria (Nobre), abondant.

Vandelli, *in* Flora et Fauna Spéc., p. 77, cite l'*Echinus spatagus* comme appartenant à la faune portugaise. Vandelli, se correspondant avec Linné et connaissant probablement le Syst. Nat., édité à Coïmbra, voulait sans doute se rapporter à l'*Echinocardium cordatum*, une des formes que Linné a confondu sous le nom de *Echinus spatagus* (vide Linné, p. 228 et 225, ed. Coïmbra, et Lamarck, p. 324 *Spat. ovatus* et p. 327, *S. canaliferus*). C'est le *Metalia spatagus* (L.).

Vandelli cite encore l'*Echinus orbiculus*, espèce linnéenne dont (d'après Lovén, On the sp. of Echinoidea, p. 180) aucun n'a eté trouvé dans la collection de Linné. Il s'agit du *Rotula dentata*, Lamk (*Scutella*), An. sans vert., p. 277, espèce de nos colonies africaines, et que probablement Vandelli avait trouvé dans les collections portugaises, ce que n'est pas a étonner. Morelet, en 1845, nous parle encore, dans ses considérations préliminaires sur les *Mollusques du Portugal*, de l'état primitif et confus du Musée de Lisbonne ([1]).

([1]) Les autres espèces d'Échinodermes citées par Vandelli, sont les suivantes: Asterias rubens (*Diplasterias rubens*, L.), Asterias ophiura (*Sp.?*) Asterias ciliaris (*Ophiura ciliata*, Retz), Asterias aranciaca (*Astropecten aurantiacus*, Lin.).

Aërope, Wyl. Thomp.

Aërope rostrata, Wyl. Thomp.

Aërope rostrata, Wyl. Thomp., Proceed. Royal Soc., v. xxv, p. 211; Voyage of the *Challenger,* i, p. 381, f. 99 — A. Agassiz, Report on the Echinoidea, *Challenger*, v. iii, p.p. 192, 261.

Hab.: Côte occ. — Côte du Portugal (Exp. du *Challenger*).

HOLOTHUROIDA

Fam. DENDROCHIROTINÆ

Cucumaria, de Blainville

Cucumaria Planci (Brandt)

Holothuria penctata, Gmelin (part.) — Linn. Syst. Nat., ed. Gmelin, p. 149 (1776); Syst. Nat., xiii, p. 3139 (1788).
Holothuria doliolum, Lamk. (part.) An. sans vert., 2.ᵉ éd., 3, p. 441 (1840).
Cucumaria Planci, Marenzeller, Ver. Zool. Bot. Ges. Wien, v. xxiv, p. 300 (1874) — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 7 (1881) — Carus, Prod. Faun. medit., i, p. 107 (1884) — Théel, Report on the Holothuroidea, Challenger, v. xxxix, pt. ii, p. 101 (1886) — Chadwick, Echinod. of the L. M. B. C. Dist., p. 53 (1889); Notes on the *Cucumaria Planci,* in Fauna Liverpool Bay, p. 63, pl. i (1892) — Bell, Brit. Echinod., p. 37, pl. ii, f. 2; pl. iii, f. 1 (1892) — Nobre, Sub. Sul Portugal p. 155 (1903).

Hab.: Côte occ. — Estoril, embouchure du Tage, dans les crévasses des rochers de la zone littorale (Nobre). Côte d'Arrabida, à Setubal (Greeff); Villa Nova de Milfontes (Nobre). Assez commune à Estoril.

Obs. Dans le Bulletin des campagnes scientifiques accomplies sur l'Yacht *Amelia,* par D. Carlos de Bragança, v. i, 1902, on trouve plusieurs références à des Échinodermes dragués sur les côtes du sudouest et du sud du Portugal. Ces références se rapportant exclusivement, pour ce qui concerne aux Échi

nodermes, à la désignation des genres trouvés: *Asterias*, et Astérides, Ophiures, *Cucumaria*, *Echinocardium*, *Synapta*, *Antedon*, *Holothuria* et a des Échinoïdes, je me borne à l'indication spéciale du g. *Cucumaria*, et surtout au genre *Synapta* dont plusieurs espèces doivent se trouver sur nos côtes et qui ne sont pas citées dans ce travail.

Fam. ASPIDOCHIROTINÆ

Holothuria, Linn.

Holothuria tubulosa, Gmelin

Holothuria tubulosa, Gmel. — Linné, Syst. Nat., XII, 2, p. 1090 (1766), éd. Gmelin, 2, p. 147 (1778).

Holothuria tubulosa, Gmelin — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 7 (1881) — Carus, Prod. Faun. medit., I, p. 105 (1884) — Théel, Report on the Holothuroidea, *Challenger*, v. XXXIV, pl. II, p. 229 (1886) — Hérouard, Holothuries Camp. *Princesse Alice*, p. 7 (1902).

Fistularia (Holothuria) *tubulosa*, Lamk, An. sans vert., 2.e éd. Deshayes, 3, p. 447; Encycl., pl. 86, f. 12 (1844).

Hab.: Côte occ. — Côte de Porto, 40 brasses de prof., dans le filet d'un vapeur de pêche (Nobre). Portinho d'Arrabida, pr. Setubal (Greeff, Coll. Mus. Bocage); Villa Nova de Milfontes, dans la zone des marées, commune (Nobre).

Holothuria catanensis, Grube

Holothuria catanensis, Grube — Greeff, Echinod. S. Thomé, p. 7 (1881) — Carus, Prod. Faun. medit., v. I, p. 106 (1884) — Théel, Report on the Holothuroidea, *Challenger*, v. XXXIX, Pt. II, p. 207 (1886).

Hab.: Côte occ. — Portinho d'Arrabida, pr. Setubal (Greeff).

Pseudostichopus, Théel

Pseudostichopus villosus, Théel

Pseudostichopus villosus, Théel, Report on the Holothuroidea *Challenger*, v. XXXIX, Pt. II, p. 170 (1886) — Hérouard, Holo-

thuries Camp. Princesse Alice, p. 11, pl. II, f. 1-3; pl. VII, f. 3, p.p. 52-53 (1902).

Hab.: Côte occ. — Entre le Portugal et les Açores; Stn. 650, prof. 4261 m. Lat. 36° 55′ N. Long. 24° 43′ W.; Stn. 753, prof. 4360 m.; Long. 39° 54′ N; 20° 27′ W (*Princesse Alice*, 1896).

Pseudostichopus occultatus, Marenzeller

Pseudostichopus occultatus, Marenzeller — Hérouard, Holothuries Camp. Princesse Alice, p. 14, pl. II, f. 4-14, p.p. 52, 53 (1902).

Hab.: Côte occ. — Entre le Portugal et les Açores; Stn. 650, prof. 4400 m. Lat. 36° 54′ N; Long. 23° 12′ W. (*Princesse Alice*, 1896).

Pseudostichopus depressus, Hérouard

Pseudostichopus depressus, Hérouard, Holothuries Camp. *Princesse Alice*, p. 15, pl. II, f, 15-18; p.p. 52-53 (1902).

Hab.: Côte occ. — Entre le Portugal et les Açores. Stn. 753, prof. 4360 m. Lat. 39° 54′ N; Long. 28° 27′ W. (*Princesse Alice*, 1896).

Atlantis, Hérouard

Atlantis intestinalis (Asc. et Rathke)

var. Verrilli, Théel

Atlantis intestinalis (Asc. et Rathke); var. *Verrilli*, Théel — Hérouard, Holothuries Camp. *Princesse Alice*, p. 54, pl. I, f. 3-6, p.p. 50, 51 (1902).

Hab.: Côte occ. — Au sud de Lisbonne; Stn. 515, prof. 2028 m. Lat. 38° 21′ N. Log. 11° 58′ W (*Princesse Alice*, 1895).

Mesothuria, Lüdwig

Mesothuria lactea (Théel)

Holothuria lactea, Théel, Report on the Holothuroidea, *Challenger*, Pt. II, p. 183, pl. X, f. 9 et 15 (1886).
Mesothuria lactea, Théel — Hérouard, Holothuries Camp. *Princesse Alice*, p.p. 21, 50 et 51, pl. I, f. 17-19 (1902).

Hab.: Côte occ. — Côte du Portugal. Stn. 515, prof. 2028 m.

Lat. 38° 1' N. Long. 11° 58' W. au nord de Lisbonne (*Princesse Alice*, 1895).

Théel avait déjà signalée cette espèce dans les mers des Açores.

Paroriza, Hérouard

Paroriza Prouhoi, Hérouard

Paroriza Prouhoi, Hérouard, Holothuries Camp. *Princesse Alice*, p. 24, pl. VII, f. 1-2; pl. VIII, f. 30, p.p. 52, 53 (1902).

Hab.: — Entre le Portugal et les Açores. Stn. 753, prof. 4360 m. Lat. 39° 54' N. Long. 20° 27' W. (*Princesse Alice*, 1896).

FAM. ELASIPODÆ

Psychropotes, Théel

Psychropotes Kerhervei, Hérouard

Psychropotes Kerhervei, Hérouard, Holothuries Camp. *Princesse Alice*, p. 27, pl. IV, f. 1-9, p.p. 52, 53 (1902).

Hab.: Côte occ. — Dans les parages des Açores, entre ces îles et le Portugal. Stn. 749, prof. 5005 m. Lat. 38° 55' N. Long. 23° 39' W. (*Princesse Alice*, 1896).

Deima, Dub. og Koren

Deima atlanticum, Hérouard

Deima atlanticum, Hérouard, Deuxième note prél. Holoth. *Princesse Alice*, p. 88 (1898); Holothuries Camp. *Princesse Alice*, p. 32, pl. III, f. 3; pl. IV, f. 18; pl. V, f. 1-5; pl. VIII, f. 26-29, p.p. 52, 53 (1902).

Hab.: Côte occ. — Entre les Açores et le Portugal. Stn. 753, prof. 4360 m. Lat. 39° 54' N. Long. 20° 27' W. (*Princesse Alice*, 1896).

Kolga, Dub. og Koren

Kolga obsoleta, Hérouard

Kolga obsoleta, Hérouard, Première note Holoth. Princ. Alice,

p. 170, f. 1 (1896); Holothuries, Camp. *Princesse Alice*, p. 41, pl. VI, f. 11-15; pl. VIII, f. 16-18, p.p. 52, 53 (1902).

Hab.: Côte occ. — Entre le Portugal et les Açores. Stn. 753, prof. 4360 m. Lat. 39° 54′ N. Long. 20° 27′ W (*Princesse Alice*, 1896).

Scotoanassa, Théel

Scotoanassa translucida, Hérouard

Scotoanassa translucida, Hérouard. Première note Holoth. Princ. Alice, p. 172, f. 3 (1896); Holothuries Camp. *Princesse Alice*, p. 43, pl. III, f. 4-6; pl. VI, f. 17-20, p.p. 52, 53 (1902).

Hab.: Côte occ. — Entre le Portugal et les Açores. Stn. 753, prof. 5005 m. Lat. 39° 54′ N. Long. 20° 27′ W (*Princesse Alice*, 1896).

Fam. MALPADIÆ

Ankyroderma, Danielssen og Koren

Ankyroderma Danielsseni, Théel

Ankyroderma Danielsseni, Théel, Report on the Holothuroidea, *Challenger*, Pt. II, p. 39, pl. II, f. 6 (1886) — Hérouard, Holothuries Camp. *Princesse Alice*, p.p. 45, 50 et 51 (1902).

Hab.: Côte occ. — Au sud de Lisbonne. Stn. 338, prof. 2028 m. (*Princesse Alice*, 1893).

Fam. SYNAPTIDÆ

Synapta, Esch.

Synapta, esp.

Synapta..., D. Carlos de Bragança, Bulletin des Campagnes scientifiques accompl. sur le Yacht *Amelia*, v. I, p.p. 59, 74 et 75 (1902).

Hab.: Côte occ.—Fosse d'Albufeira. Stn. 17. prof. 230-300 m. environ; stn. 36, prof. 374-415 m. environ; stn. 38, prof. 460 400 m. environ. (Yacht *Amelia*).

Il n'est indiqué que le genre. Toutefois, comme nous verons plus loin, il y a deux espèces de *Synapta* qui doivent se trouver sur les côtes portugaises.

ESPÈCES D'ÉCHINODERMES QUE L'ON DOIT TROUVER SUR LES CÔTES DU PORTUGAL

Palmipes membranaceus, Retz.
Distrib. — Atlantique: France, Angleterre, Irlande.
— Méditerrannée.

Luidia Sarsi, Düb. og Kor.
Distrib. — Atlantique, depuis la Norvège jusqu'à Cap Vert.

Ophidiaster ophidianus (Lamk.).
Distrib. — Atlantique: Açores, Canaries, Iles de la Guinée, S. Thomé, Rollas.
— Méditerrannée.

Ophioglypha affinis, Lutk.
Distrib. — Atlantique nord.
— Méditerrannée, Adriatique.

Amphiura filiformis, Forbes.
Distrib. — Atlantique.
— Méditerrannée.

Ophiochnida brachiata (Montagu).
Distrib. — Atlantique nord.
— Méditerrannée.

Ophiotrix Lütkenii, W. Th.
Distrib. — Atlantique: Irlande, Açores.

Antedon phalangium, Marion.
Distrib. — Atlantique, Europe, Amérique nord, Madeira.
— Méditerrannée.

Echinus elegans (Düb. o. Kor.).
Distrib. — Atlantique.
— Méditerrannée.

Echinocardium flavescens, Müller.

Distrib. — Atlantique: depuis la Norvège jusqu'au Cap de Bonne Espérance, Florida.
— Méditerranée.

Spatangus purpureus, Müller.

Distrib. — Atlantique: Islande jusqu'aux Açores, Bermudes, Mers du Nord.
— Méditerranée.

Brissopsis lyrifera (Forbes).

Distrib. — Atlantique: Groenland jusqu'au Cap de Bonne Espérance.
— Méditerranée.

Cucumaria minuta (Holothuria) Fabr.

Distrib. — Atlantique nord.
— Méditerrannée.

C. Hydmanni (Holothuria) Thompson.

Distrib. — Atlantique nord.
— Méditerrannée.

C. Syracusana (Cladosdactyla) Grübe.

Distrib. — Atlantique afr.
— Méditerrannée.

C. pentactes (Linn.).

Distrib. — Atlantique nord.
— Méditerranée.

Thyone fusus, O. F. Müller.

Distrib. — Atlantique nord.
— Méditerranée.

T. raphanus, Düb. o. Kor.

Distrib. — Atlantique: Angleterre, Norvège.
— Méditerranée.

Holothuria Poli, Delle Ghiagi.

Distrib. — Atlantique nord, Canaries.
— Méditerranée.

Stychopus regalis (Cuvier).

Distrib. — Atlantique nord, Canaries.
— Méditerranée.

Synapta inherens (O. F. Müller).

Distrib. — Atlantique nord, États Unis.
— Méditerranée.

S. digitata (Mont.).

Distrib. — Atlantique nord, Amérique.
— Méditerranée.

DANIEL AUGUSTO DA SILVA
E LA TEORIA DELLE CONGRUENZE BINOMIE [1]

NOTA DEL

Prof. C. Alasia De Quesada
(in Brindisi)

La Teoria dei Numeri così apprezzata e proficuamente coltivata dai più grandi filosofi dell'antichità, come ne fan fede i nomi di Euclide e Diofanto, caduta poi in abbandono ingiustificato tanto da ridursi ad una curiosità speculativa, risorta poi con Fibonacci, Nemorarius, Oresme, Chuquet, Paciuolo, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Viète, Bachet de Meziriac..., ha oggi completamente ripreso l'alto posto che le compete, favorita dai potenti mezzi d'investigazione forniti dalla moderna Analisi. E serebbe studio interessante il ricercare per quali cause questa scienza decadesse così negli ultimi secoli: fu la credenza che la sua teoria fosse così limitata da esser stata quasi del tutto messa in luce nei lavori degli antichi filosofi e dei matematici del XVI e XVII secolo, o ne fu causa l'uso invalso di far apparire ogni nuova proprietà dei numeri quale questione di molto ardua risoluzione? Vediamo ad esempio Fermat

---

(1) Este bello e interessante trabalho foi publicado en 1903 no tom. IV da *Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali*, de Pavia. Transcrevemol-o aqui por ser nelle analysada uma memoria importante de Daniel Augusto da Silva de um modo muito honroso para este eminente geometra portuguez. Não fazemos a sua traducção, por estar escripta em uma lingua que todo o portuguez regularmente instruido lê com facilidade e que, por isso, é uma das que são admittidas nos artigos destinados a estes *Annaes*.

G. T.

obbedire anch'esso allo spirito del tempo col piegare il suo animo a rivalità scientifiche e proporre ai suoi contemporanei una delle più ricche serie di teoremi sui numeri, senza lasciare che un numero molto limitato di dimostrazioni di essi, per quanto possa con convinzione ritenersi che le abbia possedute tutte. Dopo di lui si ha una sosta: le scoperte di NEWTON e di LEIBNIZ avevano aperto differenti orizzonti alle ricerche dei matematici; ma eccoci al grande EULERO, l'incarnazione dell'Analisi, come lo chiamò ARAGO, a dedicare con passione (1) le forze del suo poderoso ingegno allo studio della Teoria dei Numeri ed a guadagnarsi la gloria di dare una delle più belle dimostrazioni del teorema di FERMAT, dimostrazione che per molto tempo fu ritenuta la prima che ne fosse stata data, e cioè fino al giorno nel quale GAUSS (2) mostrò di aver notizia di una più antica dimostrazione dovuta a LEIBNIZ, e che infatti ritrovasi nelle opere complete di questo insigne matematico pubblicate a cura di GERHARDT (1849-1863). E dopo EULERO ecco LAGRANGE a spaziare nei vasti campi di questa scienza difficile e creare il teorema dal quale più tardi EVARISTO GALOIS ha forse dedotto i suoi principi della teoria dei Gruppi; e dopo ecco LEGENDRE, e GAUSS, e POINSOT e CAUCHY, ed altri ed altri i cui nomi, a noi famigliari, è superfluo ricordare.

Spetta a mio avviso all'Accademia delle Scienze di Parigi il merito di aver richiamato l'operosità dei geometri allo studio della Teoria dei Numeri dedicando uno dei suoi premi alla dimostrazione di un teorema di FERMAT.

È questo il segno certo che ognuno aveva cominciato ad intuire qual posto eminente questa teoria dovesse occupare nell'Analisi moderna, anche prima che POINSOT nelle sue «*Refle-*

---

(1) Il est à croire aussi qu'EULER avoit un goût particulier pour ce genre de recherches, et qu'il s'y livroit avec une sorte de passion, comme il arrive à presque tous ceux qui s'en occupent. (LEGENDRE).

(2) GAUSS in *Disquisitiones arithmeticae*, § 50, dopo aver dato una dimostrazione del teorema di FERMAT, osserva: «*Euler primus demonstrationem publici juris fecit* (Theorematum quorundum ad numeros primos spectantium demonstratio. Commentari Academiae Petropolitanae, t. VIII). — *In Commentario anteriore vir summus ad scopum nondum pervenerat.* — *In controversia famosa inter Maupertuis et König a principio actionis minimae orta...., König in manibus se habere dixit autographum Leibnitianum, in quo demonstratio huius theorematis cum Euleriana prorsus cospirans continebatur. Licet vero fidem huic testimonio denegare nolimus, certe Leibnitius inventum suum nunquam publicavit.*» Cfr. G. VACCA in *Biblioteca Mathematica*, 1894, pag. 46-48, il quale vi espone pure la dimostrazione leibniziana.

xions sur les principes fondamentaux de la Théorie des Nombres» (Refl. Théo. Nom.) (1) scrivesse,

«Et cependant, pour peu qu'on y veuille réfléchir, il est aisé de voir que cette Arithmétique transcendante est comme le principe et la source de l'Algèbre proprement dite.... Car observez que ce peu qu'on decouvre par intervalles dans la science des propriétés des nombres est le peu qu'on ajoute de temps à autre à l'Algèbre.»

E ciò quasi a sanzione del giudizio di Legendre,

«En effet, il n'est pas de théorème sur les nombres qui ne soit pas relatif à la résolution d'une ou de plusieurs équations indeterminées».

Comunque sia noi vediamo alla fine del xviii secolo ed al principio del xix i matematici d'ogni nazione darsi con ardore alle ricerche aritmetiche, ed è da quell'epoca che comincia una nuova e ricca serie di nomi che portarono nei più alti spazi la teoria dei numeri, Gauss, Kummer, Dedekind, Lejeune-Dirchlet, Riemmann, De Polignac, Libri, Tchebycheff, Eisenstein, Genocchi, Smisth, Stieltjes, ecc., per non nominare che una sola parte di coloro che la morte ha già rapito alla scienza.

Ma vi è una cosa che colpisce colui che scorre la ricca serie di memorie od i trattari generali che formano la letteratura di questa teoria: nulla o quasi nulla incontra che in particolare si riferisca alle *Congruenze numeriche,* e lasciate le ricerche di Eulero e di Gauss su tale soggetto, e salvo qualche rara ricerca incidentale, deve giungere alle belle memoire di Tchebycheff e di Stielitjes, od agli *«Eléments de la Théorie des Nombres»* di Cahen per vedere questa teoria messa al suo giusto posto. E vero che Serret nel suo *«Traité d'Algèbre supérieure»* dà molte indicazioni che si riferiscono ad essa, mà in questo trattato, come pure in quello di E. Lucas, è persino esclusa la teoria delle forme quadratiche.

Ciò farebbe credere giustamente a chi che sia che fino ai giorni nei quali questi matematici scrissero nulla di nuovo o di notevole si fosse fatto su questa bella e ricca teoria delle Congruenze numeriche, e che si fosse rimasti là ove ebbero termine le ricerche di Eulero, Gauss e Legendre. E maggiormente si confermerebbe in tale sua opinione se scorresse la bibliografia che accompagna la memoria classica di Stieltjes,

(1) In parentisi indico l'abbreviazione che userò nel citare l'opera. Così farò nel seguito.

nella quale dopo i nomi di Eulero, Legendre, Lagrange e Gauss, non ritrova che quegli altri di S. Smith, Biernatzki, Mathiessen.

Non è dunque del tutto strana la maraviglia da me provata nello scorgere un giorno a Nizza sul banco d'un rivenditore di vecchie stampe un grosso fascicolo sul quale la parola *Congruenze binomie* spiccava a grossi caratteri. L'intero titolo «*Propriedades geraes et resolução directa das Congruencias binomias*, por **Daniel Augusto da Silva**» confermò la mia sorpresa, non avendo mai ritrovato alcun cenno nè sull'autore nè sulla memoria in nessuno dei trattati o delle memorie da me lette, benchè pur da una rapida scorsa potesse rilevarsi essere questa memoria del matematico portoghese del più grande interesse, ricca di formule nuove, di nuove dimostrazioni e applicazioni di teoremi classici. Il fascicolo in parola, stampato a Lisbona nel 1854, dovette appartenere all'eminente geometra francese Liouville, giacchè sulla prima facciata è la dedica manoscritta: «A. M. Liouville, hommage de l'Auteur».

L'interesse in me destato dalla lettura di questa memoria mi spinse a ricercare maggiori ragguagli sul suo autore, intuendo che la mente che si manifestava in quelle pagine doveva aver dato alla scienza un largo contributo. Ne scrissi al Colonello Alfredo Schiappa Monteiro, professore a Lisbona, e questi, con cortesia unica più che rara, ricercò e mise a mia disposizione la maggior parte di ciò che porta il nome di Da Silva (1). Appresi così che Daniel Augusto da Silva nacque in Lisbona il 16 maggio 1814 e che nel 1829 entrò nella compagnia delle guardie marine creata nel 1782 dal Marchese de Pombal, percorrendo successivamente, dal 1829 al 1835, l'Accademia Reale di marina fondata nel 1779 e trasformata poi nell'attuale Scuola Politecnica, e l'Accademia Reale delle Guardie-marine creata il 1°. aprile 1796 e che diede luogo in seguito all'attuale Scuola navale. Nel frattempo, cioè il 25 agosto 1833, fu nominato Guardia marina e potè così percorrere la carriera marittima, lasciando di appartenervi il 31 dicembre 1868 col grado di Capitano di Fregata.

Dal 1836 erasi iscritto nell'Università di Coimbra, seguendone regolarmente e con molta lode i quattro anni di corso. Il 27 maggio 1845 fu nominato Professore nella Scuola Navale alla quale aveva appartenuto, e conservò tale cattedra fino al

(1) Il Prof. Gomes Teixeira ha pubblicato nel *Boletim da Direcção Geral de Instrucção Publica* (Lisboa, 1902, t. I) un cenno riassuntivo della vita e dell'opera matematica di questo Geometra.

1865. Eletto socio corrispondente della Reale Accademia delle Scienze di Lisbona il 19 giugno 1850, passò socio effettivo il 27 gennaio 1852. Tradusse ed annotò da prima le «*Recordações do anno de 1842*» del Principe LICHNOWSKY, che publicò nel 1844 (Lisboa, Imprensa Nacional) e scrisse poi una ricca serie di memorie (1), fra le quali sono soprattuto notevoli la «*Memorie sobre a rotação das forças em torno dos pontos de applicação*» (in folio, inserita nel t. III, parte 1ª serie 2ª delle Memorie della Reale Accademia di Lisbona), ove, sviluppando le teorie create da MÖBIUS e da MINDING, ottenne nuovi e notevoli risultati, ad alcuni dei quali giunse venticinque anni dopo il DARBOUX ignorando le ricerche di DA SILVA, e la memoria che ha per titolo «*Da transformação e reducão dos binarios*» (in-folio, inserita nel t. III, parte 2ª serie 2ª della stessa raccolta). Della memoria sulle congruenze binomie che forma l'oggetto della presente nota scrisse solo alcuni capitoli giacchè in quel lasso di tempo, 1852, fu assalito da grave infermità che concedendogli brevi soste, ma sempre più aggravandosi, lo tolse di vita il 6 ottobre 1878, dopo che da oltre venti anni lo aveva quasi completamente tolto alla scienza.

Non è mio intendimento l'esaminare, sia pur sommariamente, l'intera opera matematica di DA SILVA, ma solo di dare uno sguardo alle sue ricerche sulle congruenze binomie, ricerche quasi sconosciute od a torto neglette, per quanto in esse siano dei risultati preziosi, alcuni dei quali mancano anche nelle memorie più recenti ed alcuni furono più tardi ritenuti nuovi quando furono incontrati da altri studiosi, quali ad esempio i metodi di risoluzione dei sistemi di congruenze che STIELTJES attribuisce esclusivamente ad S. SMITH (Philosophical Transactions for 1861, vol. 151).

È noto che un numero a dicesi *congruo* con zero rispetto ad un modulo p se è divisible per p, e che i due numeri a e b sono congrui rispetto al modulo p se la loro differenza è un multiplo di p. Usando la notazione introdotta da GAUSS scriveremo nei due casi,

$$a \equiv 0 \,(mod\; p), \quad a \equiv b \,(mod\; p),$$

e conserveremo questa notazione anzichè quella usata dal DA SILVA,

$$a \equiv 0\, Mp, \quad a \equiv b\, Mp.$$

(1) Per una bibliografia degli scritti di D. A. DA SILVA veggasi RODOLPHO GUIMARÃES, *Les Mathématiques en Portugal au XIX siècle*. Coimbre, 1900.

Dalla definizione segue naturalmente che tutti gli interi congrui con un intero b rispetto ad un modulo p, $(b<p)$, sono contenuti nell'espressione

$$np+b\,,\quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$$

La totalità di questi interi forma una *classe* C_b di risidui di modulo p, e comprende tutti quegli interi che divisi per p danno b per resto. Le p classi C_0, C_1, C_2, ... C_{p-1} formano un *sistema completo* di classi di residui di modulo p.

Un numero qualunque $\pm n$ può avere infiniti residui rispetto al modulo p; diciamo *residuo minimo* il più piccolo di essi.

Dalle identità

$$(np+b)\pm(mp+c)=(n\pm m)p+(b\pm c)\,,$$

$$(np+b)(mp+c)=(nmp+nc+mb)p+bc\,,$$

risulta evidentemente,

$$C_b\pm C_c=C_{b\pm c}\,,\quad C_b\,C_c=C_{bc},\ \text{ecc.}$$

Così pure se esiste la relazione

$$C_b=C_c\,C_x,\quad (C_b\,C_0)$$

diciamo che C_x è il quoziente di C_b per C_c. La condizione di esistenza di tale quoziente è evidentemente identica alla condizione di esistenza della soluzione x dell'equazione $cx+lp=b$, soluzione che per b e c interi arbitrari, e per c non divisibile per p, esiste sempre che vien verificata la condizione, necessaria e sufficiente, di essere p un numero primo.

Possiamo in particolare notare che le classi di residui rispetto ad un modulo primo possono esser combinate mediante le operazioni razionali dell'Algebra, e che ogni risultato è esso stesso una classe di residui.

Il teorema fondamentale nella risoluzione delle Congruenze è devuto a LAGRANGE, e ritrovasi nella memoria: «*Nouvelles methodes pour resoudre les problèmes indeterminés en nombres entiers*», (Oeuvres, t. II): una congruenza

$$a_1x^m+a_2x^{m-1}+a_3x^{m-2}+\ldots+a_m\equiv 0\ (mod\,p)$$

di grado m, il cui modulo p è primo assoluto ed é primo col

coefficiente a, non ha più di m radici. DA SILVA dà una elegante dimostrazione di questo teorema, dimostrazione tanto più notevole in quanto che differisce dalle numerose che furono date e che si basano sull'analoga proprietà delle equazioni, e passa poi a stabilire una celebre formula per primo trovata da EULERO, inserita nel t. XVIII dei *Novi Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* (1), (*Nov. Acad. Scien. Petr.*), fondamentale nella teoria dei numeri, che simbolicamente si scrive usando il simbolo ϕ introdotto da GAUSS (2)

$$(1) \qquad \phi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots,$$

o meglio

$$(1') \qquad \phi(n) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots (a-1)(b-1)(c-1)\ldots\ldots$$

Questa formula dà per qualunque valore di n il numero di interi minori di n e primi con esso; sono $a, b, c, \ldots$ i fattori primi di $n\,(n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots)$. EULERO stesso dà con questo suo teorema una dimostrazione elegante e generale che SERRET riporta nel vol. II del suo «*Traité d'Algèbre superieure*»; ma, o non fosse tal dimostrazione ritenuta sufficente dall'autore, o allo scopo di mostrare non essere difficile cosa darne altre dimostrazioni, EULERO ne inserisce due nuove in *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* pel 1780 (Act. Acad. Scie. Petrop.), parte 2.ª che però non hanno i meriti della prima giacchè una troppo induttiva e l'altra non è, come l'autore osserva, che lo sviluppo delle operazioni da eseguirsi per ottenere il valore di $\phi(n)$. Quest'ultima dimostrazione fu oggetto di critica da parte di POINSOT il quale osservò (*Ref. Theo. Nom.*) che essa manca di rigore. Egli ne pose anzi in evidenza i difetti allo scopo di evitarli in una nuova dimostrazione, ma entrò egli stesso in una così lunga serie di induzioni da far sì che non sia facile scorgere se egli sia giunto

(1) O nella memoria «*Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata*, — pubblicata nel 1759 e contenuta a pag. 274 del t I di *Leonardi Euleri Commentationes arithmeticae collectae*. — Petropoli, 1849.

(2) *Werke*, t. I, pag. 30. — EULERO, *Acta Acad. Petrop.*, t. IV, II, pag. 18 (1780) aveva proposto il simbolo π. DA SILVA usa il simbolo φN, ma noi preferiamo scrivere quello di GAUSS, come quello che è comunemente usato. Del resto le nostre notazioni differiranno molto spesso da quelle del matematico portoghese.

ad una dimostrazione più rigorosa e più semplice di quella da lui criticata.

Gauss a sua volta in *Disquisitiones Arithmeticae* (*Dis. Ar.*), Brunswich 1801, pigliò in esame la predetta formula considerando il caso particolare nel quale n è potenza d'un numero primo e giunse ad un'espressione generale della quale più tardi farò cenno; ma la sua dimostrazione, molto ingegnosa, è però meno semplice di quella di Poinsot. Anche Legendre, *Théorie des nombres*, (Théo. No., II, pag. 65, 3ª ediz., 1830), come già fece Eulero nella dimostrazione criticata da Poinsot, considerò la forma speciale dello sviluppo di $\phi(n)$, proponendo una formula che determina quanti numeri si hanno fra l'*uno* ed un dato limite abbastanza grande, formula che più tardi diede luogo ad interessanti ricerche di Lejeune-Dirichlet che in una nelle sue memoire contenute nel t. XVIII del *Giornale di Crelle* annunciò di aver trattato le questioni di tal genere con rigoroso metodo analitico. Egli infatti era giunto a dimostrare con una brillante analisi che «ogni progressione per differenza il cui primo termine e la ragione sono primi fra loro, contiene una infinità di numeri primi», il che in altre parole equivale al dire che la formula $ax+b$, dove a e b non hanno divisori comuni, contiene un'infinità di numeri primi. J. A. Serret nella sua «*Note sur un théorème de la théorie des nombres* (Journal de Mathématiques, XVII, 1852) servendosi del precedente teorema mostrò nello stesso anno nel quale la memoria di Da Silva fu presentata all'Accademia portoghese che «se n è un numero intero qualunque, ciascuna delle otto relazioni $8n+h$, $12n+h$, $(h=1, 3, 5, 7)$ contiene un numero primo maggiore di n», ossia, in altri termini, che ciascuna di queste otto relazioni contiene un'infinità di numeri primi. Nella stessa epoca (1852) Tchebycheff pubblicava nel t. XVII del Journal de Mathématiques una memoria «*Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*», che fin dal 1848 era stata presentata all'Accademia di Pietroburgo, nella quale dimostrava:

1° che se $\phi(x)$ rappresenta la totalità dei numeri primi inferiori ad x ed n e p rappresentano rispettivamente un intero qualunque ed una quantità maggiore di zero, la somma

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left(\phi(x+1)-\phi(x)-\frac{1}{\log x}\right)\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

gode della proprietà di accostarsi ad un limite finito col convergere di ρ a zero;

2° che fra i limiti $x=2$ e $x=\infty$ la funzione $\psi(n)$ soddisfa una infinità di volte alle due diseguaglianze

$$\psi(x)>\int_2^x \frac{dx}{\log x}-\frac{\alpha x}{\log^n x},\quad \psi(x)<\int_0^x \frac{dx}{\log x}+\frac{\alpha x}{\log^n x},$$

per quanto piccolo sia il valore di α supposto positivo e per quanto grande sia al tempo stesso il numero n;

3° che l'espressione $\frac{x}{\psi(x)}-\log x$, per $x=\infty$ non può avere un limite diverso dalla quantità -1;

4° che $\psi(x)$ può rappresentarsi algebricamente con approssimazione data da quantità dell'ordine $\frac{x}{\log^n x}$ inclusivamente mediante le funzioni x, $\log x$, e^x, ed allora essa si esprimerà mediante la formula

$$\frac{x}{\log x}+\frac{1x}{\log^2 x}+\frac{1.2.x}{\log^3 x}+\ldots+\frac{1.2.3\ldots(n-1)\,x}{\log^n x}.$$

Da questo teorema deduciamo facilmente che se $\psi(x)$ può esprimersi algebricamente fino alle quantità dell'ordine $\frac{x}{\log x}$, $\frac{x}{\log^2 x}$, ... inclusivamente, essa dovrà esprimersi nelle forme

$$\frac{x}{\log x},\ \frac{x}{\log x}+\frac{1\,.\,x}{\log^2 x},\ \frac{x}{\log x}+\frac{1\,.\,x}{\log^2 x}+\frac{1\,.\,2\,.\,x}{\log^3 x},\ \ldots,$$

e di più, siccome queste somme non sono che i successivi valori dell'integrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, siamo in diritto di concludere che in ognuna di tali ipotesi questo integrale esprime $\psi(x)$ con approssimazione che va fino alla quantità dell'ordine pel quale esso può ancora esprimersi algebricamente mediante x, $\log x$, e^x.

Così, mediante le tavole dei numeri primi che attualmente possediamo, possiamo convincerci che la forma $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ per x molto grande esprime con sufficente approssimazione quanti

sono i numeri primi inferiori al numero x. Questa formula ha molta superiorità su quella di LEGENDRE

$$\varphi(x) = x / (\log x - 1{,}08366),$$

e sulle altre analoghe e mostra una volta di più la fallacità dell'assioma di BERTRAND [1] che vuole che a partire de $x > 3$ si abbia sempre un numero primo maggiore di x e minore di $2(x-1)$.

La dimostrazione che LEGENDRE *(loc. cit.)* fece seguire a quelle di POINSOT e GAUSS presuppone nel lettore la conoscenza di sviluppi che il testo non contiene, difetto questo nel quale cadde anche F. S. MARGIOCHI nella dimostrazione che dà di questo teorema nelle sue *Instituições Mathematicas.*

DA SILVA si propone di dare, non già una dimostrazione diretta del teorema (1'), ma di stabilire una formula simbolica che dia quella dimostrazione come caso particolare.

Indichi S una serie qualunque di numeri, che intendiamo riuniti e non sommati, potendo alcuni esser negativi senza perciò dar luogo a riduzione alcuna, e indichi $S(a)$ l'insieme dei termini di tal serie che godono di una certa proprietà a, $S(b)$, $S(bc)$, $S(abc)$, ... l'insieme dei termini della serie che godono della proprietà b, o delle proprietà b e c, o delle proprietà a, b, e c simultaneamente, ecc.: sia ancora $S(b)_c$ l'insieme dei termini di $S(b)$ che godono della proprietà c, e così via. Evidentemente date queste relazioni è

$$S(a)_b = S(ab), \quad S(a)_{bc} = S(ab)_c = S(abc), \text{ ecc.}$$

In modo analogo rappresenti $(a)S$ quel gruppo di termini di S che sono privi della proprietà a: $(ab)S$ quel gruppo di termini di S che son privi della proprietà a e della proprietà b; $(b)_a S$ quel gruppo di termini di $(a)S$ che mancano della proprietà b; ecc. Se i termini di S^I, ad esempio, risultano dalla soppressione dei termini dei gruppi S^{II}, S^{III}, ecc. i quali si compongono dei gruppi S^{IV}, S^V, ecc., cioè se

$$S^I = S^{II} + S^{III} + \ldots - S^{IV} - S^V - \ldots,$$

è chiaro che sarà

$$S^I(a) = S^{II}(a) + S^{III}(a) + \ldots - S^{IV}(a) - S^V(a) - \ldots$$

---

(1) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, XXX cah.

Premesse queste notazioni evidentemente è

$$(a)\,S = S - S(a) = S\,[1-(a)]\,,$$

dove la lettera a ha sempre il significato simbolico predetto. Da questa eguaglianza deduciamo,

$$(ba)\,S = (b)_a\,S = [1-(a)]\,[1-(b)]$$

(2) $$(cba)\,S = (c)_{ba}\,S = S\,[1-(a)]\,[1-(b)]\,[1-(c)]\,,$$

e cioè in generale [1]

$$(\ldots cba)\,S = S\,[1-(a)]\,[1-(b)]\,[1-(c)]\ldots$$

Questa formula simbolica dà non solo l'insieme dei termini dei quali si compone il simbolo al primo membro ma anche la somma di essi se nel secondo membro si affettua la somma algebrica dei valori $S(a)$, $S(b)$,... che entrano nello sviluppo. Si trasforma poi facilmente in una elegante espressione che dà la somma di tutti i numeri minori di n e primi con esso. Consideriamo infatti il secondo membro della (2) quale somma algebrica delle espressioni simboliche che lo compongono, ed esprimiamo il valore di esse: è,

$$S(1) = 1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)\,,$$

$$S(a) = S(A) = A + 2A + 3A + \ldots + A^{\alpha}\,B^{\beta}\,C^{\gamma}\ldots$$

$$= \frac{1}{2}\,(A + A^{\alpha}\,B^{\beta}\,C^{\gamma}\ldots)\,A^{\alpha-1}\,B^{\beta}\,C^{\gamma}\ldots = \frac{1}{2}\,n\left(\frac{n}{A}+1\right)$$

avendo supposto

$$n = A^{\alpha}\,B^{\beta}\,C^{\gamma}\ldots,$$

ed A, B, C,... primi fra loro.

Similmente

$$S(b) = \frac{1}{2}\,n\left(\frac{n}{B}+1\right),\ldots,\quad S(ab) = \frac{1}{2}\,n\left(\frac{n}{AB}+1\right),\ldots\ \text{ecc.}$$

---

[1] Una dimostrazione di questa formola simbolica fu data nel 1857 da F. Horta negli *Annaes de Sciencias*, An. 1, pag. 705.

Per avere il valore che cerchiamo sommiamo membro a membro i valori di tutti i simboli che entrano in (2) e riuniamo le due somme. La prima di queste si otterrà evidentemente sostituendo n ad S, e $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, ... ad a, b, ... e moltiplicando per $\frac{1}{2}n$ il risultato. Si avrà,

$$\frac{1}{2}n \, . \, n\left(1-\frac{1}{A}\right)\left(1-\frac{1}{B}\right)\ldots=\frac{1}{2}n \, . \, \phi(n).$$

I secondi termini dei binomi sostituiti in (2) danno il risultato stesso che si avrebbe supponendo

$$S(1)=S(a)=S(b)=\ldots=S(ab)=S(ac)=\ldots=\frac{1}{2}n,$$

per cui è,

$$\frac{1}{2}n(1-1)(1-1)\ldots=0.$$

Se dunque indichiamo con Σn la somma di tutti i numeri minori di n e primi con esso, è

$$\Sigma n=\frac{1}{2}n \, . \, \phi(n). \tag{3}$$

Per n primo, essendo allora $\phi(n)=n-1$, si avrà,

$$\Sigma n=\frac{1}{2}n(n-1),$$

come d'altra parte è evidente, giacchè

$$\Sigma n=1+2+3+\ldots+(n-1). \tag{4}$$

Se n ammette un fattore dispari maggiore di 1, la funzione $\phi(n)$ stessa ci mostra che essa è divisibile per 2, e dunque la (3) mostra che Σn è multiplo di n. Analoga conclusione si ha se $n=2^{\alpha}$, $(\alpha>1)$. Dunque Σn è sempre multiplo di n eccetto che per $n=1$ ed $n=2$.

Se poi innalziamo a potenza m ciascuno dei termini di (4) e

ne indichiamo con $\Sigma_m n$ la somma, è, [1]

$$(4') \quad \Sigma_m n = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (n-1)^m = \frac{n(n-1)}{(m+1)!} F,$$

indicando con F un polinomio di grado $(m-1)$ a coefficenti interi; se n è primo è

$$\Sigma_m n \equiv 0 \pmod{n},$$

e se è $m = p - 1$, è pel teorema di Fermat

$$\Sigma_m n = 1 + 1 + \ldots + 1 \equiv p - 1 \pmod{p}.$$

Potrebbe obiettarsi che la formula (3) è implicitamente contenuta in quella data da Binet (*Comptes-Rendus* de l'Ac. d. Scien. de Paris, t. XXXII, n.° 26), per la determinazione delle potenze n^{me} dei numeri minori di n e primi con esso; ma si osservi d'altra parte che la formula di Binet può esser dedotta dalla (2) sostituendo in questa ai diversi simboli $S(a)$, $S(b)$,... le corrispondenti somme di potenze dei numeri naturali espresse mediante i numeri B_1, B_2, B_3,... che «*ab inventore Iacobo Bernouilli vocari solent Bernouilliani* [2]». Una qualunque di tali somme, ad esempio $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$ è data dalla serie

$$\frac{(n+1)^{m+1} - 1}{m+1} - [(n+1)^m - 1] B_1 + m[(n+1)^{m-1} - 1] B_2 + \ldots$$

od anche meglio dalla formola [3]

$$\frac{n^{m+1}}{m+1} + n^m B_1 + m n^{m-1} B_2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} n^{m-3} B_4 + \ldots$$

nella quale è da sopprimersi il termine affetto da n^{m-m}, giacchè nella serie dalla quale esso risulta è $x^x = 1$ per $x = 0$.

---

(1) Per una dimostrazione di questa formula veggasi E. Lucas, *Théorie des Nombres*, pag. 235 e 244, ed anche P. Apell, — *Sur les polynomes qui expriment la somme des puissances* p — *ièmes des* n *premiers nombres entiers*. — Nouvelles Annales, 1887, pag. 315.

(2) Eulero, — Calc. Differ. t. II, § 122. Egli li indica con $B_1, B_3, B_5, \ldots$; la notazione qui usata è quella di Binet (*Journ. de Ecole Polyt.* 1839. t. XVI, cah. 27, pag. 240). e da Ohm.

(3) Cfr. ad es. Kramp, *Eléments d'Arithmétique Universelle*, §§ 597 e 598.

Per dedurre dalla (2) le formule generali (1) e (1') indichiamo con $\varphi(\ldots cba)S$ il numero di termini contenuti in $(\ldots cba)S$, e se alla caratteristica φ diamo significato analogo tanto se è applicata alle serie additive che a quelle sottrative, è evidentemente

$$(5)\qquad \varphi(\ldots cba)S = \varphi S[1-(a)][1-(b)]\ldots$$

Notiamo ora che se la serie S fosse quella dei numeri naturali, sarebbe,

$$1, 2, 3, \ldots, n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots (a, b, c \ldots \text{ primi fra loro})$$

e se con A, B, C, ... indichiamo la divisibilità di un termine di tal serie per a, o per b, o per c, ... abbiamo,

$$S(A) = S(a), \quad S(B) = S(b), \ldots, \quad S(AB) = S(ab), \ldots$$
$$S(ABC) = S(abc), \ldots, \quad (\ldots CBA)S = (\ldots cba)S,$$

ed anche

$$\varphi S(a) = \frac{n}{a}, \quad \varphi S(b) = \frac{n}{b}, \ldots,$$

$$\varphi S(ab) = \frac{n}{ab}, \quad \varphi(\ldots cba)S = \psi(n),$$

per cui la (5) si cambia nell'altra

$$\psi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$
$$= a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots (a-1)(b-1)(c-1)\ldots$$

che è appunto la formula di Eulero.

Evidentemente per $n = a^\alpha$ è $\psi(n) = a^{\alpha-1}(a-1)$, e se n è primo assoluto è $\psi(n) = n - 1$.

Deduciamo subito quale corollario del teorema di Eulero che se p, q sono numeri primi fra loro, è [1],

$$\psi(n) = \psi(pq) = \psi(p) . \psi(q)$$

---

[1] Cfr. Dedekind, *Giornale di Crelle*, t. LIV, pag. 21.

e in generale se p, q, r,.. w sono numeri primi fra loro,

$$\varphi(p.q.r\ldots w)=\varphi(p).\varphi(r.s\ldots w)=\ldots=\varphi(p).\varphi(q).\varphi(r)\ldots\varphi(w),$$

formula che coincide con quella alla quale è giunto Gauss nell'ipotesi particolare già accennata di essere nella (1′) il numero n potenza d'un numero primo, e in particolare

$$\varphi(a^\alpha.b^\beta.c^\gamma\ldots)=\varphi(a^\alpha).\varphi(b^\beta).\varphi(c^\gamma)\ldots$$

$$\varphi(a^\alpha)=a^\alpha\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

La (4′) permette una generalizzazione, e cioè

$$\Sigma a_i^{\varphi(p)\,\varphi(a_i)}\equiv n-1\,(mod\,p),\quad (i=1,2,3,\ldots)$$

nella quale p è un numero qualunque formato di n fattori primi fra loro $(p=a_1.a_2.a_3\ldots)$. Questa espressione è tanto più rimarchevole in quanto che basta farvi $p=a_1.a_2$ perchè non solo ammetta come caso particolare ma anche dimostri la celebre formula data da Eulero a pag. 75 del t. VIII di *Nova Act. Acad. Scien. Petrop.*,

$$a^{\varphi(p)}-1\equiv 0\,(mod\,p),$$

(p primo con a) che è generalizzazione del ben noto teorema

$$a^{p-1}-1\equiv 0\,(mod\,p),$$

formulato da Fermat, senza dimostrazione, in una lettera datata 18 ottobre 1640 (l'indirizzo vi manca) (1) e che è riportato a pag. 162 della «*Varia Opera Mathematica D. Petri de Fermat*»: «Ogni numero primo misura infallibilmente una delle potenze, — 1, di qualche progressione qualunque *(cioè geometrica)* e l'esponente della detta potenza è sottomultiplo del numero primo dato, meno 1».

Come prima ho notato incidentalmente, Eulero ricercò una dimostrazione di questo teorema, nella ferma credenza di non aver in ciò avuto predecessori, infruttuosamente da prima,

(1) P. Tannery e Ch. Henry vogliono che questa lettera sia indirizzata a Frenicle.

come rilevasi da una di lui osservazione inserita a pag. 106 del t. VI dei *Nov. Acad. Scien. Petr.*, e con bel successo dopo, ricorrendo ad un metodo induttivo abbastanza semplice. Questa dimostrazione, che è nel t. VIII della raccolta suddetta, fu a breve distanza seguita da una nuova dimostrazione dello stesso autore, ancor più semplice della prima. L'interesse posto da EULERO a dimostrare e generalizzare la formula di FERMAT è segno certo del grande valore che ragionevolmente le attribuiva, e che tale interesse non fosse a lui solo limitato lo confermano le felici ricerche di nuove dimostrazioni da parte di LAMBERT (*Nova Acta Eruditorum,* 1769), di LAGRANGE (*Nouv. Mém.* Berlino, 1771, — *Oeuvres,* t. III, 425), di LAPLACE (*Traité du Calcul Différent.*, t. III, 722), di DIRICHLET (*Giorn. di Crelle*, t. III, 392).

Dato il grande valore delle ricerche di questi matematici è da ammirare DA SILVA che si accinge a dare egli stesso una nuova dimostrazione, con lo stabilire da principio una elegante relazione che dimostra e dalla quale può dedurre i teoremi di FERMAT e di EULERO nonchè una ricca serie di formule particolari che implicitamente contengono quelle delle quali POINSOT si serve a pag. 32 delle *Ref. Théo. Nom.* nella sua dimostrazione del teorema di EULERO. A sua confessione DA SILVA non conosceva che le dimostrazioni del teorema di FERMAT date da EULERO e GAUSS, per cui la sua dimostrazione appare improntata alla maggiore originalità, ciò che forse non sarebbe avvenuto se gli fossero state note anche le altre dimostrazioni, giacchè forse non sarebbe riuscito a superare l'influenza che esse avrebbero esercitato su di lui.

***

Non fra i punti più importanti trattati dal DA SILVA, ma rimarchevole per l'ingegnosa semplicità è la risoluzione diretta delle congruenze lineari ad una e più incognite, e più particolarmente della congruenza

$$(6)\qquad ax \equiv c \pmod b\,,$$

o dell'equivalente equazione indeterminata

$$(6')\qquad ax + by = c\,,$$

dove x e y sono numeri interi, la cui risoluzione è da LEGENDRE *(Additions à l'Algèbre d'Euler)* rivendicata a BACHET- DE MEZIRIAC,

nella cui opera «*Problèmes plaisantes et délectables qui se font par les nombres*» apparve per la prima volta. La risoluzione che ne diede Eulero, che è nel t. VII dei *Nov. Acad. Scie. Petr.* per quanto più breve e razionale, si approssima molto a quella di Bachet, ma si ha ragione di ritenere che egli ignorasse l'esistenza di essa. Tal soluzione è quella che ritrovasi in quasi tutti gli ordinari trattati sotto il nome di metodo degli indeterminati. Più tardi Lagrange (*Storia dell'Accademia di Berlino*, 1757, pag. 175) potè notare che le operazioni che servirono ad Eulero coincidono con quelle alle quali si ricorre per solito nella determinazione delle ridotte della frazione $\frac{a}{b}\left(\text{o } \frac{b}{a}\right)$, e potè mostrare che la penultima ridotta $\frac{x'}{y'}$ di $\frac{a}{b}$ dà appunto la soluzione dell'equazione $ax - by = \pm 1$. Potè allora molto facilmente concluderne la soluzione di $ax - by = \pm c$.

Poinsot (*Op. cit.*) dà due soluzioni della congruenza $ax \equiv 1$ $(mod\, b)$, rimarchevoli soprattuto per le numerose illustrazioni geometriche dalle quali sono accompagnate; ma spogliate di queste, la prima soluzione riducesi ad una successiva verificazione, e la seconda più che altro è un'utile esercitazione analitica che guida a formule generali. Fra tutte è forse più pregevole, perchè più rigorosa e diretta, la soluzione che è a pag. 199 della *Théo. No.* di Legendre (3ª ediz.), ed è quella stessa, salvo qualche modificazione, alla quale giunge Da Silva nella formula

$$x = ca^{\psi(1-b)} + zb.$$

Il metodo è però ben esteso dal geometra portoghese alla risoluzione dell'equazione (6'), dove s'intendono a e b primi fra loro, nella quale, supposto senza nuocere alla generalità, a e b positivi, per il che basta scrivere l'equazione sotto la forma

$$a(\pm x) + b(\pm y) = c,$$

si ha,

$$\pm x = ca^{\psi(b-1)} + zb, \quad \pm y = c\frac{1 - a^{\psi(b)}}{b} - za,$$

formule che nelle applicazioni pratiche conviene meglio scrivere

$$\pm x = c\left[a^{\psi(b-1)}\right] + zb, \quad \pm y = c\frac{1 - a\left[a^{\psi(b-1)}\right]}{b} - za,$$

indicando con $\left[a^{\psi(b-1)}\right]$ il residuo minimo di $a^{\psi(b-1)}$ rispetto al

modulo b. Queste formule sono di grande semplicità nelle applicazioni numeriche e il calcolo del residuo minimo è semplice, essendo in generale

$$[a^{\Sigma p_i}] = [a^{p_1}][a^{p_2}]\ldots, \quad a^{\Pi p_i} = [\ldots[a^{p_1}]^{p_2}]\ldots].$$

Applicando le precedenti formule ad esempio all'equazione $31x + 19y = 181$ si ha,

$$x \equiv [181][31]^{17} (mod\, 19), \quad \text{ossia } x = 10[12]^{17},$$

e $\quad [12]^{16+1} \equiv 12[144]^8 \equiv 12[11]^8 \equiv 12[121]^4 \equiv 12[7]^4 \equiv 12[49]^2$

$$\equiv 12[11]^2 \equiv 12.7 \equiv -7.7 \equiv -11 \equiv 8,$$

per cui,

$$x \equiv 80 \equiv 4, o, x \equiv 4 + 19z,$$

valore che sostituito nell'equazione proposta dà

$$y = \frac{181 - 31x}{19} = 9 + \frac{10 + 31x}{19} = 3 - 31x.$$

Il metodo si applica poi con analoga semplicità alla risoluzione della congruenza

$$ax + by + cz\ldots \equiv k (mod\, p),$$

dove a, b, c,... non hanno divisori in comune con p: si ha ad esempio,

$$x \equiv [a^{\varphi(p-1)}][k - (by + cz + \ldots)].$$

Dove però può maggiormente riconoscersi l'utilità di questo metodo si è nella determinazione dei valori di x che soddisfano al sistema

$$(7) \qquad ax \equiv \alpha (mod\, \mathrm{A}), \quad bx \equiv \beta (mod\, \mathrm{B}), \ldots,$$

dove A, B, ... sono primi fra loro. E noto che il sistema é possibile se nella prima congruenza ad esempio, avendo a ed A un divisore in comune, questo divide pure α, ed è pur noto che i valori di x saranno congrui secondo il modulo composto $n = \mathrm{ABC}\ldots$, giacchè se x' e x'' sono due soluzioni è $x' - x''$ divisibile per A, in virtù della prima delle congruenze date, per B in virtù della seconda, ecc., e dunque pel loro prodotto n. Il valore di x si deduce facilmente dalla soluzione della (6) e

si scrive,

$$x \equiv \alpha\left[\frac{n}{A}\left(a\frac{n}{A}\right)^{\psi(A-1)}\right]+\beta\left[\frac{n}{B}\left(b\frac{n}{B}\right)^{\psi(B-1)}\right]+\dots\ (mod\, n).$$

Le generalizzazioni poi che Da Silva dà di questi risultati lo conducono a formule che con ammirevole semplicità si prestano alla discussione di una ricca serie di problemi numerici. Così ad esempio, posto che q, r, s,... siano tali che

$$(8)\qquad q\frac{n}{A}+r\frac{n}{B}+s\frac{n}{C}+\dots\equiv 1\ (mod\, n),$$

si ha

$$(8')\qquad x\equiv\alpha\left[q\frac{n}{A}\,a^{\psi(A-1)}\right]+\beta\left[r\frac{n}{B}\,q^{\psi(B-1)}\right]+\dots$$

formula [1] che si semplifica notevolmente quando sia $q=r=s\dots$ giacchè allora alla (8) vien sostituita la condizione

$$q\left[\frac{n}{A}+\frac{n}{B}+\dots\right]\equiv 1\ (mod\, n),$$

congruenza sempre possibile per essere q primo con n, ed allora alla (8′) si sostituisce l'altra formula

$$x\equiv\alpha q\left[\frac{n}{A}\,a^{\psi(A-1)}\right]+\beta q\left[\frac{n}{B}\,b^{\psi(B-1)}\right]+\dots$$

Se poi supponiamo ancora $a=b=c=\dots=1$, questa formula si semplifica ancora diventando

$$(8'')\qquad x\equiv\alpha q\frac{n}{A}+\beta q\frac{n}{B}+\dots,$$

che è analoga a quella alla quale é giunto Gauss (*Dis. Ar.* § 36) nel suo metodo di risoluzione del sistema

$$x\equiv\alpha\,(mod\, A),\quad x\equiv\beta\,(mod\, B),\dots,$$

ove i moduli sono numeri primi fra loro.

[1] Perchè questo valore soddisfi alla prima, ad esempio, delle (7), basta che verifichi la congruenza $x\equiv\alpha\left[q\frac{n}{A}\,a^{\psi(A-1)}\right]$; e siccome è $a^{\psi(A)}\equiv 1\ (mod\, A)$, ed è $q\frac{n}{A}\equiv 1$, per la condizione (8) il precedente valore di x diventa $ax\equiv a\ (mod\, n)$.

Evidentemente se nella ($8''$) riduciamo il secondo membro al suo residuo minimo rispetto al modulo n, otteniamo una formula che dà la serie di numeri primi con n e minori di esso.

Quando il numero di congruenze formanti il sistema dato sia considerevole conviene moltiplicare ordinatamente tali congruenze per $\frac{n}{A}$, $\frac{n}{B}$, ..., e sommare i risultati. Si ha allora,

$$\left(a\frac{n}{A}+b\frac{n}{B}+\dots\right)x \equiv \alpha\frac{n}{A}+\beta\frac{n}{B}+\dots (mod\, n)$$

ed è chiaro che ogni valore di x che soddisferà questa congruenza sempre possibile, soddisferà pure al sistema (7). Il valore di x sarà dunque dedotto da essa,

$$x \equiv \left[\left(a\frac{n}{A}+b\frac{n}{B}+\dots\right)^{\phi(n-1)}\right]\left(\alpha\frac{n}{A}+\beta\frac{n}{B}+\dots\right)(mod\, n).$$

Si nota facilmente che questa formula comprende la ($8''$) quando si faccia $a=b=c=\dots=1$.

Da Silva, come già avevano fatto Eulero e Gauss, non cerca direttamente la risoluzione della congruenza

$$(9) \qquad x^s \equiv 1\ (mod\, p)$$

nella quale p è primo o è un prodotto di fattori primi Nel primo caso egli si contenta di mostrare che le radici di questa congruenza sono quelle di

$$(9') \qquad x^{p'} \equiv 1\ (mod\, p)$$

essendo p' il massimo comun divisore fra s e $p-1$. Può così stabilire l'interessante proposizione: «ogni congruenza ($9'$) ha un numero di radici primitive rappresentato da $\phi(p')$», della quale dà due dimostrazioni più dirette di quelle che ne erano note, e più rimarchevoli per le numerose conseguenze che se ne deducono. La seconda di tali dimostrazioni, pur non partendo dai principi dai quali Gauss era partito, conduce allo stesso elegante procedimento, e la prima, che sussiste pure pel caso di p' numero primo, ammette come corollario il teorema importante per tutta una teoria che vi si fonda, «qualunque radice non primitiva di ($9'$), dove sia $p'=q^{\alpha}r^{\beta}s^{\gamma}\dots$ è radice della congruenza $x^{\theta}\equiv 1\,(mod\, p)$, dove si è messo θ per $q^{\alpha-\alpha'}r^{\beta-\beta'}s^{\gamma-\gamma'}\dots$,

e posto che $\alpha'\beta'\gamma',\ldots$ non siano tutti nulli simultaneamente». Questo teorema, che fu per primo enunciato da LAMBERT in *Acta Eruditorum* pel 1769, diede luogo ad una dimostrazione di EULERO inserita a pag. 85, t. XVIII dei *Comm. Acad. Scie. Petrop.* qualificata poco rigorosa da GAUSS il quale ne dà due altre ai paragrafi 53 a 55 di *Dis. Ar.*, non però dirette in quanto che la prima, ad esempio, fa dipendere le radici della congruenza di grado $p'=q^\alpha r^\beta s^\gamma\ldots$ da quelle delle congruenze di grado $q^\alpha, r^\beta, s^\gamma,\ldots$ La dimostrazione datane da LEGENDRE a pag. 16 del t. II della *Théo. Nom.* si avvicina molto alla dimostrazione di EULERO. Abbiamo poi le due dimostrazioni contenute nelle *Ref. Théo. Nom.* di POINSOT, una poco evidente, semplicissima l'altra dalla quale, dopo dimostrata l'esistenza di una radice primitiva, deduce l'esistenza di $\psi(p')$ radici di tale classe semplificando così la dimostrazione di GAUSS. Anche la dimostrazione che dà SERRET a pag. 316 del suo *Cours d'Algèbre supérieure* segue la stessa via tracciata da GAUSS nella sua prima dimostrazione.

Anche nel caso nel quale in (9) il modulo p è un prodotto di fattori primi, non erano stati dati metodi diretti di risoluzione, ma solo metodi indiretti, o per meglio dire esempi di successive verifiche. Così vediamo che nel caso nel quale p ha un divisore primo, cioè nel caso

$$x^s \equiv 1 \;(mod\, q^\alpha),$$

GAUSS in *Dis. Ar.* § LXXXVIII ne fa dipendere la soluzione da quella della congruenza $x^s \equiv 1\;(mod\, q^{\alpha-1})$, per modo che, determinata una qualunque delle radici di $x^s \equiv 1\;(mod\, q)$, si hanno successivamente radici congrue con tale radice secondo il modulo q, e che soddisfano alle congruenze di moduli q^2, q^3, $q^4,\ldots$, q^α. Che nessun altro procedimento più breve e diretto fosse noto lo deduciamo dal fatto che LEGENDRE, *Théo. Nom.* t. II, pag. 21, 3ª ed. e POINSOT, *Ref. Théo. Nom.* cap. IV, art. 4, riproducono il solo metodo di GAUSS e neppure incidentalmente fanno cenno di altri metodi, e che anche nel caso nel quale è $p=q^\alpha r^\beta s^\gamma\ldots$, caso nel quale GAUSS deduce la soluzione di (9) dalla soluzione di congruenze parziali aventi rispettivamente q^α, r^β, $s^\gamma\ldots$ per moduli, tanto LEGENDRE che POINSOT si contentano di dare un maggior sviluppo al metodo anzidetto.

Il procedimento che DA SILVA ha saputo sostituire al metodo precedentemente ricordato, e che gli permette di giungere a formule generali e dirette sia nel caso nel quale il modulo è un numero primo che nel caso nel quale esso è prodotto di

potenze di numeri primi, si basa quasi per intero sul noto teorema di GAUSS, *Dis. Ar.* § LXXXVI:

$$(10) \qquad (a+yp^q)^\mu = a^\mu + Yp^{q+t},$$

dove è $\mu = sp^t$, e dove si è indicato con p un numero primo maggiore di 2, con a, y, Y, s numeri primi con p, e con q, s numeri eguali o maggiori di 1, mentre t è un numero maggiore o eguale a zero. Egli è obbligato di dare di questo teorema una dimostrazione che meglio si accordi con lo scopo al quale deve servire, non potendosi contentare nè della dimostrazione già datane dallo stesso GAUSS e che si riassume in una verificazione della formula per $t = 1, 2, \ldots$, nè di quella data da POINSOT, *Ref. Théo. Nom.* cap. IV, basata sulla formula binomiale. Così DA SILVA trovasi condotto ad una felice generalizzazione della (10) che nella sua forma originaria è un difetto per $p=2$, $q=1$, e dalla discussione rigorosa e diretta è tratto ad una ricca serie di teoremi nuovi ed importanti sui residui. Ed è qui curioso ed interessante notare come GAUSS e POINSOT non solo ritenessero entrambi cosa difficile che si potesse dare una dimostrazione diretta di quel teorema, ma ne facessero anche espresso avvertimento, notando il primo (*Dis. Ar.*, § LXXXVI):

«demonstratio hujus theorematis ex evolutione protestatis binomii peti posset, si ostenderetur omnes terminos post secundum per p^{t+q+1} divisibiles esse. Sed quoniam consideratio denominatorum coefficientium in aliquot ambages deducit, methodum sequentem praeferimus»,

ed il secondo osservando che (*Ref. Théo. Nom.* cap. IV, § 30),

«la démonstration immédiate de ce théorème, qui paraît facile au prémier coup d'oeil, présente néamnoins beaucoup de difficultés, à cause de l'exposant composé sp^t d'où naissent les coefficients du binôme. Mais voici un moyen très simple de sortir de cet embarras, ecc. ...».

Voglio ancora far cenno d'un problema al quale DA SILVA fu necessariamente condotto dalla natura stessa del soggetto da lui impreso a trattare, problema che già da molto tempo prima aveva richiamato l'attenzione dei dotti ma che era lungi dall'aver raggiunto quel grado di brevità e semplicità che richiedeva, grado che solo oggi può dirsi aver raggiunto. Intendo parlare dei metodi per la costruzione delle tavole che danno le radici primitive dei numeri primi. EULERO insegnò alcuni espedienti per ottenere tali radici nel t. XVIII dei *Nov. Acad. Scien. Petr.* ma egli stesso si accorse dell'imperfezione di essi,

e notò che è difficile cosa ottenere tali radici mediante procedimenti diretti. Neppur Gauss e neppure Legendre seppero suggerire una via più diretta e dobbiamo giungere fino a Poinsot, *Ref. Théo. Nom.* pag. 73, per ritrovare un metodo sistematico atto allo scopo.

Nella sua prima parte il metodo di Da Silva non differisce essenzialmente da quello di Poinsot, ma lo completa ove comincia a diventar difettoso. — Ottenuti i residui non quadratici ed elevati questi a potenza B, ricavati da questi residui tutte le potenze di B che devono essere escluse dalla serie dei residui non quadratici, ed analogamente operato sulle potenze C, D, ecc., si rimarca che si ha un numero abbastanza grande di operazioni che si ripetono periodicamente e che non fanno che rendere il metodo troppo laborioso. Si nota ad esempio che per escludere le potenze B si debbono formare $\frac{1}{2}(p-1)$ potenze di questo grado, nel mentre che il numero di quelle che debbono essere escluse è solo di $\frac{p-1}{2B}$. A Poinsot non sfugge questo difetto e cerca rimediarvi con alcuni utili suggerimenti riferentisi a casi particolari, che però non hanno valore nella maggioranza di essi, specialmente quando trattisi di numeri primi di una certa grandezza.

Lo scopo che Da Silva si propone e nel quale riesce sufficentemente, è appunto quello di dare norme precise e generali per evitare le inutili ripetizioni. Tali norme applicate agli esempi particolari prescelti da Poinsot conducono ai risultati stessi ai quali quest'ultimo è giunto ma con un numero ristrettissimo di operazioni, giacchè con esse non è neppure necessario verificare la distribuzione delle serie di residui, come volta a volta deve fare Poinsot. Col metodo del geometra portoghese non è neppur sempre necessario formare un primo gruppo di $\frac{p-1}{2B}$ termini, e le potenze che devono formarsi sono potenze ascendenti di uno stesso numero anzichè potenze di egual esponente di numeri successivi, il che è molto più vantaggioso nei calcoli numerici.

Avanti Poinsot esistevano però due altri metodi di risoluzione dello stesso problema. E possible che egli ne ignorasse l'esistenza? Verosimilmente no, ma è certo che non poteva accordare ad essi il pregio che è obbligato a negare al suo metodo, ed è forse questa la causa per la quale egli non ne fa parola. Il primo di tali metodi, molto anteriore alla pubblica-

zione di POINSOT che venne nel gennaio 1845, è dovuto ad IVORY ed è nel 4° volume del Supplemento all'Encicolopedia Britannica pel 1824. L'autore lo stima diretto, giacchè a pagina 698 dice: «l'esistenza di tali numeri (le radici primitive) è quindi dimostrata per ogni caso, ma nessun metodo diretto era stato fin qui dato per determinarli, a quanto si sa. *Siamo dunque lieti di cogliere questa occasione per dare una regola che permette di determinare direttamente le radici primitive d'un numero primo*». Tal metodo si basa su d'un teorema che IVORY non dimostra, ma del quale la dimostrazione è semplice. Esso è il seguente:

«Sia $p = 2^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$: qualunque radice primitiva di p soddisferà alla prima delle congruenze.

$$x^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1 \equiv 0, \quad x^{\frac{1}{2b}(p-1)} + 1 \equiv 0, \quad x^{\frac{1}{2c}(p-1)} + 1 \equiv 0, \ldots$$

e non soddisferà a nessuna delle seguenti: e reciprocamente, qualunque radice non primitiva soddisferà ad una od a più di tali congruenze ma non mai alla prima».

Ottenuti quindi i residui non quadratici, questi dovranno successivamente esser provati fino a ritrovarne uno che non sia radice della seconda o di qualcuna delle predette congruenze. Questo numero sarà allora una radice primitiva che col suo innalzamento a potenza ci darà tutte le altre radici primitive. Si scorge quindi che questo metodo anzichè diretto è di successivi tentativi, e come uno di tali tentativi può pur essere ripetuto tante volte quanti sono i residui non quadratici che non sono radici primitive.

Desta meraviglia che dopo aver notato come i residui quadratici non soddisfino alla prima delle precedenti congruenze IVORY non abbia rilevato la proprietà pressochè evidente che fra i residui non quadratici quelli che non sono potenze b non soddisfano alla seconda di tale congruenze, e che dedotti questi, non soddisferanno alla terza delle congruenze quelli fra i numeri rimanenti che non sono potenze c, e così via. Ciò lo avrebbe condotto direttamente al metodo di POINSOT che perciò più del suo merita di essere considerato maggiormente diretto.

Il secondo dei metodi ai quali ho fatto allusione precedentemente è dovuto a CAUCHY ed è nel t. IV degli *Exercices de Mathématique* (1820), e non può neppur esso considerarsi diretto richiedendo una lunga serie di tentativi. POINSOT non fa neppur allusione a questo procedimento che pur doveva conoscere e SERRET non riporta nel suo *Cours d'Algèbre Supe-*

rieure (1849) che il solo metodo di Poinsot senza neppure accnare alle semplificazioni che questi vi aveva introdotte pei casi particolari, per quanto siano gli esempi stessi dati da Poinsot quelli che egli riporta.

I vantaggi che il metodo seguito dal Da Silva ha sui metodi precedenti sono incontestabili e sarebbero indubbiamente stati riconosciuti subito se la sua infermità non gli avesse impedito di dare diffusione alle sue ricerche. Tali vantaggi si mostrano in tutta la loro pienezza quando specialmente il metodo sia applicato a numeri sufficentemente grandi.

Certamente un gran passo erasi fatto dopo le ricerche di Cauchy, di Poinsot, d'Ivory, ecc., con la pubblicazione del «*Canon Arithmeticus sive tabulae quibus exhibentur pro singulis numeris primis*» (Berlino, 1869), fatta «impensis Academiae Litterarum Regiae Borusicae», e corretta «cura et benevolentia virorum clarissimorum, Professorum Dirichlet, Dove, Steiner; Doctorum Wolfers, Bremiker, Galle..., maximas autem gratias ago illustrissimo Enke qui et his emendatricibus curis proesidere et summo studio ac benevolentia me egregiis consiliis in adornando opere adjuvare voluit». Questa preziosa opera non è menzionata dal Da Silva che pure avrebbe trovato in essa un grande ausiliario specialmente nella risoluzione delle congruenze della forma $ax^m \equiv b \, (mod\, p^n)$. Iacobi aveva enunciato il principio che le radici primitive secondo il modulo p^2 lo sono pure secondo il modulo p^n, e ciò come conseguenza dell'assioma che quando si sia trovata una radice primitiva $x<p$ secondo il modulo primo p si possono sempre determinare direttamente le radici primitive rispetto al modulo p^n. Si può dunque, rappresentando con a un intero qualunque primo con p^n e minore di questo, determinare un intero α od $ind\, a < p^{n-1}(p-1)$ tale che $x^{\mathrm{ind}\, a} \equiv a$ $(mod\, p^n)$ (¹).

Per dare un cenno pressochè completo delle ricerche di Da Silva dovrei ancora soffermarmi su altre interessanti questioni. La risoluzione delle congruenze il cui modulo è una potenza di 2, in relazione alle ricerche di Poinsot su tale soggetto (*Ref. Théo. Nom.* cap. IV, § VII), lo conducono ad una serie d'interes-

---

(¹) Lo scopo del *Canon* di Iacobi è la risoluzione della congruenza predetta; ma esso è pur utile, come l'hanno dimostrato Eisènstein e poi Lebesgue, a far conoscere i coefficienti interi $a_0, a_1, \ldots$ dell'equazione $p = f(\rho) . f(\rho^{-1})$ ove è $\rho^m = 1$, $p = m\omega + 1$, $m > 1$,

$$f(\rho) = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \ldots + a_{m-1} \rho^{m-1}.$$

santi formule sulle radici primitive. Lo studio della congruenza

$$(11) \qquad x^{D} \equiv 1 \pmod{p},$$

essendo $p = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}, \ldots$, ed a, b, c, primi fra loro, e la cui soluzione vien basata su quella delle congruenze

$$(11') \qquad x^{D'} \equiv 1 \pmod{a^{\alpha}}, \quad x^{D''} \equiv 1 \pmod{b^{\beta}}, \ldots$$

dove D′, D″,... sono i massimi divisori comuni fra D e ciascuno dei valori $\psi(a^{\alpha})$, $\psi(b^{\beta})$,..., lo conducono attraverso una rigorosa sintesi alla formula generale

$$x \equiv A q_1 \frac{q}{a^{\alpha}} + B q_2 \frac{p}{b^{\beta}} + \ldots \pmod{p}$$

nella quale q_1, q_2,... sono numeri tali da soddisfare all'equazione di condizione

$$q_1 \frac{p}{a^{\alpha}} + q_2 \frac{p}{b^{\beta}} + \ldots \equiv 1 \pmod{p},$$

ed A, B, C,... sono rispettivamente radici delle (11′). Possiamo incidentalmente notare che la (11) ammette come caso particolare la congruenza $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, e il procedimento di Da Silva ne dà il numero di radici, e per conseguenza dà al tempo stesso una dimostrazione del teorema di Wilson generalizzato, dimostrazione che Gauss fa dipendere dall'ipotesi che sia pari o doppiamente pari il numero di radici di $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, e che Poinsot sviluppa basandosi su due differenti ipotesi, la prima delle quali consiste nel supporre che non si abbiano sistemi di radici comuni nella scomposizione della congruenza precedente nelle due

$$x - 1 \equiv 0 \pmod{p}, \quad x + 1 \equiv 0 \pmod{Q},$$

($PQ = p$), e l'altra consiste nell'ammettere che quando p fosse parimenti pari, anche 2^{k-1} debba indicare il numero delle decomposizioni in due fattori, senza altri divisori comuni che il due.

Lo studio della congruenza $ax^s \equiv b \pmod{p}$, dove p è un numero qualunque, conducono ad un'estesa investigazione sulle proprietà e sul calcolo dei radicali modulari, teoria che, oltre

all'interesse che offre per sè stessa, è notevole per i punti di contatto che essa ha con la teoria degli ordinari radicali e pone in maggior evidenza l'analogia fra le radici delle congruenze e quelle delle equazioni binomie, analogia che molto ingegnosamente era stata mostrata da Poinsot nella sua «*Mémoire sur l'application de l'Algèbre à la Theorie des Nombres*».

L'analisi particolare di queste e altre ricerche di Da Silva in relazione a quelle dei suoi predecessori e dei suoi contemporanei porterebbe questa mia nota al di là dei limiti che mi ero imposti. Lascio quindi per riprendere l'argomento in altra occasione.

SUR UNE CLASSE DE VARIÉTÉS ENGENDRÉES PAR DES SYSTÈMES LINÉAIRES PROJECTIFS D'HYPERSURFACES

NOTE DE

MATTEO BOTTASSO

Le CREMONA dans son classique Mémoire «*Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*» (Memorie dell'Acc. delle scienze di Bologna — (2), 7; 1867) a étudié les variétés engendrées par des systèmes linéaires projectifs de courbes planes et de surfaces. Ces considérations ont été développées pour les hyperespaces dans des travaux des MM. VERONESE (¹), ROBERTS (²), PIERI (³), SEGRE (⁴), etc., en étudiant les variétés engendrées par les intersections des variétés correspondantes de plusieurs systèmes linéaires d'hypersurfaces. Savoir, on a envisagé le lieu Θ engendré par les intersections des variétés, de dimension $d-n+c-1$, homologues dans une correspondance projective entre $m+1$ systèmes linéaires $A_0, A_1, \ldots, A_m$ d'hyper-

---

(1) *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens.* «Math. Annalen», 19; 1882.

(2) *Sur l'ordre des conditions de la coexistence des équations algébriques à plusieurs variables.* «Journ. für Math.», 67; 1867.

(3) *Sull'ordine della varietà generata da più sistemi lineari omografici.* «Rend. del Circolo mat. di Palermo», 11; 1896.

(4) *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice* «Rend. R. Acc. Lincei», (5), 9; 1900.

surfaces de l'hyperespace fondamental $[d]$. Ces systèmes linéaires, de même dimension n, se supposent formés par des hypersurfaces dont l'ordre l_i $(i=0, 1, \ldots, m)$ peut varier de l'un à l'autre des systèmes A_i.

Pour renfermer dans la représentation de la variété Θ les nombres dont elle va dépendre, on l'indiquera avec $\Theta\begin{pmatrix} m, n; c; d \\ l_0, l_1, \ldots, l_m \end{pmatrix}$.

Les surnommées variétés, de dimension $d-n+c-1$, homologues dans la projectivité entre les systèmes A_i $(i=0, 1, \ldots, m)$, sont encore les variétés-soutiens des systèmes d'hypersurfaces, de dimension $n-c$, qui appartiennent aux systèmes linéaires A_i et se correspondent dans la projectivité indiquée.

Les entiers positifs m, n, c, d satisfont à des inégalités évidentes, sur lesquelles nous ne nous attarderons pas; on doit avoir, p. ex.: $0 \leq c \leq \min(m, n)$.

Les entiers positifs $l_0, l_1, \ldots, l_m$ ne pourront être tout à fait arbitraires, si l'on fait des hypothèses restrictives sur les systèmes linéaires A_i. S'ensuit que, lorsqu'on pose des pareilles conditions restrictives, ce serait une *faute* dire encore que l'ordre et la dimension de la variété $\Theta\begin{pmatrix} m, n; c; d \\ l_0, l_1, \ldots, l_m \end{pmatrix}$ ne dépendent que des nombres m, n, c, d, l_0, $l_1, \ldots, l_m$ (1). On peut donner à ce sujet, dans le même espace à trois dimension, un exemple très simple, qui montre la vérité de ce que nous venons d'affirmer. Il suffit envisager le $\Theta\begin{pmatrix} 2, 2; 1; 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ intersection des droites homologues dans trois gerbes projectives.

Si les trois gerbes sont dans une position générale, le lieu Θ n'existe pas, savoir sa dimension et sont ordre son zéro; si au contraire les trois gerbes ont certaines positions particulières, ces caractères ont des valeurs différentes de zéro. Ainsi, soient les trois gerbes représentées analytiquement par les trois systèmes, d'équations:

$$\lambda_0 F_{00} + \lambda_1 F_{01} + \lambda_2 F_{02} = 0\,,$$
$$\lambda_0 F_{10} + \lambda_1 F_{11} + \lambda_2 F_{12} = 0\,,$$
$$\lambda_0 F_{20} + \lambda_1 F_{21} + \lambda_2 F_{22} = 0\,,$$

(1) Cette remarque est substantiellement contenue dans la Note de M. G. Z. GIAMBELLI. «*Sulle varietà rappresentate coll'annullare determinanti minori contenuti in un determinante simmetrico ed emisimmetrico generico di forme*» Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 41; 1906. Cfr. la note au fond de la page 43.

et la projectivité soit définie en disant homologues les plans, dans les trois gerbes, qui correspondent (à un facteur de proportionnalité près) aux mêmes valeurs des paramètres $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Alors si l'on pose, par exemple, la condition particulière que la forme (linéaire) F_{ik} soit égale identiquement à F_{ki} (pour toutes les valeurs de $i, k = 0, 1, 2$), on obtient comme $\Theta\begin{pmatrix} 2, 2; 1; 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ un groupe de quatre points.

D'après cet exemple on est amené, tout naturellement, au *problème général suivant:*

Considérons dans l'hyperespace $[d]$ le groupe d'hypersurfaces $F_{ik} (i = 0, 1, \ldots, m; k = 0, 1, \ldots, n)$ des ordres $l_i (i = 0, 1, \ldots, m)$, qui satisfont aux conditions:

1.° $\quad l_0 = l_1 = \ldots = l_\nu$, où $\nu = \min(m, n)$;

2.° $\quad F_{ik} \equiv F_{ki}$, pour toutes les valeurs de $i, k = 0, 1, \ldots, \min(m, n)$.

Soit A_i le système linéaire de dimension n, défini par les hypersurfaces $F_{i0}, F_{i1}, \ldots, F_{in}$ et soit $(i, k) = 0$ l'équation de F_{ik} $(i = 0, 1, \ldots, m; k = 0, 1, \ldots, n)$.

Considérons entre les systèmes $A_i (i = 0, 1, \ldots, m)$ la projectivité dans laquelle à l'hypersurface d'équation

$$\lambda_0 . (0, 0) + \lambda_1 . (0, 1) + \ldots + \lambda_n . (0, n) = 0 ,$$

du système A_0, va correspondre dans le système $A_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ l'hypersurface d'équation

$$\lambda_0 . (i, 0) + \lambda_1 . (i, 1) + \ldots + \lambda_n . (i, n) = 0 ,$$

où les $n + 1$ paramètres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ont (à un facteur de proportionnalité près) les mêmes valeurs, pour chaque groupe de $m + 1$ hypersurfaces homologues.

Dans cette projectivité se correspondent les hypersurfaces $F_{0k}, F_{1k}, \ldots, F_{mk}$ (pour $k = 0, 1, \ldots, n$). Les variétés, de dimension $d - n + c - 1$, homologues dans cette correspondance projective engendreront une $\Theta\begin{pmatrix} m, n; c; d \\ l_0, l_1, \ldots, l_m \end{pmatrix}$.

Quelle dimension et quel ordre a cette variété?

Jusqu'à présent on n'a répondu à cette question que pour le cas de $m = n$ dans la Note indiquée de M. le Prof. Segre, au moyen d'une formule très intéressante de M. H. Schubert (Cfr. Math. Annalen, 45; 1894 «*Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades in* n *Dimensio-*

nem»). Nous nous proposons dans cette Note la résolution de la question posée. Même, avec une plus grande généralité, nous résoudrons l'équivalente question analytique qui suit, de laquelle nous donnerons aussi les plus simples interprétations géométriques:

Soient $(i, k)\,(i = 0, 1, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, n)$ *des formes de degrés fixés (convenablement) dans les variables* $x_0, x_1, \ldots, x_d$, *que nous supposerons coordonnées homogènes de point dans l'hyperespace* $[d]$. *Trouver la dimension et l'ordre de la variété* $\Omega(m, n; c; d)$, *représentée en égalant à zéro tous les déterminants mineurs d'ordre* $c+1$, *qu'on peut tirer de la matrice symétrique générale*

$$\|(i, k)\|\,(i = 0, 1, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, n),$$

savoir telle que l'on a
$(i, k) = (k, i)$, *pour toutes les valeurs de* $i, k = 0, 1, \ldots, min\,(m, n)$.

Dans le cas de $m = n$ cette question analytique a été résolue, avec un'élégante formule, par M. G. Z. Giambelli dans sa Note citée «*Sulle varietà rappresentate coll'annullare i determinanti minori ecc.*».

§ 1. Sans atteindre à la généralité de la question nous pouvons supposer $m \leq n$. La matrice symétrique considérée sera alors représentée par le tableau (rectangulaire lorsque $m < n$) suivant:

$$\left\|\begin{array}{cccccccc}
(0,0) & (0,1) & \ldots & (0,m-1) & (0,m) & (0,m+1) & \ldots & (0,n) \\
(0,1) & (1,1) & \ldots & (1,m-1) & (1,m) & (1,m+1) & \ldots & (1,n) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(0,m-1) & (1,m-1) & \ldots & (m-1,m-1) & (m-1,m) & (m-1,m+1) & \ldots & (m-1,n) \\
(0,m) & (1,m) & \ldots & (m-1,m) & (m,m) & (m,m+1) & \ldots & (m,n)
\end{array}\right\|$$

Les (i, k) sont des formes, dans les $x_0, x_1, \ldots, x_d$ d'ordres $p_i + p_k$, où pour les nombres $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sont seulement possibles les deux cas suivants:

1°) $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sont des entiers positifs ou nuls, mais pas tous égaux à zéro;

2°) $p_0 - \frac{1}{2}, p_1 - \frac{1}{2}, \ldots, p_n - \frac{1}{2}$ sont des entiers positifs, zéro compris.

Etant μ, c des entiers qui satisfont aux conditions $0 \leq \mu \leq c \leq m$, nous indiquerons avec $\Omega(m, n; c, \mu; d)$ la variété intersection de $\Omega(m. n; c; d)$ avec la variété $\Omega(\mu, n; \mu; d)$ représentée par l'annullement de la matrice $\|(i, k)\|$ $(i = 0, 1, \ldots, \mu; k = 0, 1, \ldots, n)$.

On reconnait alors au moyen des théorèmes très généraux 2ième et 3ième du § 2 du Mémoire «*Ordine di una varietà più ampia di quella rappresentata coll'annullare tutti i minori di dato ordine d'una matrice generica di forme*» de M. G. Z. Giambelli (Memorie del R. Istit. Lombardo (3), 11; 1904) que l'ordre $\binom{m, n; c, \mu}{p_0, p_1, \ldots, p_n}$ de $\Omega(m, n; c, \mu; d)$ est une fonction qui satisfait à l'équation fonctionnelle suivante:

$$(1) \qquad (p_{\mu-1} - p_\mu) \cdot \binom{m, n; c, \mu}{p_0, p_1, \ldots, p_n}$$

$$= \binom{m, n; c, \mu - 1}{p_0, p_1, \ldots, p_n} - \binom{m, n; c, \mu - 1}{p_0, p_1, \ldots, p_{\mu-2}, p_\mu, p_{\mu-1}, p_{\mu+1}, \ldots, p_n}.$$

D'après la définition de l'ordre de $\Omega(m, n; c, \mu; d)$, on reconnait tout de suite que la fonction $\binom{m, n; c, \mu}{p_0, p_1, \ldots, p_n}$ ne change pas sa valeur lorsqu'on va permuter entre elles soit les lettres du groupe $p_0, p_1, \ldots, p_\mu$, soit celles du groupe $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_n$.

Désignons avec $\varphi(p_0, p_1, \ldots, p_n; \mu)$, où c'est $0 \leq \mu \leq n$, une fonction des $p_0, p_1, \ldots, p_n$ et μ, qui satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(2) \quad (p_{\mu-1} - p_\mu) \cdot \varphi(p_0, p_1, \ldots, p_n; \mu) = \varphi(p_0, p_1, \ldots, p_n; \mu - 1)$$
$$- \varphi(p_0, p_1, \ldots, p_{\mu-2}, p_\mu, p_{\mu-1}, p_{\mu+1}, \ldots, p_n; \mu - 1),$$

laquelle, en outre, ne change pas se valeur en permutant, d'une façon quelconque, entr'elles les lettres $p_0, p_1, \ldots, p_\mu$, et entre elles $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_n$. On peut voir aisément par induction, suivant de près, par exemple, la démonstration particulière donnée dans le § 5 (pages 115 et 116) du Mémoire cité de M. Giambelli, que la fonction $\varphi(p_0, p_1, \ldots, p_n; \mu)$ doit aussi satisfaire à l'équation fonctionnelle suivante:

$$P(\mu) \cdot \varphi(p_0, p_1, \ldots, p_n; \mu)$$
$$= \sum_{r=0}^{r=\mu} (-1)^r P(\mu; r) \cdot \varphi(p_r, p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_n; 0),$$

où avec $P(\mu)$ on a désigné le produit de $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ facteurs

$$\begin{aligned}(p_0-p_1).(p_0-p_2).(p_0-p_3).\dots.(p_0-p_\mu).\\ .(p_1-p_2).(p_1-p_3).\dots\ (p_1-p_\mu).\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ .(p_{\mu-1}-p_\mu),\end{aligned}$$

et

$$P(\mu,r)$$
$$=\frac{P(\mu)}{(p_0-p_r)(p_1-r)\dots(p_{r-1}-p_r)(p_r-p_{r+1})(p_r-p_{r+2})\dots(p_r-p_\mu)}.$$

Sous autre forme, avec plus d'élégance, on peut écrire

$$\varphi(p_0, p_1,\dots,p_n;\mu)$$
$$=\sum_{r=0}^{r=\mu}\frac{\Delta(p;\mu,r)}{\Delta(p;\mu)}\varphi(p_r, p_0, p_1,\dots,p_{r-1}, p_{r+1}, p_{r+2},\dots,p_n;0),$$

où $\Delta(p;\mu)$ est le déterminant simple de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ p_0 & p_1 & \dots p_\mu \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ p_0^\mu & p_1^\mu & \dots p_r^\mu \end{vmatrix}$$

des $p_0, p_1,\dots,p_\mu$, et $\Delta(p;\mu,r)$ (pour $r=0, 1,\dots,\mu$) est le subdéterminant correspondant à l'élément p_r^μ dans le déterminant $\Delta(p;\mu)$.

De cette propriété de la fonction $\varphi(p_0, p_1,\dots,p_n;\mu)$ il suit, en particulier, que notre fonction $\left(\begin{matrix} m, n; c, \mu \\ p_0, p_1,\dots,p_n\end{matrix}\right)$ doit satisfaire à

l'équation fonctionnelle

$$(3)\qquad \begin{pmatrix} m, n; c, \mu \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{r=0}^{r=\mu} \frac{\Delta(p; \mu, r)}{\Delta(p; \mu)} \begin{pmatrix} m, n; c, 0 \\ p_r, p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_n \end{pmatrix}.$$

§ 2. La variété $\Omega(m, n; c, 0; d)$ résulte l'intersection d'une certaine variété $\Omega(m-1, n-1; c, c; d)$ avec les $n+1$ hypersurfaces, dont les respectives équations sont

$$(0, k) = 0, \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Nous avons donc

$$(4)\qquad \begin{pmatrix} m, n; c, 0 \\ p_r, p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_n \end{pmatrix}$$

$$= (p_r + p_0)(p_r + p_1)\ldots(p_r + p_n) \begin{pmatrix} m-1, n-1; c, c \\ p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_n \end{pmatrix},$$

où il faut, cependant, regarder égal à l'unité le symbole $\begin{pmatrix} m-1, n-1; c, c \\ p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_n \end{pmatrix}$ lorsque $c = m$.

Ces relations nous laissent déduire l'expression de $\begin{pmatrix} m, n; c, \mu \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$ par la considération de la question auxiliaire suivante:

Si $r_1, r_2, \ldots, r_u$ sont u entiers différents choisis parmi $0, 1, \ldots, n$, nous indiquons avec $P(r_1, r_2, \ldots, r_u)$ le produit

$$\begin{aligned} &(p_{r_1} - p_{r_2}) \cdot (p_{r_1} - p_{r_3}) \cdot \ldots \cdot (p_{r_1} - p_{r_u}) \cdot \\ &\quad \cdot (p_{r_2} - p_{r_3}) \cdot \ldots \cdot (p_{r_2} - p_{r_u}) \cdot \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad\qquad \cdot (p_{r_{u-1}} - p_{r_u}); \end{aligned}$$

et avec $P(n; r_1, r_2, \ldots, r_u)$ le produit $P(r'_1, r'_2, \ldots, r'_{n-u+1})$, où $r'_1, r'_2, \ldots, r'_{n-u+1}$ désigne ce qui va rester de la série $0, 1, \ldots, n$ lorsqu'on supprime dans celle-ci les éléments $r_1, r_2, \ldots, r_u$. Si dans $P(n; r_1, r_2, \ldots, r_u)$ l'on suppose $u = 0$,

on obtient le symbole $P(n)$, qui n'est donc autre chose que $P(0, 1, \ldots, n)$.

Soit encore $\Phi(r_1, r_2, \ldots, r_u)$ une fonction telle que le produit

$$\Phi(r_1) . \Phi(r_1, r_2) \ldots\ldots \Phi(r_1, r_2, \ldots, r_u)$$

ne change pas sa valeur lorsqu'on va permuter d'une façon quelconque $r_1, r_2, \ldots, r_u$.

Enfin soit $\Psi(u; r_1, r_2, \ldots, r_u)$ (pour $u = 0, 1, \ldots, m - c + 1$) une fonction satisfaisant à l'équation fonctionnelle suivante

$$(5) \quad P(c+u-1; r_1, r_2, \ldots, r_{u-1}) . \Psi(u-1; r_1, r_2, \ldots, r_{u-1})$$

$$= \sum_{r_u = r_{u-1}+1}^{r_u = c+u-1} (-1)^{r_u - u + 1} P(c+u-1; r_1, r_2, \ldots, r_u) . \Phi(r_1, r_2, \ldots, r_u) . \Psi(u; r_1, r_2, \ldots, r_u)$$

$$+ \sum_{r_u = r_{u-2}+1}^{r_u = r_{u-1}-1} (-1)^{r_u - u + 2} P(c+u-1; r_1, r_2, \ldots, r_u) . \Phi(r_1, r_2, \ldots, r_{u-2}, r_u, r_{u-1}) . \Psi(u; r_1, r_2, \ldots, r$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \sum_{r_u = 0}^{r_u = r_1 - 1} (-1)^{r_u} P(c+u-1; r_1, r_2, \ldots, r_u) . \Phi(r_u, r_1, r_2, \ldots, r_{u-1}) . \Psi(u; r_1, r_2, \ldots, r_u).$$

On a, d'après cela, la relation

$$(6) \quad P(c+u-1) . \Psi(0) = \sum_{(c+u-1;\, u)} (-1)^{r_1 + r_2 + \cdots + r_u - \frac{u(u-1)}{2}} P(c+u-1; r_1, r_2, \ldots, r_u)$$

$$. P(r_1, r_2, \ldots, r_u) . \Phi(r_1) . \Phi(r_1, r_2) \ldots\ldots \Phi(r_1, r_2, \ldots, r_u) . \Psi(u; r_1, r_2, \ldots, r_u),$$

où le symbole de sommation $\sum\limits_{(c+u-1;\, u)}$ est équivalent à

$$\sum_{r_1 = 0}^{r_1 = c} \sum_{r_2 = r_1 + 1}^{r_2 = c+1} \cdots \sum_{r_u = r_{u-1}+1}^{r_u = c+u-1} .$$

Je me passerai, pour ne prendre trop de place, de donner dans ses détails la démonstration de cette relation, qu'on peut d'ailleurs obtenir aisément.

Il suffira pour cela imiter le raisonnement d'induction donné par M. GIAMBELLI dans les pages 121 à 123 de son Mémoire

cité, relativement à la fonction particulière $(u; r_1, r_2, \ldots, r_u)$. Il n'y a pas de difficulté à étendre pour la $\Psi(u; r_1, r_2, \ldots, r_u)$ le raisonnement fait par là pour la $(u; r_1, r_2, \ldots, r_u)$. En effet, là dedans, le rôle joué par le produit qu'on y va considérer $F(r_1).F(r_2).\ldots.F(r_u)$, dépend exclusivement de son invariabilité pour une permutation arbitraire de $r_1, r_2, \ldots, r_u$. On voit donc, tout de suite, comment soit possible généraliser la démonstration, en considérant le produit $\Phi(r_1).\Phi(r_1, r_2).\ldots.\Phi(r_1, r_2, \ldots, r_u)$ qui ne change pas, lui aussi, lorsqu'on va permuter d'une façon quelconque $r_1, r_2, \ldots, r_u$.

§ 3. La relation (6) est applicable à la fonction $\begin{pmatrix} m, n; c, c \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$. En effet, si nous posons pour abréger

$$F(r) = (p_r + p_0)(p_r + p_1)\ldots(p_r + p_n),$$

correspondamment à la fonction $\begin{pmatrix} m, n; c, c \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$ considérée comme la $\Psi(0)$, on aura

$$\Phi(r_1) = F(r_1)$$

$$\Phi(r_1, r_2) = \frac{F(r_2)}{p_{r_1} + p_{r_2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi(r_1, r_2, \ldots, r_u) = \frac{F(r_u)}{(p_{r_1} + p_{r_u})(p_{r_2} + p_{r_u})\ldots(p_{r_{u-1}} + p_{r_u})}.$$

Par conséquent, si nous désignons avec $\pi(r_1, r_2, \ldots, r_u)$ le produit de $\frac{u(u-1)}{2}$ facteurs

$$\begin{aligned}(p_{r_1} + p_{r_2}).(p_{r_1} + p_{r_3})\ldots\ldots(p_{r_1} + p_{r_u}).\\ .(p_{r_2} + p_{r_3})\ldots\ldots(p_{r_2} + p_{r_u}).\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ .(p_{r_{u-1}} + p_{r_u}),\end{aligned}$$

on déduira, de la relation (6):

$$(7)\quad \mathrm{P}(m).\begin{pmatrix} m, n; c, c \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix} = \sum_{(m,\, m-c+1)} (-1).^{r_1+r_2+\ldots+r_{m-c+1}-\frac{(m-1).(m-c+1)}{2}}$$

$$.\mathrm{P}(m; r_1, r_2, \ldots, r_{m-c+1}).\mathrm{P}(r_1, r_2, \ldots, r_{m-c+1}).\frac{\mathrm{F}(r_1)\,\mathrm{F}(r_2)\ldots\mathrm{F}(r_{m-c+1})}{\pi(r_1, r_2, \ldots, r_{m-c+1})}.$$

Voici donc explicitement l'expression de la fonction $\begin{pmatrix} m, n; c, c \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$, savoir l'*ordre de la variété* $\Omega(m, n; c, d)$. Cette formule (7) avec les (3) et (4) permettra aussi d'écrire, tout de suite, l'ordre de la variété $\Omega(m, n; c, \mu; d)$.

Le degré de généralité de la question proposée ne laisse pas donner aisément des expressions plus simples ou élégantes.

§ 4. La *dimension* de la variété $\Omega(m, n; c, \mu; d)$ générale est représentée par le degré du polynôme des $p_1, p_2, \ldots, p_n$, qui exprime son ordre; elle est égale à

$$\frac{(m-c+1)(2n-m-c+2)}{2} + c - \mu .$$

§ 5. Au sujet des variétés engendrées par des systèmes linéaires projectifs, les résultats précédents nous permettent d'énoncer la proposition:

La variété $\Theta\begin{pmatrix} m, n; c; d \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$, *si* $m \leq n$, *résulte de dimension*

$$\frac{(m-c+1)(2n-m-c+2)}{2}$$

et d'ordre

$$\begin{pmatrix} m, n; c, c \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}.$$

Si au contraire $m \geq n$, *la variété* $\Theta\begin{pmatrix} m, n; c; d \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$ *résulte de dimension*

$$\frac{(n-c+1)(2m-n-c+2)}{2}$$

et d'ordre

$$\begin{pmatrix} n, m; c, c \\ p_0, p_1, \ldots, p_m \end{pmatrix}.$$

Supposons que l'hypersurface F_{ik} possède un point arbitraire Z, de coordonnées $z_0, z_1, \ldots, z_d$, avec la multiplicité $\zeta_i + \zeta_k$, où pour les nombres $\zeta_i\,[i = 0, 1, \ldots, \max(m, n)]$ peuvent se présenter les deux cas suivants:

1°) $\zeta_i\,[i = 0, 1, \ldots, \max(m, n)]$ sont des entiers positifs, zéro compris.

2°) $\zeta_i - \frac{1}{2}\,[i = 0, 1, \ldots, \max(m, n)]$ sont des entiers positifs, zéro compris.

Nous pouvons alors trouver la multiplicité du point Z pour la variété $\theta\begin{pmatrix} m, n; c; d \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$. En effet, avec les considérations qu'on peut trouver développées dans deux Notes de M. Giambelli [«*Le varietà rappresentate da una matrice generica di forme ecc.*» «Rendic. R. Acc. dei Lincei», 1905; et celle déjà citée «*Sulle varietà rappresentate coll'annullare i determinanti minori ecc.*» «R. Acc. di Torino», 1906], on aura que la multiplicité en question, lorsque $n \geq m$ est

$$\begin{pmatrix} m, n; c, c \\ \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n \end{pmatrix};$$

et lorsque $m \geq n$ est

$$\begin{pmatrix} n, m; c, c \\ \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m \end{pmatrix}.$$

La multiplicité indiquée est égale à l'ordre du cône des droites tangentes dans le point Z à la $\theta\begin{pmatrix} m, n; c; d \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$.

Ce cône est encore le lieu des points de multiplicité $\frac{(m+n-\nu-c+1)!}{(\nu-c)!\,(m+n-2\nu+1)!}$ de la variété formée par les droites tangentes dans le point Z à la $\theta\begin{pmatrix} m, n; \nu; d \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$, où $\nu = \min(m, n)$.

La variété $\theta\begin{pmatrix} m, n; c, d \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$ même, résulte le lieu des points de multiplicité $\frac{(m+n-\nu-c+1)!}{(\nu-c)!\,(m+n-2\nu+1)!}$ pour la $\theta\begin{pmatrix} m, n; \nu; d \\ p_0, p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix}$.

Les travaux plusieurs fois cités ci-dessus laissent déduire encore bien d'autres résultats pour notre matrice symétrique, mais nous ne nous attarderons pas davantage parce qu'on peut les obtenir sans difficultés.

§ 6. Je crois plutôt utile de rappeler mieux l'attention, quoi-

que très rapidement, sur les liens entre la théorie des variétés représentées en égalant à zéro les mineurs d'une matrice de formes, et les lieux géométriques engendrés avec des projectivités établies parmi des systèmes d'espaces.

Considérons dans l'hyperespace $[d]$ $m+1$ espaces $R_0, R_1, \ldots, R_m$ de même dimension t, comme soutiens de $m+1$ hypergerbes projectives d'espaces $[c]$, où soit $0 \leq t < c < d$ et $c-t \leq m$.

Le lieu des points Ψ, engendré par les intersections (possibles) des $[c]$ homologues dans les $m+1$ hypergerbes, est la variété représentée en égalant à zero tous les mineurs d'ordre $c-t+1$ d'une matrice de formes linéaires de $m+1$ lignes et de $d-t$ colonnes.

Cela subsiste d'ailleurs même pour $t=-1$, savoir si l'on va considérer $m+1$ espaces $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m$ projectifs entre eux et coïncidants avec l'hyperespace $[d]$. Alors, pour $0 \leq c < m$, le lieu Ψ, engendré avec les intersections (eventuelles) des espaces $[c]$ homologues appartenant aux $m+1$ espaces $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$, n'est autre chose que la variété représentée par l'annullement de tous les mineurs d'ordre $c+2$ d'une matrice de formes linéaires de $m+1$ lignes et $d+1$ colonnes.

Ainsi, par exemple, relativement à l'hypothèse $t=-1$, c'est remarquable le cas particulier de $m=1$. On obtient, dans ce cas, que les points doubles d'une homographie entre deux espaces $[d]$ coïncidants peuvent se représenter avec une matrice de formes linéaires de deux lignes et $d+1$ colonnes.

Soient justement

$$f_i \equiv a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \ldots + a_{id}x_d = 0, \quad f'_i \equiv a'_{i0}x_0 + a'_{i1}x_1 + \ldots + a'_{id}x_d = 0$$
$$(1 = 0, 1, \ldots, d)$$

les respectives équations des hyperplans π_i, π'_i $(i=0, 1, \ldots, d)$, telles que $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_d$ soient entre eux linéairement indépendants et la même condition soit vérifiée pour $\pi'_0, \pi'_1, \ldots, \pi'_d$.

Considérons l'homographie dans laquelle se correspondent les hyperplans d'équations

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_d f_d = 0,$$
$$\lambda_0 f'_0 + \lambda_1 f'_1 + \ldots + \lambda_d f'_d = 0,$$

où les $d+1$ paramètres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont les mêmes pour chaque couple d'hyperplans homologues. Les coordonnées des points doubles de cette homographie, annuleront alors tous les

subdéterminants (du second ordre) de la matrice

$$\begin{Vmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_d \\ f'_0 & f'_1 & \cdots & f'_d \end{Vmatrix}.$$

Enfin, pour montrer encore que les études sur les matrices devraient justement trouver auprès des Géomètres une considération bien plus grande que celle dont elles jouissent à présent, j'irai conclure avec les mots suivants de M. M. STUYVAERT (1):

La Géométrie, en appliquant la théorie de l'élimination entre deux équations algébriques n'utilise guère que la condition d'existence d'une seule racine commune. Les conditions pour que les équations aient plus d'une racine commune peuvent donner aussi des résultats géométriques intéressants.

---

(1) Voir le tout récent beau Mémoire, couronné par l'Académie Royale de la Belgique, «*Cinq études de Géométrie analytique*». «Mém. Soc. R. des Sciences de Liège, (3), 7, 1907.

NOTE SUR LE PROBLÈME INVERSE DES QUADRATURES

PAR

ED. COLLIGNON

I

Soit

$$y = f(x) \tag{1}$$

l'équation donnée d'une courbe plane, rapportée à deux axes rectangulaires, OX, OY. L'aire Ω de cette courbe, prise entre deux valeurs, a et x_1, de l'abscisse, est représentée par l'intégrale

$$\int_a^{x_1} f(x)\, dx = \Omega, \tag{2}$$

et le *problème direct des quadratures* consiste à déterminer Ω en fonction de l'abscisse x_1, limite supérieure, que l'on peut regarder comme variable.

Le *problème inverse* consistera à déterminer x_1 en fonction de Ω: c'est la question que nous allons examiner dans cette note.

Il arrive fréquemment dans les applications, que la fonction $f(x)$ ne soit pas définie analytiquement. Elle est donnée sur l'épure par un ensemble de points discontinus, dont chacun répond à une hypothèse particulière; leur ensemble représente les résultats d'une série d'observations dont on cherche la loi. L'intégration n'est plus alors possible avec la rigueur géométrique, et ne peut être obtenue qu'avec une approximation plus on moins satisfaisante, Dans ce cas les méthodes graphiques s'imposent, et l'on est bien forcé de s'en contenter.

Nous commencerons par rappeler quelques principes. Soit AB une droite donnée, rapportée à deux axes rectangulaires OX, OY. Proposons-nous de déterminer sur cette droite un point M tel, que le trapèze OAMP, compris entre l'axe OX, l'axe OY, la droite AB et l'ordonnée MP du point M, ait une aire Ω donnée.

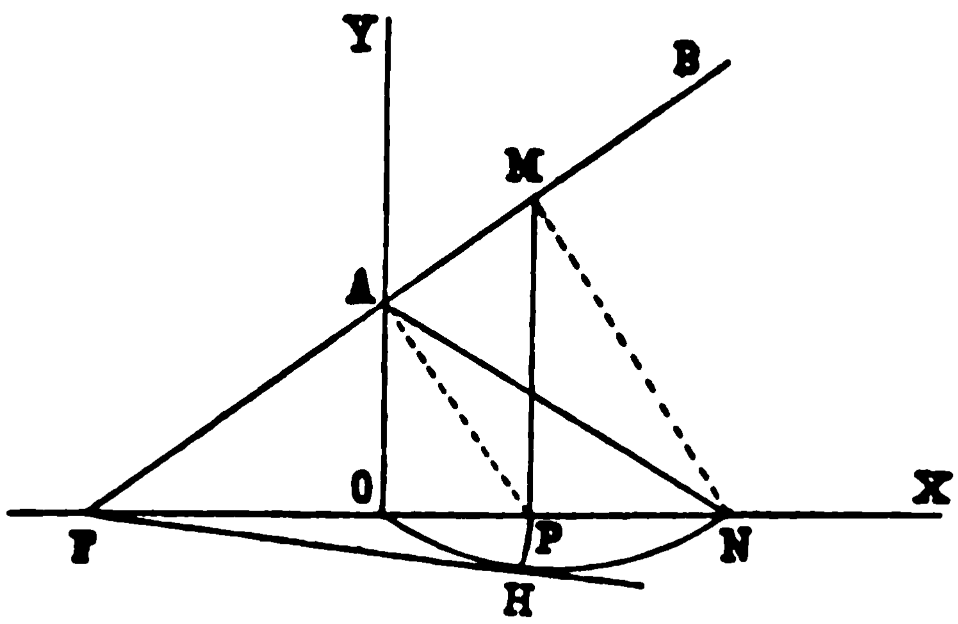


Fig. 1

Prenons sur OX la quantité ON telle, que le triangle OAN soit équivalent à l'aire donnée Ω. Les droites AP, MN étant parallèles, on aura, en prolongeant BA jusqu'au point F où cette droite coupe OX,

$$\overline{FP}^2 = FO \times FN ;$$

et par suite, il suffit de faire passer un arc de cercle par les deux points O et N, de mener à cet arc une tangente FH, et de rabattre FH en FP pour déterminer en OX le point P, et l'ordonné PM.

Le rabattement de FH pouvent s'effectuer dans les deux sens, on aurait, sur le prolongement de FX, un second point P' qui satisferait aux conditions, et qui correspondrait à la racine négative de l'équation

$$(b+x)^2 = b(b+c),$$

dans laquelle on a posé $b = FO$, $c = ON$, $x = OP$. On en déduit les deux valeurs de x

$$x = -b \pm \sqrt{b(b+c)}.$$

Cette méthode peut être appliquée par approximation au problème qui nous occupe. Mais revenons au cas général.

Nous nous proposons de résoudre, par rapport à la limite supérieure x_1, l'équation

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx = \Omega ,$$

Ω ayant une valeur donnée. Les méthodes directes de quadrature pourront nous conduire à déterminer une abscisse x', à laquelle correspondra une aire

$$\int_a^{x'} f(x)\, dx = \Omega'$$

moindre que Ω, mais telle cependant que la différence $\Omega - \Omega' = \omega$ soit suffisamment petite; la quantité ω sera la correction à opérer sur l'aire incomplète Ω'; ce qui entraine une altération $x_1 - x' = u$ de l'abscisse. On sera donc ramené à résoudre l'équation

$$\int_a^{x_1} f(x)\, dx = \omega\,,$$

dans laquelle la differénce $x_1 - x' = u$ des deux limites est supposée très petite. Pour opérer la correction, on peut appliquer la solution graphique indiquée, en observant que, dans l'intervalle x', x_1, la tangente peut en général être substituée à la courbe.

Soit $\mathrm{OC} = x'$ l'abscisse et $\mathrm{CD} = g'$ l'ordonnée du point D,

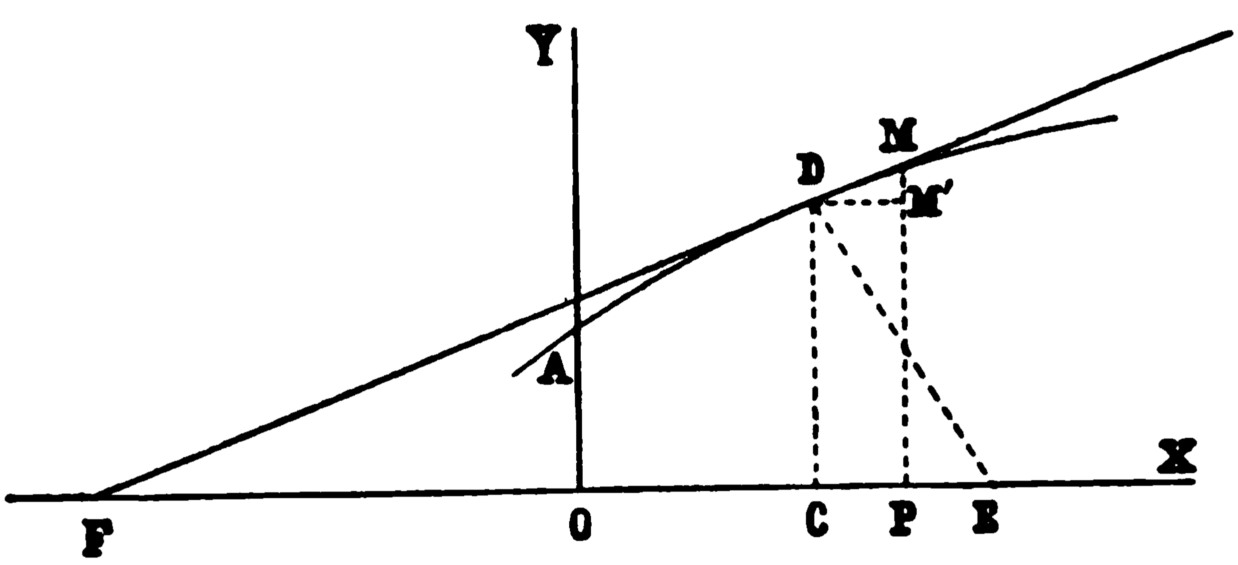


Fig. 2

où se termine l'aire Ω'. Prenons à partir du point C le segment CE tel, que le triangle DCE ait pour aire ω la quantité qu'il faut ajouter à Ω' pour former l'aire demandée Ω. Si nous menons la tangente DM au point D de la courbe, le point M sera sensiblement sur la courbe et sur la tangente, puisque nous supposons très petit l'arc DM; et l'aire ajoutée à Ω' par le trapèze DCPM aura pour mesure ω, si l'on détermine le point P par l'équation

$$\overline{\mathrm{FP}}^2 = \mathrm{FC} \times \mathrm{FE}\,.$$

Le segment FP est moyen proportionnel entre FC et FE; mais si le point F est suffisamment éloigné des points C et E, on peut à la moyenne proportionnelle substituer la moyenne arithmétique, et prendre pour P le milieu de la base CE du triangle additionnel. L'erreur commise dans cette substitution est représentée sur la figure par l'aire du triangle DM'M, c'est-à-dire par $\frac{1}{2}$ CD $\times$ M'M, soit $\frac{1}{2}dxdy$, quantité négligeable en général.

Cette construction géométrique répétée peut être employée pour le partage de l'aire $\int_m^n f(x)\,dx$ en un nombre p d'élements superficiels équivalents.

On partira de l'ordonnée initiale de l'aire, celle qui correspond à l'abscisse a, limite inférieure, et l'on determinera l'ordonnée PM infiniment voisine, sous la condition de rendre la surface comprise entre ces deux ordonnées égale à une aire déterminée ω, suffisamment petite. On refera la même opération pour l'ordonnée PM: elle conduira à une nouvelle ordonnée P'M', assurant la valeur ω à l'aire intermédiaire. Opérant ainsi de proche en proche, on formera dans l'aire de la courbe une série continue d'éléments compris entre deux ordonnées consécutives, et ayant tous pour aire commune la quantité ω, arbitrairement choisie.

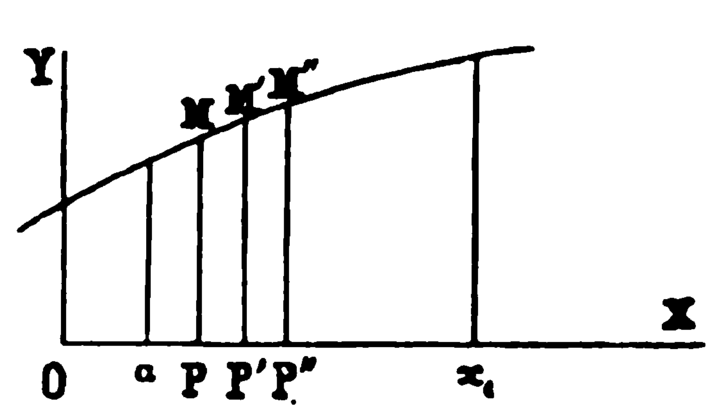


Fig. 3

Courbes paraboliques

Soit

$$(1)\qquad y = f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Px + Q$$

l'équation d'une courbe parabolique donnée, de degré m; on se propose de découper, par une ordonnée finale, une aire Ω donnée, commençant à l'abscisse $x = 0$.

Multiplions par dx et faisons l'intégration. Nous aurons

$$(2)\quad \Omega = \int_0^{x_1} f(x)\,dx = \frac{Ax_1^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx_1^m}{m} + \frac{Cx_1^{m-1}}{m-1} + \ldots + \frac{Px_1^2}{2} + Qx_1.$$

On aurait donc à résoudre l'équation (2), qui est du $(m+1)^{me}$ degré par rapport à x_1. On peut aisément la ramener au degré

m; posons en effet

$$(3) \qquad z = \frac{Ax_1^m}{m+1} + \frac{Bx_1^{m-1}}{m} + \frac{Cx_1^{m-2}}{m-1} + \ldots + \frac{Px_1}{2} + Q,$$

et supposons cette courbe contruite; si nous y associons la courbe

$$(4) \qquad zx_1 = \Omega,$$

c'est-à-dire une hyperbole du second degré, les points de rencontre des deux lignes feront connaitre les solutions réelles de l'équation (2).

Il est possible d'aller plus loin, en ramenant l'hyperbole (4) à une courbe unique, qui servira par tous les problèmes analogues que l'on peut avoir à résoudre. Posons $x_1 = \xi\sqrt{\Omega}$, $y_1 = \zeta\sqrt{\Omega}$, et substituons dans les équations (3) et (4). Il viendra

$$(5) \qquad \zeta = \frac{A\Omega^{\frac{m-1}{2}}}{m+1}\xi^m + \frac{B\Omega^{\frac{m-2}{2}}}{m}\xi^{m+1} + \frac{C\Omega^{\frac{m-3}{2}}}{m-1}\xi^{m-2} \ldots + \frac{P\xi}{2} + \frac{Q}{\sqrt{\Omega}},$$

$$(6) \qquad \zeta\xi = 1.$$

Pour déduire l'équation (5) de l'équation proposée (1), on fait subir à chaque terme de celle-ci une même modification. Le terme

$$(1) \qquad y = \ldots + A_{p-1}x^{m-p+1} + \ldots$$

se change d'abord dans le terme correspondant de l'équation (3)

$$(3) \qquad \xi = \ldots + \frac{A_{p-1}x^{m-p+1}}{m-p+2} + \ldots$$

puis dans le terme correspondant de l'équation (5)

$$(5) \qquad \zeta = \ldots + \frac{A_{p-1}(\sqrt{2})^{m-p}\xi^{m-p+1}}{m-p+2}.$$

Quant à l'hyperbole (5), elle sert pour tous les degrés, et peut être tracée à part, au moyen d'un gabarit universellement applicable.

On peut observer que le calcul des coefficients de l'équation (5) peut se faire en s'aidant des logarithmes, ce qui simplifie les operations.

Applications à divers exemples

Droite $y = Ax + B.$

On construira la droite

$$z = \frac{Ax}{2} + B, \tag{3}$$

qu'il faudra couper par l'hyperbole

$$zx = \Omega. \tag{4}$$

Si l'on veat réduire les lignes par l'application du principe de similitude, on posera

$$\zeta = \frac{A\xi}{2} + \frac{B}{\sqrt{\Omega}} \tag{5}$$

$$\zeta\xi = 1. \tag{6}$$

Parabole du second degré $y = Ax^2 + Bx + C.$

(3) et (4) $$\begin{cases} z = \dfrac{Ax^2}{3} + B\dfrac{x}{2} + C, \\ zx = \Omega; \end{cases}$$

(5) et (6) $$\begin{cases} \zeta = \dfrac{A\sqrt{\Omega}}{3}\xi^2 + \dfrac{B\xi}{2} + \dfrac{C}{\sqrt{\Omega}} \\ \zeta\xi = 1. \end{cases}$$

. . . .

Examen d'un cas spécial

Les équations de la forme

$$y = Ax^m,$$

c'est-à-dire dont le second membre est un monome, se prêtent pour la quadrature graphique à une notable simplification. Nous appellerons *courbes monomes* les courbes représentées par ces équations.

Supposons d'abord m positif. L'ordonnée y s'annule pour $x=0$. Faisons la quadrature entre les limites $x=0$, $x_1=OP$. Il vient pour l'aire $OMP=\Omega$,

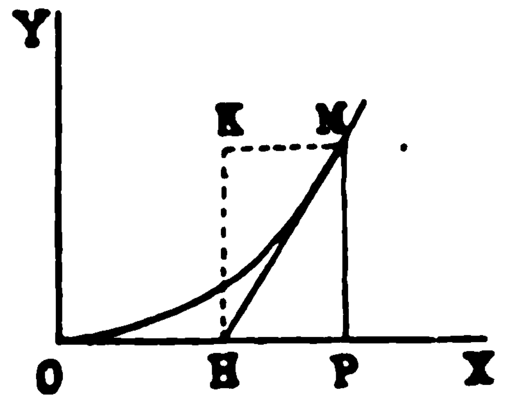


Fig. 4

$$\Omega=\int_0^{x_1} ydx=\left[\frac{Ax^{m+1}}{m+1}\right]_0^{x_1}$$

$$=Ax_1^m\times\frac{x}{m+1}=\frac{x_1y_1}{m+1}.$$

Menons la tangente MH au point M. Nous aurons pour la sous-tangente PH,

$$HP=\left(\frac{ydx}{dy}\right)_1=\frac{x_1}{m},$$

et l'on a par conséquent

$$\Omega=\left(\frac{x_1}{m}\times y_1\right)\times\frac{m}{m+1},$$

produit de l'aire du rectangle HPMK, construit sur l'ordonnée et la sous-tangente finales, par la fraction $\frac{m}{m+1}$.

Supposons en second lieu que m soit négatif. L'ordonnée à l'origine de la courbe n'est plus nulle, mais elle devient infinie. Au lieu de prendre la quadrature entre les limites 0 et x_1, nous la prendrons entre deux limites a et x_1, ne comprenant pas la valeur zéro, qui rendrait infini l'élément ydx de la somme. Il vient alors

$$\Omega=\int_a^{x_1} ydx=A\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)_a^{x_1}=A\left(\frac{x_1^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}\right)=\frac{1}{m+1}(x_1y_1-ab)$$

en appelant y_1 l'ordonnée correspondante à l'abscisse x_1, et b l'ordonnée correspondante à l'abscisse initiale a. L'aire cherchée s'exprime encore par la différence des rectangles MPHK, M'P'H'K', construits aux deux extrémités de la surface à éva-

luer, sur l'ordonnée et la sous tangente de la courbe à ces deux extrémités. On aura en définitive

$$\Omega = (\text{rectangle MPHK} - \text{rectangle M'P'H'K'})\frac{m}{m+1}$$

en observant que l'analyse fait negatives les aires des deux rectangles indiquées, de sorte que l'aire prise en valeur absolue s'exprime par la fraction $\frac{m}{m+1}$ de la différence des rectangles, changée de signe.

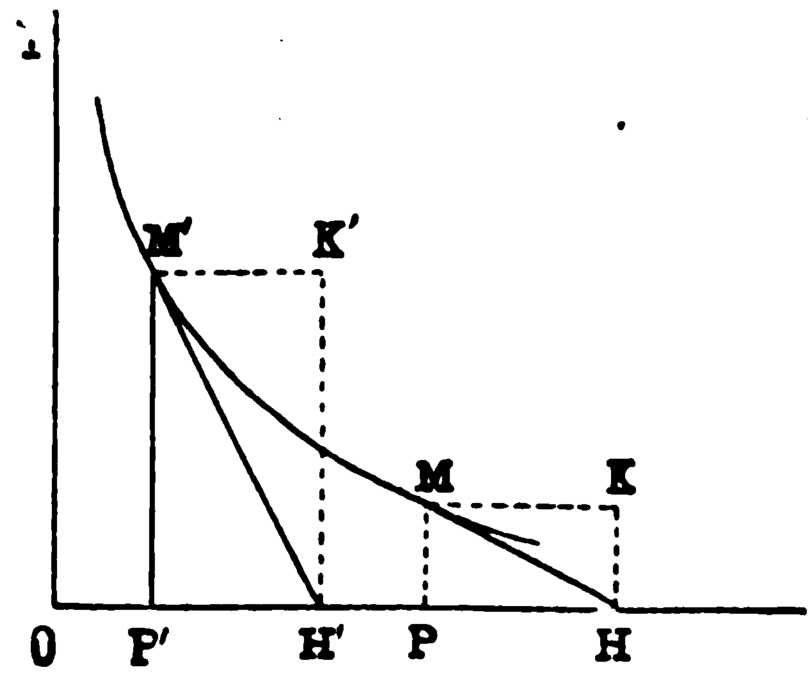


Fig. 5

Appliquons cette règle à l'hyperbole du second degré,

$$y = \frac{h^2}{x} = h^2 x^{-1}.$$

Nous aurons en prenant la soustangente

$$y\frac{dx}{dy} = -x,$$

et les rectangles à former ont pour mesure constante,

$$-x \times y = -h^2;$$

et leur différence est nulle. D'un autre côté l'exposant m est égal à -1, de sorte que le facteur numérique $\frac{m}{m+1}$ a une valeur infiniment grande. L'aire, prise entre deux limites, se présent sous la forme indéterminée *zéro multiplié par l'infini*, et la méthode ne s'applique pas à ce cas particulier. On sait d'ailleurs que l'aire de l'hyperbole, rapportée à ses asymptotes, s'exprime par la fonction

$$\int_a^{x_1} y\,dx = h^2 \int_a^{x_1} \frac{dx}{x} = h^2 l\left(\frac{x_1}{a}\right),$$

c'est la vraie valeur du produit indéterminé qu'on vient d'obtenir.

La méthode s'applique sans restriction à l'exponentielle représentée par l'équation

$$y = Ae^{\frac{x}{h}},$$

pour laquelle nous ferons la quadrature à partir de l'abscisse $x = -\infty$, qui annule l'ordonnée y. Il vient

$$\int_{-\infty}^{x_1} ydx = \left[Ahe^{\frac{x}{h}} \right]_{-\infty}^{x_1} = Che^{\frac{x_1}{h}}.$$

La quantité à retrancher pour tenir compte de la limite inférieure est nulle, et disparait d'elle-même. Or on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{h} e^{\frac{x}{h}} \quad \text{et} \quad \frac{ydx}{dy} = h,$$

quantité constante. L'aire cherchée est donc égale au produit

$$\Omega = Ce^{\frac{x_1}{h}} \times h = y_1 h,$$

de l'ordonnée finale y_1 par la sous tangente, qui a une valeur constante pour toute la courbe. Le facteur numérique $\frac{m}{m+1}$ est ici égal à l'unité, ce qui correspond à une valeur infiniment grande de l'exposant m.

En définitive l'exponentielle est l'une des courbes qui se prêtent le mieux à l'évaluation de l'aire RMP, comptée à partir du point R situé à l'infini, jusqu'à une ordonnée MP quelconque ; et celle qui se prête le mieux aussi à la *solution du problème inverse*. Si l'on veut couper l'expontielle par une ordonnée MP qui détermine une aire RMP égale à une quantité donné Ω, comme cette aire est équivalente au rectangle MPHK, et que la dimension PH de ce rectangle est constante

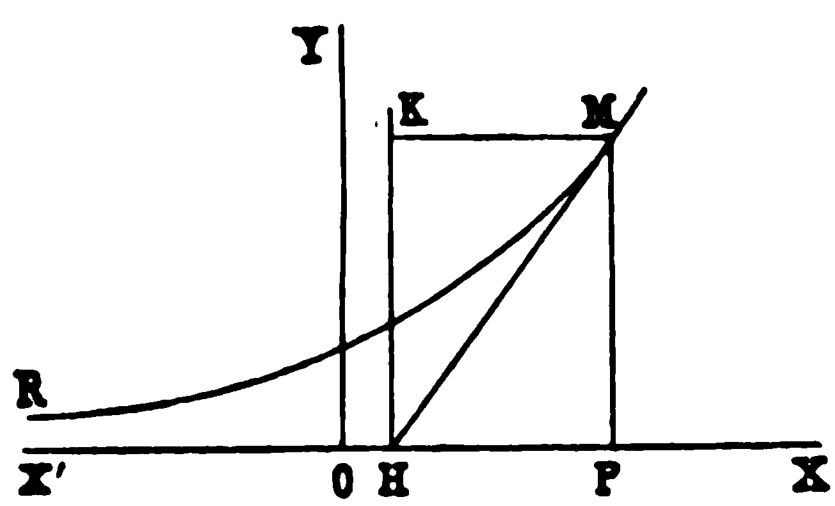


Fig. 6

et égale à h, il suffit de diviser l'aire Ω par h, ce qui fait connaître l'ordonnée $MP = y_1$, à laquelle il faut arrêter la courbe.

On peut observer que la tangente MH menée au point M; partage l'aire RMP en deux parties équivalentes HMP, RMH.

Comme cas particulier on peut aussi appliquer la méthode à la droite

$$y = Ax$$

qui passe par l'origine. Entre les limites $x = 0$, $x = x_1$ l'aire Ω est égale à

$$\Omega = \frac{1}{2} A x_1^2,$$

c'est-à-dire à la moitié du rectangle OPMK, construit sur l'ordonnée finale PM et la *soustangente* PO.

Le facteur numérique $\frac{m}{m+1}$ prend la valeur $\frac{1}{2}$, puisque l'exposant m est égal à l'unité.

Les courbes *monomes* $y = Ax^m$ ont d'autres propriétés, que nous étudierons dans une note spéciale, s'il y a lieu.

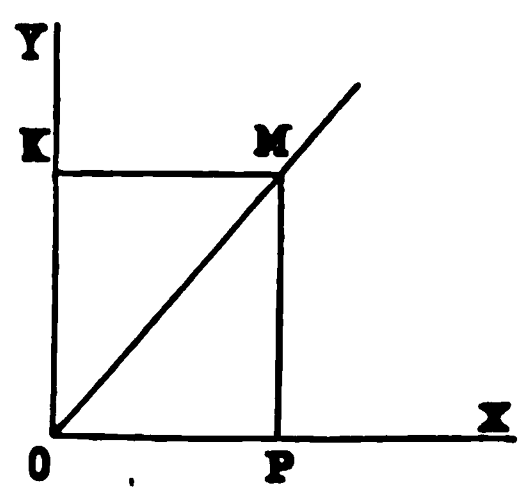


Fig. 7

Modification de la méthode générale dans certains cas particuliers

Un exemple simple suffira pour montrer comment la méthode peut être modifieé dans certains cas spéciaux qu'on rencontre dans la pratique.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad y = \frac{kf}{l^2}(lx - x^2),$$

qui représente, comme on sait, la *courbe des moments fléchissants dans une poutre droite posée sur deux apposés de niveau* A *et* B, *et chargée uniformément entre ces deux appuis.* La quantité l est la portée AB de la poutre, et f est la flèche de la parabole au milieu, valeur maximum du moment fléchissant développé par la charge.

Au lieu d'appliquée la méthode générale au problème qui consiste à découper une aire donnée Ω dans la parabole par une ordonnée MP verticale, on peut faire l'intégration de **A** à P, ce qui donne

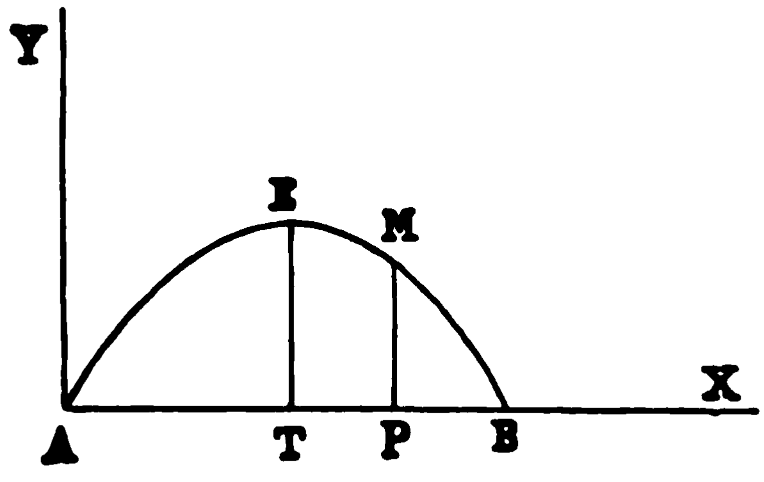


Fig. 8

$$(2)\qquad \int_0^{x_1} y\,dx = \frac{4f}{l^2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$$
$$= \frac{2f}{l}\, x_1^2\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{x_1}{l}\right) = \Omega .$$

Traçons sur une épure la droite

$$(3)\qquad z = 2f - \frac{4}{3}\,\frac{x_1}{l},$$

et construisons sur la même épure l'hyperbole du troisième ordre

$$(4)\qquad z x_1^2 = l\Omega .$$

Les points d'intersection de la courbe et de la droite auront pour abscisses les racines de l'équation (2).

On peut aussi transformer ces lignes par *affinité*, au lieu de recourir à la *similitude*. Posons

$$x_1 = \xi\sqrt{\Omega}, \quad z = l\zeta,$$

en appliquant des coefficients différents à chacune des variables x_1 et z. Il viendra

$$(3')\qquad \zeta = \frac{2f}{l} - \frac{4}{3}\,\frac{f\sqrt{\Omega}}{l^2}\,\xi,$$

et

$$(4')\qquad \zeta\xi^2 = 1,$$

pour l'équation de la droite et de l'hyperbole cubique; cette dernière courbe ne change pas avec la valeur que l'on attribue à l'aire Ω.

On peut encore opérer d'une autre manière et poser $x_1 = lu$, en rapportant à la portée l les abscisses complées sur la poutre AB. L'équation à résoudre devient

$$(2'')\qquad u^2 - \frac{2}{3}\,u^3 = u^2\left(1 - \frac{2}{3}\,u\right) = \frac{\Omega}{2fl},$$

de sorte que le problème consiste à chercher la valeur de u qui rend le premier membre ègal à $\frac{\Omega}{2fl}$, quantité connue. Comme u ne peut varier que de 0 à 1, on arrive très rapidement à dresser une table des valeurs du premier membre, et l'inspection de cette table donne sur le champ la valeur cherchée. La fonction étant du troisième degré, ses différences troisièmes sont constantes, et la table peut être dressée en quelques instants, en ne faisant que des additions.

On pourrait imaginer encore d'autres manières d'opérer. Cet exemple montre comment la méthode générale peut se plier aux circonstances particulières du probleme qu'on a à resoudre.

Table des valeurs de la fouction

$$V = u^2\left(1 - \frac{2}{3}u\right)$$

entre les valeurs $u = 0$ et $u = 1$

u	V	Observations
0	0,00000	
0,1	0,00933	
0,2	0,03466	
0,3	0,07200	
0,4	0,11733	
0,5	0,16666	Point d'inflexion: aire $= \frac{1}{6} \times 2fl$.
0,6	0,21600	
0,7	0,26133	
0,8	0,29866	
0,9	0,32400	
1,0	0,33333	aire totale du segment parabolique: $\frac{2}{3}fl$.

L'ordonnée V est nulle pour $u = 0$, racine double, et pour $u = \frac{3}{2}$.

L'aire de la parabole devient nulle pour $u = \frac{3}{2}$, ou pour $x = \frac{3}{2}l$ par l'addition des aires négatives au delà de $u = 1$.

NOTE SUR QUELQUES MAMMIFÈRES DE L'AFRIQUE OCCIDENTALE CAPTURÉS PAR FR. NEWTON EN 1905 ET APPARTENANT AU MUSÉUM D'HISTOIRE NATURELLE DE PORTO

PAR

A. F. DE SEABRA

ORD. CHIROPTERA

1. *Epomophorus gambianus* (Ogilby).
   a ♀ ad. Mossamedes.

2. *Epomophorus comptus*, Allen.
   a ♀ ad. Mossamedes.

C'est une espèce assez rare dans les Muséums et curieuse par sa ressemblance avec les *Cynonycteris*.

3. *Hipposiderus fuliginosa* (Temm.).
   a ♂ ad. Mossamedes.

4. *Hipposiderus caffra* (Sund.).
   a ♂ Mossamedes.

Nous avons eu quelques doutes sur la détermination de cet exemplaire qui diffère un peu des types de l'espèce existants dans les collections du Muséum. Mr. le Prof. Oldfield Thomas, que nous avons consulte sur ce sujet, croit qu'il s'agit vraiment de l'*H. caffra*, puisque cette espèce est sujette à des variations dans le système des feuilles nasales et dans la couleur du pe-

lage, ainsi que Mr. Andersen le fait remarquer dans un travail publié dans les *Ann. Mag. N. H.*, 1906, pp. 276-277.

Chez notre exemplaire les plis secondaires des appendices nasaux se réunissent sur le devant. Le pelage est d'un gris blanchâtre en dessous et en dessus et recouvre presque entièrement la partie postérieure des oreilles. Les plis antérieurs du palais forment des angles obtus, les postérieurs sont droits. Chez d'autres exemplaires de l'*H. caffra* que nous avons examinés, les plis antérieurs du palais sont courbes.

Dimensions: — Tête 19 mil., oreil 12 mil. (hauteur prise postérieurement) avant bras 44 à 45 mil., pouce 5 mil., tibia 19 mil., pied 7 mil., calcanéum 9 mil.

5. *Nicteris capensis*, Smith.
   a ♀ ad. Mossamedes.
   var. *fuliginosa*, Peters?
   a ♂ ad. Mossamedes.

Nous ne trouvons pas une grande différence entre le tragus et les prémolaires inférieures de cet exemplaire et de celui que nous avons considéré comme type de l'espèce. Il présente cependant la fourrure d'une couleur fauve parfaitement comparable à celle des types plus caractéristiques du *H. fuliginosa.*

6. *Nycteris thebaica*, E. Geoff.
   a. b. ♂ ♀, Cazengo.
   c. ♀, Mossamedes.

7. *Nycteris hispida* (Schr.).
   a. ♂, Mossamedes.

8. *Vespertilio* sp.?
   a. ♂, Mossamedes.

9. *Scotophilus borbonicus* (E. Geoff.).
   a. ♀, Mossamedes.

10. *Taphosous mauritianus* (E. Geoff.).
   a. b. ♂ ♀, Mossamedes.

Ces deux exemplaires apartiennent à la variété *cinerascens* que nous avons décrite dans le *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes*, tomo IV, 1900, p. 12.

11. *Nyctinomus limbatus* (Pet.).
   a. ♀, Mossamedes.

Ord. INSECTIVORA

12. *Macroscelides rupestris*, A. Smith.
    a. b. ♂ ♂, Bahia dos Tigres.
    c. d. ♂ ♀, Mossamedes.

Ord. RODENTIA

13. *Myoxus (Elyomis) murinus*, Desm.
    a. ♀, Mossamedes.

14. *Gerbilus validus*, Bocage.
    a, ♂ ad., Bahia dos Tigres.

15. *Mus norwegicus*, Erxleb.
    a, ♀ ad., Bahia dos Tigres.

16. *Cricetomys gambianus*, Waterh.
    a, b, ♂, ♀, Bahia dos Tigres.

17. *Arvicanthis vittatus*, Wag.
    a. ♀, Mossamedes.

18. *Golunda falax*, Peters.
    a. ♂ ad., Bahia dos Tigres.

MOLLUSQUES TERRESTRES DU PORTUGAL

PAR

AUGUSTO NOBRE

II

MONOGRAPHIE DES FAMILLES *SUCCINIDÆ* ET *AURICULIDÆ*

FAM. V — SUCCINIDÆ

Animaux à corps trapu ou limaciforme, pourvus d'une coquille externe, dans laquelle ils rentrent plus ou moins complètement, ou interne; tentacules supérieurs cylindriques, assez courts, tentacules inférieurs très peu développés ou invisibles. Mâchoire surmontée par une plaque accessoire quadrangulaire; radule à dent centrale tricuspidée, dents latérales de la même grandeur, bicuspidées ou tricuspidées; dents marginales multicuspidées; coquille externe, fragile, paucispirée, oblongue ou auriforme, à ouverture grande; coquille interne aplatie, petite ou ovale, arrondie, mince.

La famille des Succinidæ est représentée en Portugal à peine par un genre.

Coquille ovale-allongée ou oblongue, fragile, mince, translucide ou jaune ambrée, imperforée, à spire composée de tours peu nombreux; ouverture plus ou moins grande, elliptique ou ovale; columelle simple, tranchante, péristome non réflexi **G. Succinea.**

Le genre *Succinea* comprend deux espèces:

Coquille petite, ovale-oblongue, fragile, à tours assez arrondis et à ouverture ovale — **S. oblonga, Drap.**

Coquille oblongue, allongée, fragile, translucide ou à couleur ambrée; ouverture très grande, anguleuse supérieurement; tours supérieurs très petits et peu arrondis, le dernier tour très grand — **S. elegans, Risso.**

Succinea oblonga, Draparnaud

Pl. I — Figs. 1, 2

Succinea oblonga, Drap., Tabl. Moll., p. 56 (1801) — Hist. Moll., p. 59, pl. 3, f. 24-25 (1805) — Graells, Mol. España, p. 2 (1846) — Dupuy, Moll. de France, v. I, p. 71, v. II, pl. 1, f. 9 *a-b* (1847) — Gassies, Moll. Agenais, p. 71 (1849) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2e, p. 61, pl. 7, f. 32 33 (1855) — Jeffreys, Brit. Conchol., v. I, p. 154, v. II, p. 157, pl. VIII, f. 6 (1862) — Grognot, Moll. Saone-et-Loire, p. 10 (1863) — Hagenmuller, Moll. Alsace, p. 8 (1872) — Rossmässler, Iconogr., 7e, p. 84, pl. 204, f. 2080-2083 (1879) — Statuti, Moll. Prov. Romana, p. 83 (1882) — Pollonera, Moll. Piemonte, p. 29 (1885) — Norman, Rev. Brit. Moll., p. 339 (1890) — Sharff, The Irish Moll., p. 16 (1892).

Succinea abbreviata, Morelet, Moll. Portugal, p. 54, pl. 5, f. 4 (1845) — Hidalgo, Mol. ter., p. 217 (1875) — Rossmässler, Iconogr., 7e, p. 76, pl. 204, f. 2085 (1879) — Locard, Conchyl. port., p. 10 (1899).

Animal à corps épais et trapu; tentacules supérieurs cylindriques, courts et légèrement coniques, un peu renflés à l'extremité; les inférieurs réduits à des petits mamelons; pied oblong, arrondi à l'extremité postérieure et assez large à la partie antérieure. Corps d'un pâle jaunâtre, un peu noirâtre sur le dos, grisâtre et parfois chagriné, et pigmenté de noirâtre, ayant deux lignes de taches plus noires sur le cou.

Coquille ovale, un peu allongée, fragile, assez mince et un peu transparente, d'un jaune corné. Spire composée de trois à quatre tours assez arrondis et tordus: suture bien marquée; surface ornée de stries très fines et un peu flexueuses au dessous de la suture du dernier tour; ouverture ovale et anguleuse à sa partie supérieure, à bord mince; columelle inclinée, faiblement épaissie et un peu sinueuse vers son milieu. Hauteur 6 1/2 m.m.; diam. 4 1/2 m.m.

Syn. *Helix elongata*, Studer; *Amphibulina elongata*, Hartmann; *Cochlorydra elongata*, Férussac; *Tapada oblonga*, Studer; *Helix buccinum*, Schw.; *Succinea Droueti*, Dum. et Mortil.; *Succinea humilis*, Drouet.

Hab. Traz-os-Montes; habite une prairie des environs de Bragança (Morelet). Bords du ruisseau qui traverse la ville de Bragança (Nobre).

Morelet n'a trouvé qu'un seul exemplaire sur lequel il à établi sa nouvelle espèce. Cette forme n'est toutefois rare sur les bords du ruisseau, sur la terre et parmi les plantes, avant qu'il traverse la ville. D'après l'examen de plusieurs exemplaires nous nous sommes convaincus qu'il s'agit de la *S. oblonga*. Ses caractères correspondent à la variété *humilis*, Drouët. Elle est génèralement plus ovale, d'une couleur jaune cornée et plus petite, mais on trouve des exemplaires plus allongés et à spire plus aigue. Chez plusieurs exemplaires que j'ai examinés, provenant d'autres pays, j'ai trouvé aussi quelques uns à spire plus ovale et, en général, ayant des dimensions égales à celles des échantillons portugais. L'exemplaire recueilli par Morelet à Bragança ne mésurait que 4 m.m. de longueur et 3 de diamètre. Nos exemplaires présentent une longueur de 5 $^1/_2$ m.m. et 4 $^1/_2$ m.m. de diamètre. Ils ont l'aspect d'une petite *Limnæa* vus par la face dorsale.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, cette espèce habite les bords du ruisseau qui traverse les prairies à l'aval de la ville. Jeffreys avait fait remarquer déjà l'identité de l'espèce établie par Morelet avec cette espèce. Scharff (*The Irish Moll.*, p. 16) indique cette espèce comme vivant en Portugal.

Succinea elegans, Risso

Pl. I — Figs. 3-12, 15-18

Succinea elegans, Risso, Hist. nat. Europ. mérid., v. IV, p. 59 (1826) — Moquin-Tandon, Moll. France, 2^e, p. 646 et 59, pl. VII f. 8-31 (1855) — Jeffreys, Brit. Conchol., v. I, p. 153, v. V, p. 156, p. VIII, f. 5 (1862) — Hagenmuller, Moll. Alsace, p. 8 (1872) — Rossmässler, Iconogr., VII, p. 71, pl. 203. f. 2065-70 (1879) — Norman, Rev. Brit. Moll., p. 337 (1890) — Sharff, The Irish land and fresh. moll., p. 16 (1892).

Succinea elegans, var. longiscata, Morelet — Baudon, Monogr. Succ. franc., p. 58, pl. IX, f. 2 (1877).

Succinea Pfeifferi, Rossmäs., Iconogr., I, p. 96, pl. 2, f. 46 (1835), v. VII, p. 70, pl. 202, f. 2060-63 (1879) — Dupuy,

Moll. France, v. I, p. 73, v. II, pl. 1, f. 12 *a-c* (1847) — Gassies, Moll. Agenais, p. 70 (1849) — Grognot, Moll. Saone et Loire, p. 10 (1863) — Hidalgo, Hojas malac., p. 18 (1870) — Luzo, Moll. terr. fluv. Portugal, p. 180 (1871) — Cat. iconogr., p. 218 (1875) — Bofill, Moll. Barcelona, p. 4 (1879) — Pollonera, Moll. Piemonte, p. 29 (1885) — Nobre, Moll. Coimbra, p. 13 (1886).

Succinea Pfeifferi, var. *brevispina*, Baudon, Monogr, Succ. franc., p. 44, pl. 8, f. 3 (1877).

Succinea amphibia, Draparnaud, Hist. des Moll., p. 58, pl. 3, f. 22 (1805) — Morelet, Moll. Portugal, p. 52 (1845) — Graells, Mol. España, p. 2 (1846):

Succinea virescens, Morelet, Moll. Portugal, p. 53, pl. V, f. 3 (1845) — Hidalgo, Cat. iconogr., p. 218 (1875) — Rossmässler, Iconogr., VII, p. 77, pl. 204, f. 2088 (1879) — Conchyl. portug., p. 8 (1899).

Succinea longiscata, Morelet, Moll. Portugal, p. 51, pl. V, f. 1, (1845) — Dupuy, Moll. France, v. I, p. 75, v. II, pl. 1, f. 11 *a-b* (1847) — Hidalgo, Cat. iconogr., p. 218 (1875) — Rossmässler, Iconogr., VII, p. 71, pl. 203, f. 2068 (1879) — Locard, Conchyl. portug., p. 4 (1899).

Succinea debilis, Pfeiffer, *non* Morelet, Rossmässler, Iconogr., VII, p. 73, pl. 204, f. 2076 (1879) — Bourguignat, Maluc. Algérie, I, p. 65, pl. 3, f. 32-35 (1864) — Baudon, Monogr. Succ. franc., p. 177, pl. 9, f. 4 (1877) — Locard, Conch. portug., p. 7 (1999).

Animal d'une couleur jaunâtre plus ou monis foncée, parsemé de petits points noirâtres; corps oblong et épais; tentacules supérieurs petits, cylindriques; tentacules inférieurs réduits à des petits mamelons; pied arrondi antérieurement et obtus à la partie postérieure.

Coquille ovale allongée, parfois effilée, fragile, opaque ou un peu transparente, à stries plus ou moins fines et parallèles, dernier tour très développé, occupant à lui seul, presque la totalité de la coquille, les deux premiers tours arrondis, très réduits, plus ou moins tordus, courts ou allongés; suture bien marquée; ouverture allongée à angle supérieur aigu, inférieurement arrondie ou un peu dilatée; columelle légèrement courbe, à callosité supérieure plus ou moins sensible; couleur plus ou moins ambrée, jaunâtre claire ou légèrement brunâtre; hauteur (de l'exemplaire le plus développé que nous avons examiné) 17 m.m., diam. 8 m.m.

Hab. *Douro*. Environs de Porto (Luso, Nobre, Castro); Lavadores (G. Sampaio, Nobre); environs d'Aveiro (Castro);

Coimbra et environs (A. Giraldes, Nobre, Castro); Condeixa (A. Giraldes); Soure (Nobre).

Beira-Baixa. Sernache do Bomjardim (Castro).

Extremadura. Leiria, S. Martinho do Porto (Nobre); Caldas da Rainha (Mengo, Coll. Mus. Bocage). Plaine du Tage, aux environs d'Azambuja (Morelet, Mengo, Nobre); Villa Nova de Alemquer (Morelet): rivière Almonda, près Torres Novas (J. dos Reis Junior); Algés, Cruz Quebrada, bords des rivières affluents du Tage, près Lisbonne (Nobre).

Alemtejo. Bords humides du Sado, rivière Charrama (Morelet); Elvas (Nobre).

Algarve. Bords d'un ruisseau à un quart de lieue de Faro (Morelet); Faro (Castro, Nobre); Olhão (Nobre).

Vit sur les plantes et la terre humide, au bord de l'eau; assez abondante.

On sait comme les *Succinea* sont extremement variables. Les formes de la spire et de l'ouverture ne sont pas constantes. La spire est allongée ou raccourcie, à tours plus ou monis arrondis; l'ouverture est plus ou moins anguleuse à la partie supérieure; la forme de la base de l'ouverture varie constamment ainsi que la columelle.

Pas plus que la forme la couleur n'est aussi à peu près constante; on trouve des exemplaires d'un jaune blanchâtre, d'autres d'une couleur ambrée ou noirâtre.

Je n'ai pu réussir à établir des différences spécifiques, grace à la série suffisamment nombreuse d'exemplaires que j'ai pu étudier; toutefois si je n'avais eu à examiner que des exemplaires des environs de Porto et du sud du pays, de Faro et de Olhão, qui ont servi à Morelet pour établir sa *S. longiscata,* je n'aurais pas hesité á constituer deux espèces. Ces formes se relient tellement par des intermédiaires, les caracteres spécifiques n'étant pas constantes, que je suis amené a les envisager comme d'une rôle sécondaire dans cette espèce, comme d'ailleurs a été déjà reconnu par quelques naturalistes.

Je veux donc signaler seulement les différences que j'ai remarquées chez des exemplaires recueillis dans les localités suivantes.

Environs de Porto: Foz do Douro, Leça da Palmeira et route marginale du Douro. Exemplaires petits et de couleur jaune verdâtre. J'ai trouvé aussi cette forme, qui est la plus commune aux environs de Porto, à Azambuja, près Lisbonne. (Figs. 3-4).

Algarve: Faro et Olhão. Exemplaires s'accordant avec la diagnose de Morelet pour sa *S. longiscata;* spire allongée, conique, tordue; ouverture anguleuse à la partie supérieure;

postérieure; pied étroit; tentacules assez gros et coniques, dilatés à l'extrémité; yeux noirs placés à la base, et entre les tentacules.

Hab. *Minho*. Guimarães (Nobre), Famalicão (Castro, Nobre).

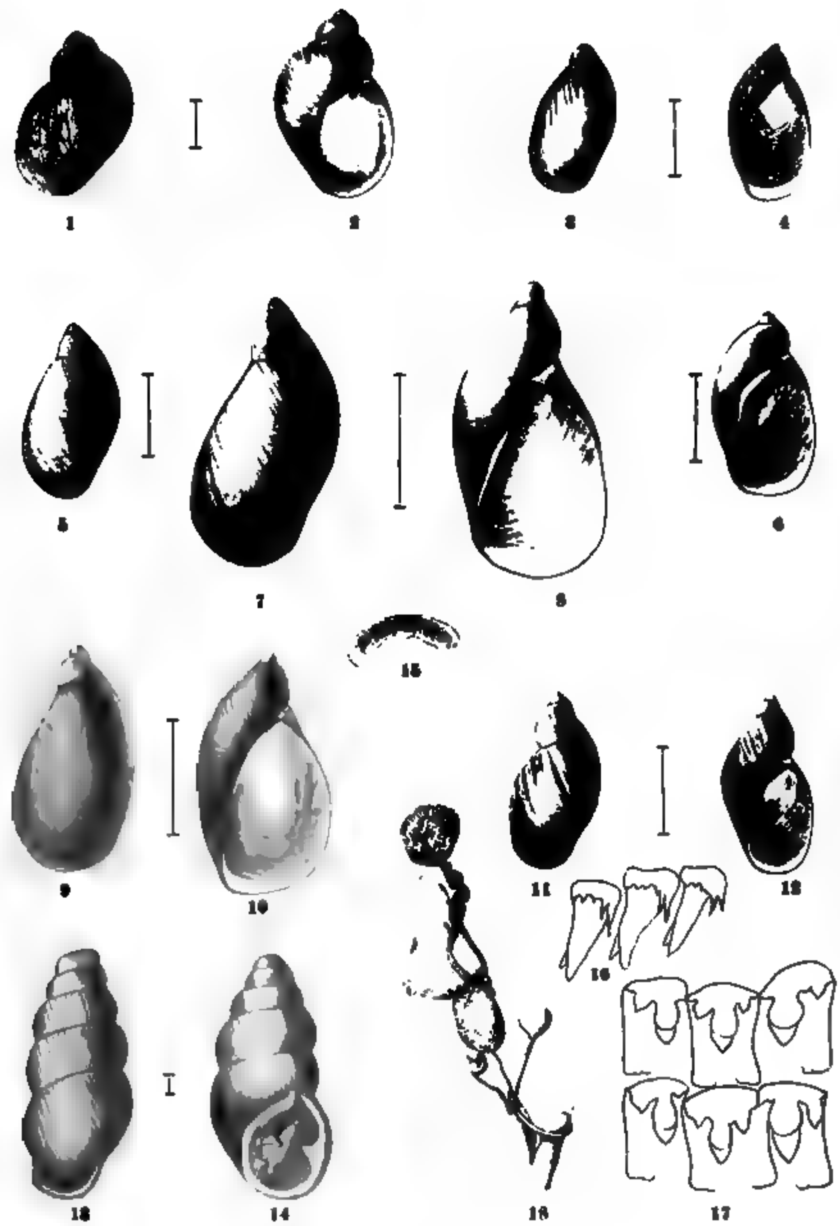
Douro. Povoa de Varzim (Castro), Porto et environs (A. Giraldes, Luso, Nobre), Alfena, pr. Ermezinde (Nobre), S. Felix da Marinha, S. Simão de Gouveia, Amarante (Luso), Bussaco (Nobre).

Extremadura. Collares (Nobre).

Alemtejo. (Morelet).

Algarve. Faro (Castro).

Cette espèce vit dans les lieux humides, dans la proximité des eaux, sur les pierres, les mousses et le bois pourri; elle n'est pas rare aux environs de Porto, où je l'ai trouvée à Leça da Palmeira, près du Leça, et à Fonte da Vinha, sur les rives du Douro. Le *Carychium gracilis* (Auricula gracilis, Morelet), trouvé par ce naturaliste à Coimbra, n'est peut-être que le *C. minimum*, Müller. Aucun naturaliste n'a, après Morelet, trouvé la forme correspondante à la diagnose de cet auteur, dont elle semble ne différer que par l'absence de la dent placée à la partie supérieure de l'ouverture. Le *C. tridentatum*, Risso est une variété du *C. minimum* caracterisée surtout par l'absence de stries. D'après Locard elle a été trouvée par Castro à Faro, Famalicão et Granja.



E. Biel, phototyp. Aug. Nobre, del.

1, 2 — Succinea oblonga, Draparnaud.
3-12 — » elegans, Risso
13, 14 — Carychium minimum, Müller.
15 — Maxilla de *S. elegans*, Risso.
16 — Dentes marginaes da radula de *S. elegans*, Risso.
17 — Dentes centraes da radula de *S. elegans*, Risso.
18 — Orgãos reproductores de *S. elegans*, Risso.

ON THE CRITERION FOR AN EXTREME OF A FUNCTION OF ONE REAL VARIABLE

BY

Tsuruichi Hayashi

of the Tokyo Koto Shihan Gakko, Japan

---

1. Let us start from the well known Cauchy's Theorem and repeat its proof briefly.

Theorem.

If $f(x)$ be continuous in the interval $\mathrm{I}=(a, a+d)$,
if $g(x)$ be continuous in the same interval,
if $f'(x)$ be finite or infinite within I,
if $g'(x)$ be finite and $\neq 0$ within I;

then

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{g(a+b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad \begin{array}{l} a<c<a+h, \\ 0<b<d. \end{array}$$

Proof. Introduce the auxiliary function

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(a+b)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}\left\{ g(x)-g(a) \right\}.$$

$\varphi(x)$ is continuous in I.

Also for points whithin I, for which $f'(x)$ is finite,

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(a+b)-f(a)}{g(a+b)-g(a)}\, g'(x);$$

while for the other points within I, $\varphi'(x)$ is definitely infinite.

Finally, we observe that $\varphi(a+h)=0$, $\varphi(a)=0$.

Therefore we can apply Rolle's theorem to $\varphi(x)$, which shows that $\varphi'(x)$ mush vanish for a certain value of x within I, say c,

$$\varphi'(c)=0, \qquad a<c<a+h,$$

whence we get the conclusion of the theorem.

Remark. $g(a+h) \neq g(a)$. For, if $g(a+h)=g(a)$, we can apply Rolle's theorem to $g(x)$, which shows that $g'(x)$ must vanish within I, which is contrary to the hypothesis.

2. Theorem.

If $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$,
$g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$, ..., $g^{(n-1)}(x)$, be continuous in the interval $I=(a, a+d)$,
if $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$,
$g'(x)$, $g''(x)$, ..., $g^{(n-1)}(x)$ be all $=0$ for $x=a$,
if $f^{(n)}(x)$ be finite or infinite within I,
if $g^{(n)}(x)$ be finite and $\neq 0$ within I,
if $g'(x)$, $g''(x)$, ..., $g^{(n-1)} \neq 0$ within I,

then

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{g(a+b)-g(a)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}. \qquad a<c<a+b,\quad 0<b<d.$$

Proof. By the preceding theorem,

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)}, \qquad a<c_1<a+h,$$

and

$$\frac{f'(c_1)-f'(a)}{g'(c_1)-g'(a)} = \frac{f''(c_2)}{g''(c_2)}, \qquad a<c_2<c_1.$$

But

$$f'(a)=0, \quad g'(a)=0.$$

Hence

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{g(a+b)-g(a)}=\frac{f''(c_2)}{g''(c_2)}.$$

Again

$$\frac{f''(c_2)-f''(a)}{g''(c_2)-g''(a)}=\frac{f'''(c_3)}{g'''(c_3)}, \qquad a<c_3<c_2.$$

But

$$f''(a)=0, \qquad g''(a)=0.$$

Hence

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{g(a+b)-g(a)}=\frac{f'''(c_3)}{g'''(c_3)}.$$

Repeating this process, we arrive at the conclusion of the theorem.

Remark. $g(a+h) \neq g(a)$. The reason is the same as in the remark at the end of the preceding theorem.

3. Theorem.

If $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ be continuous in the interval $\mathrm{I}=(a, a+d)$,
if $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ be all $=0$ for $x=a$,
if $f^{(n)}(x)$ be finite or infinite within I,

then

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c). \qquad \begin{matrix} a<c<a+h, \\ 0<h<d. \end{matrix}$$

Proof. Let $g(x)$ in the preceding theorem be $(x-a)^n$, i. e.

$$g(x)=(x-a)^n.$$

Then

$$g'(x)=n(x-a)^{n-1},$$

$$g''(x)=n(n-1)(x-a)^{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g^{(n-1)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2(x-a),$$

$$g^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1.$$

So all the conditions about $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$, ..., $g^{(n-1)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ are entirely satisfied.

Hence

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{g(a+b)-g(a)}=\frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}, \qquad a<c<a+b,$$

where

$$g(a+b)=b^n, \qquad g(a)=0, \qquad g^{(n)}(c)=n!$$

Therefore

$$f(a+b)-f(a)=\frac{b^n}{n!}f^{(n)}(c). \qquad a<c<a+b.$$

4. Theorem.

If $f(x)$, $g(x)$ be continuous in the interval $I=(a-d,\ a)$,
if $f'(x)$ be finite or infinite within I,
if $g'(x)$ be finite and $\neq 0$ within I,

then

$$\frac{f(a-b)-f(a)}{g(a-b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad \begin{matrix} a-b<c<a, \\ 0<b<d. \end{matrix}$$

The proof is similar to that in Art. 1.

5. Theorem.

If $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$,
$g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$, ..., $g^{(n-1)}(x)$ be continuous in the interval $I=(a-d,\ a)$,
if $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$,
$g'(x)$, $g''(x)$, ..., $g^{(n-1)}(x)$ be all $=0$ for $x=a$,
if $f^{(n)}(x)$ be finite or infinite within I,
if $g^{(n)}(x)$ be finite and $\neq 0$ within I,
if $g'(x)$, $g''(x)$, ..., $g^{(n-1)}(x)\neq 0$ within I,

then

$$\frac{f(a-b)-f(a)}{g(a-b)-g(a)}=\frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}. \qquad \begin{matrix} a-b<c<a, \\ 0<h<d. \end{matrix}$$

The proof is similar to that in Art. 2.

6. Theorem.

Il $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ be continuous in the interval $I=(a-d,\ a)$

if $f'(x), f''(x), \ldots\ldots, f^{(n-1)}(x)$ be all $=0$ for $x=a$,
if $f^{(n)}(x)$ be finite or infinite within I,

then

$$f(a-b)-f(a)=(-1)^n \frac{b^n}{n!} f^{(n)}(c). \qquad \begin{matrix} a-b<c<a, \\ 0<b<d. \end{matrix}$$

The proof is similar to that in Art. 3.

7. Definition.

If $f(x)$ be continuous in the interval $I=(\alpha, \beta)$:
if a be an inner point of I;
(1) if $f(x)-f(a)>0$, x being any point in the neighborhood of the point a,
then $f(x)$ has a minimum at the point a.
(2) if $f(x)-f(a)<0$, x being any point in the neighborhood of the point a,
then $f(x)$ has a maximum at the point a.

Remark. We know well that the condition (1) can be replaced, if we please, by:

if $f(x_2)-f(x_1)>0$, $f(x_1)-f(a)>0$, either $x_2<x_1<a$ or $a<x_1<x_2$, x_1, x_2 being any two points in the neigborhood of the point a.
But we adopt here the most common definition.
The similar thing may be said about the condition (2)

8. Criterion for an extreme.

If $f(x), f'(x), f''(x), \ldots\ldots, f^{(n-1)}(x)$ be continuous in the interval $I=(\alpha, \beta)$ containing the point a,
if $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots\ldots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)$ be all $=0$ for $x=a$,
if $f^{(n)}(x)$ be finite or infinite within I,
if the fraction

$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)}{x-a}$$

be not always $=0$ and have the same sign, x being any point in the neighborhood of the point a:

(1) if $n+1$ is odd,
then $f(x)$ has no extreme at a;

(2) if $n+1$ is even,

(*i*) if the sign of the fraction $\dfrac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)}{x-a}$ be positive, then $f(x)$ has a minimum at a,

(*ii*) if the sign of the fraction $\dfrac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)}{x-a}$ be negative, the $f(x)$ has a maximum at a.

Proof. By the theorem in Art. 3, we have

$$f(a+b_1)-f(a)=\frac{b_1{}^n}{n!}f^{(n)}(c_1)$$

where

$$\alpha<a<c_1<a+b_1<\beta.$$

From this we get

$$f(a+b_1)-f(a)=\frac{b_1{}^n}{n!}\cdot\frac{f^{(n)}(c_1)-f^{(n)}(a)}{c_1-a}\cdot(c_1-a).$$

Again, by the teorem in Art. 6.

$$f(a-b_2)-f(a)=(-1)^n\frac{b_2{}^n}{n!}f^{(n)}(c_2)$$

where

$$\alpha<a-b_2<c_2<a<\beta.$$

From this we get

$$f(a-b_2)-f(a)=(-1)^n\frac{b_2{}^n}{n!}\cdot\frac{f^{(n)}(c_2)-f^{(n)}(a)}{c_2-a}\cdot(c_2-a)$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{b_2{}^n}{n!}\cdot\frac{f^{(n)}(c_2)-f^{(n)}(a)}{c_2-a}\cdot(a-c_2).$$

Now by one of the hypotheses,

$$\operatorname{sgn}\frac{f^{(n)}(c_1)-f^{(n)}(a)}{c_1-a}=\operatorname{sgn}\frac{f^{(n)}(c_2)-f^{(n)}(a)}{c_2-a}.$$

Hence if we denote this sign by σ, then

$$\operatorname{sgn}\{f(a+b_1)-f(a)\}=\sigma,$$

$$\operatorname{sgn}\{f(a-b_1)-f(a)\}=(-1)^{n+1}\sigma.$$

Therefore if $n+1$ is odd, $f(x)$ has no extreme at a; if $n+1$ is even, $f(x)$ has an extreme at a: a minimum if $\sigma > 0$, and a maximum if $\sigma < 0$.

9. Particularized criterion.

If $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ be continuous in the interval $I = (\alpha, \beta)$ containing the point a,

if $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$ be all $=0$ for $x = a$,

if $f^{(n)}(x)$ be finite or infinite within A,

if $f^{(n+1)}(x)$ be $\neq 0$ at the point a;

(1) if $n+1$ is odd, then $f(x)$ has no extreme at a;

(2) if $n+1$ is even

(*i*) if the sign of $f^{(n+1)}(a)$ be positive, then $f(x)$ has a minimum at a,

(*ii*) if the sign of $f^{(n+1)}(a)$ be negative, then $f(x)$ has a maximum at a.

Proof. For, if $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, then

$$\operatorname{sng} f^{(n+1)}(a) = \operatorname{sgn} \frac{f^{(n)}(c_1) - f^{(n)}(a)}{c_1 - a} = \operatorname{sgn} \frac{f^{(n)}(c_2) - f^{(n)}(a)}{c_2 - a}.$$

10. Remarks abont the criterions.

(1) $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$ need not to be determinate in the interval containing the point a, but $f^{(n)}(x)$ must be determinate at the point a, while $f^{(n+1)}(x)$ may be indeterminate at that point, if

$$\operatorname{sgn} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{x - a}, \text{ or } \operatorname{sgn} \frac{f^{(n)}(x)}{x - a}$$

be not always $=0$ and have the same sign, when x represents any value whatever in the neighborhood of the point a.

Of course, in the particularized criterion in Art. 9, $f^{(n+1)}(a)$ may be indeterminate, but its sign must be definite.

Also $\lim\limits_{x=a} f^{(n)}(x)$, and $\lim\limits_{x=a} f^{(n+1)}(a)$ may be indeterminate.

(2) Those which we understand as the values of $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, and $f^{(n+1)}(x)$ for $x = a$ or at the point $x = a$, are respectively

$$f'(a) = \lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

$$f''(a) = \lim_{h=0} \frac{f(a+2h) - 2hf(a+h) + f(a)}{h^2}, \text{ etc.}$$

We must note that sometimes

$$f'(a) \neq \lim_{x=a} f'(x),$$

$$f''(a) \neq \lim_{x=a} f''(x), \text{ etc.,}$$

unless $f'(x)$, $f''(x)$, ... are continuous at the point $x=a$.
(3) We alway assume that right hand and left hand differential coefficients are equal.

11. Examples.

(1) $$f(x)=x^3\sin\frac{1}{x}+x^2$$

when $x \neq 0$,

$$f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}+2x,$$

$$f''(x)=6x\sin\frac{1}{x}-4\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}+2,$$

so that $\lim_{x=0} f'(x)=0$ and $\lim_{x=0} f''(x)$ is indeterminate.

But

$$f'(0)=\lim_{b=0}\frac{b^3\sin\frac{1}{b}+b^2}{b}=0,$$

$$f''(0)=\lim_{b=0}\frac{(2b)^3\sin\frac{1}{2b}+(2b)^2-2b^3\sin\frac{1}{b}-2b^2}{b^2}$$

$$=2>0.$$

Therefore the function has *a* minimum at $x=0$.

(2) $$f(x)=x^2\sin^2\frac{1}{x}+x^2.$$

when $x \neq 0$

$$f'(x)=2x\sin^2\frac{1}{x}-\sin\frac{2}{x}+2x,$$

$$f''(x)=2\sin^2\frac{1}{x}-2\frac{1}{x}\sin\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\cos\frac{2}{x}+2,$$

so that $\lim_{x=0} f'(x)$ and $\lim_{x=0} f''(x)$ are both indeterminate.

But

$$f'(0) = \lim_{b=0} \frac{b^2 \sin^2 \frac{1}{b} + b^2}{b} = 0$$

$$f''(0) = \lim_{b=0} \frac{(2b)^2 \sin^2 \frac{1}{2b} + (2b)^2 - 2b^2 \sin^2 \frac{1}{b} - 2b^2}{b^2}$$

$$= \lim \left(4 \sin^2 \frac{1}{2b} - 2 \sin^2 \frac{1}{b} + 2\right)$$

which is indeterminate.

Now let us proceed to find the minimum value of $4 \sin^2 \frac{1}{2b} - 2 \sin^2 \frac{1}{b}$.

$$4 \sin^2 \frac{1}{2b} - 2 \sin^2 \frac{1}{b} = 4 \sin^2 \frac{1}{2b} - 8 \sin^2 \frac{1}{2b} \cos^2 \frac{1}{2b}$$

$$= 8 \sin^4 \frac{1}{2b} - 4 \sin^2 \frac{1}{2b}$$

$$= 8z^2 - 4z$$

where z stands for $\sin^2 \frac{1}{2b}$.

Let

$$\varphi(z) = 8z^2 - 4z.$$

Then

$$\varphi'(z) = 16z - 4,$$

$$\varphi''(z) = 16,$$

so that $\varphi(z)$ has the minimum value $-\frac{1}{2}$ at $z = \frac{1}{4}$ i. e. $\sin \frac{1}{2b} = \pm \frac{1}{2}$.

Therefore

$$f''(0) \geqq -\frac{1}{2} + 2,$$

i. e.

$$f''(0) > 0.$$

Therefore the fonction has a minimum at $x = 0$.

(3) $$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} + x^2.$$

when $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + 2x,$$

$$f''(x) = 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} + 2,$$

so that $\lim\limits_{x=0} f'(x)$ and $\lim\limits_{x=0} f''(x)$ are both indeterminate.

But

$$f'(0) = \lim_{b=0} \frac{b^2 \sin \frac{1}{b} + b^2}{b} = 0$$

$$f''(0) = \lim_{b=0} \frac{(2b)^2 \sin \frac{1}{2b} + (2b)^2 - 2b^2 \sin \frac{1}{b} - 2b^2}{b^2}$$

$$= \lim_{b=0} \left(4 \sin \frac{1}{2b} - 2 \sin \frac{1}{b} + 2\right)$$

which is indeterminate.

Now let us proceed to find the minimum value of $4 \sin \frac{1}{2b} - 2 \sin \frac{1}{b}$.

$$4 \sin \frac{1}{2b} - 2 \sin \frac{1}{b} = 4 \sin \frac{1}{2b} - 4 \sin \frac{1}{2b} \cos \frac{1}{2b}$$

$$= 4 \sin \frac{1}{2b} \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{b}}\right)$$

$$= 4z\left(1 - \sqrt{1 - z^2}\right),$$

where z stands for $\sin \frac{1}{2b}$, and the square root may be either positive or negative.

Let

$$\varphi(z) = 4z(1 - \sqrt{1 - z^2})$$

Then

$$\varphi'(z) = 4 - 4(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} + 4z^2(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\varphi''(z) = 12z(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} + 4z^3(1 - z^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\varphi'''(z) = 12(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} + 24z^2(1 - z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+ 12z^4(1 - z^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Hence $\varphi'(z)$ becomes zero when

$$(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2z^2$$

and therefore when $z = 0$, $z = +\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(*i*) When $z = 0$, $\varphi''(z) = 0$, $\varphi'''(z) = 12$.
Therefore $\varphi(z)$ has no extreme at $z = 0$.

(*ii*) When $z = +\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ must be negative on account of the equation $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2z^2$.
Therefore

$$\varphi''(z) = -24\sqrt{3} < 0,$$

so that $\varphi(z)$ bas a maximum at $z = +\frac{\sqrt{3}}{2}$, the value being $3\sqrt{3}$.

(*iii*) When $z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ must be also negative.

Therefore

$$\varphi''(z) = 24\sqrt{3} > 0,$$

so that $\varphi(z)$ bas a minimum at $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, the value being $-3\sqrt{3}$.

Now returning to the original function, we have

$$3\sqrt{3} + 2 \geqq f''(0) \geqq -3\sqrt{3} + 2.$$

Hence the sign of $f''(0)$ is not definitive.

Therefore the function $x^2 \sin\frac{1}{x} + x^2$ has no extreme at $x = 0$.

12. Remark.

For the value a of x for which $f(x)$ becomes minimum or maximum, $f'(x)$ does not become zero by making x approach to a, if $f'(x)$ be differential coefficient for $x \neq a$, nuless $f'(x)$ be continuous at $x = a$.

Sometimes $f(x)$ has an extreme when $\lim\limits_{x=a} f'(x)$ is $\neq 0$, but when $f'(a) = 0$, as in Art. 11, Ex. (2), (3).

When $f'(x)$ be continuous at a, $\lim\limits_{x=a} f'(x) = 0$.

However, in all cases, differential coefficient at $x = a$, i. e. $f'(a)$ is $= 0$.

BIBLIOGRAPHIA

L. Couturat: *Les principes des mathématiques*. Paris, Felix Alcan, 1905.

Contém este bello livro os resultados dos estudos de M. Couturat sobre os trabalhos contemporaneos relativos á philosophia das mathematicas e sobre o estado presente d'esta doutrina. Entre estes trabalhos o auctor dá importancia principal aos de B. Russell e aos de Peano. A obra tem uma introducção e cinco capitulos, respectivamente consagrados aos principios da logica, á noção de numero, á ideia de ordem, á noção de continuo, á noção de grandeza e aos fundamentos da Geometria. Contém ainda o livro um appendice sobre a philosophia das mathematicas de Kant, cujas ideias M. Couturat analysa profundamente.

G. T.

A. Maroger: *Leçons critiques et historiques sur les fondements des Mathématiques*. Paris, Vuibert et Nony, 1908.

Contém este interessante opusculo quinze lições feitas pelo auctor aos alumnos do Lyceu de Rennes sobre os fundamentos das Mathematicas, considerados ao mesmo tempo sob o ponto de vista philosophico e historico. Assim, occupa-se dos methodos, definições, axiomas e postulados, da natureza das demonstrações, das noções de numero e de infinito, etc. A respeito de cada questão considerada é exposta a sua historia e é feita a sua critica. É um livro muito util para o desenvolvimento philosophico dos alumnos e para lhes dar conhecimento dos nomes mais celebres na historia da Mathematica e da Philosophia.

G. T.

Luis Delègue: *Essai sur les principes des sciences mathématiques.* Paris, Vuibert et Nony.

A primeira parte d'este opusculo é consagrada á critica das theorias existentes sobre os principios das sciencias mathematicas. Na segunda e terceira parte expõe o auctor as suas ideias a este respeito, considerando primeiramente os methodos e os conceitos fundamentaes, e depois separadamente os fundamentos da Arithmetica, da Algebra e da Geometria.

G. T.

Edmond Maillet: *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions.* Paris, Gauthier-Villars, 1906.

A theoria dos numeros transcendentes tem sido objecto de trabalhos notaveis, entre os quaes figuram muitos devidos ao auctor do livro que vimos de mencionar. Na presente obra M. Maillet expõe systematicamente não só os resultados das suas importantes indagações sobre este bello assumpto, mas alguns resultados conhecidos mais interessantes. Esta exposição é feita de uma maneira elementar e simples, de modo a poder ser lida por quem não tem preparação scientifica muito extensa.

G. T.

R. d'Adhémar: *Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.* Paris, Gauthier-Villars.

O problema da integração das equações ás derivadas parciaes, tal como é posto em Physica mathematica, tem sido modernamente objecto de muitos trabalhos extremamente notaveis. É d'este problema que M. d'Adhémar se occupa no seu bello opusculo, onde considera especialmente as equações

$$\frac{\partial^2 u}{dx dy} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{dy}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

e onde expõe resumidamente alguns dos resultados mais importantes, relativos a estas equações, que teem sido até agora obtidos.

Ajuntemos que o opusculo faz parte da collecção scientifica publicada sob o nome de *Sciencia* pela casa Gauthier-Villars.

G. T.

R. D'ADHÉMAR: *Exercices et leçons d'Analyse.* Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Este livro contém diversos exercicios interessantes de Analyse, alguns dos quaes foram propostos nos exames da Faculdade das sciencias de Paris. Contém tambem algumas lições sobre assumptos da theoria das funcções que não estão ainda assaz elaborados para figurarem nos livros classicos para o ensino d'esta parte das Mathematicas. Estas lições referem-se a algumas questões ligadas com o celebre problema de DIRICHLET, e principalmente á theoria e consequencias das equações integraes de FREDHOLM e VOLTERRA.

G. T.

P. BOUTROUX: *Leçons sur les fonctions définies par les equations différentielles du premier ordre.* Paris, Gauthier-Villars, 1908.

A definição de funcção analytica adoptada por WEIERSTRASS tem sido generalisada em diversos sentidos em trabalhos modernos sobre a theoria das funcções. A influencia d'estas generalisações sobre a theoria das equações differenciaes é o objecto do bello e importante volume de P. BOUTROUX, onde são tractados alguns pontos particulares d'esta theoria, e onde são consideradas principalmente as equações

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad \frac{dz}{dx} + A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0,$$

$P(x, y)$ e $Q(x, y)$ representando funcções racionaes inteiras de x e y, e $A_0, \ldots, A_3$ representando funcções racionaes inteiras de x.

Este volume faz parte da collecção de monographias sobre a

theoria das funcções publicada pela casa de Gauthier-Villars, sob a direcção de E. BOREL, e as lições que elle encerra foram professadas no Collegio de França pelo auctor do livro.

G. T.

J. JUHEL-RÉNOY: *Théorie et applications des équations du second degré.* Paris, Nony, 1909.

Este livro é escripto para uso dos estudantes dos Lyceus francezes, e pode ser muito util aos estudantes dos nossos Lyceus. Contém um estudo muito completo das propriedades das equações e systemas de duas equações do segnndo gráo, e das desigualdades do segundo gráo; contém tambem o estudo de diversas equações reductiveis ao segundo gráo; e contém, enfim diversos problemas que conduzem a equações do segundo gráo. Nota-se ainda neste livro uma discussão desenvolvida da funcção racional que resulta da divisão de duas funcções inteiras do segundo gráo. Nesta ultima questão e em algumas outras o auctor faz muito uso da representação geometrica, tão recomendavel para dar aos resultados uma forma intuitiva.

G. T.

E. BOREL: *Éléments de la théorie des probabilités.* Paris, Hermann, 1909.

Nesta obra excellente, o auctor expõe com a maxima clareza e simplicidade a parte essencial da theoria das probabilidades. A exposição d'esta theoria é acompanhada de muitos problemas interessantes que a esclarecem. A obra está dividida em tres partes, sendo a primeira consagrada ao estudo das probabilidades discontinuas, o segundo ao estudo das probabilidades geometricas, tão util em diversas questões de Physica, e o terceiro ás questões relativas á probabilidade das causas. A theoria dos erros das observações é estudada nesta ultima parte.

G. T.

GINO LORIA: *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche.* 3.ª ed., Torino, 1907.

Deu-se já noticia das edições anteriores desta bella e utilis-

sima obra no *Jornal de Sciencias Mathematicas*. N'estas edições o illustre professor da Universidade de Genova occupou-se dos trabalhos geometricos anteriores a 1896. Na presente edição conservou a doutrina da edição anterior, sem modificação alguma, mas ajuntou um appendice, onde indicou os progressos da Geometria no intervallo de 1896 a 1906.

Não é necessario fazer aqui o elogio d'esta obra que goza de uma justa notoriedade.

G. T.

HENRY B. FINE: *A College Algebra*. Ginn and Company.

Percorrendo este livro, vê-se que o auctor tem a pratica do ensino e que meditou sobre os assumptos que nelle são considerados. Observa-se isto logo na primeira parte, a qual é consagrada ás noções de numero inteiro, de numero racional, de numero irracional, de numero negativo e de numero complexo, e á theoria das operações numericas. Esta doutrina, cuja exposição não é facil, é no livro citado estudada com muita clareza e completo rigor. Nesta exposição o auctor associa intimamente a noção de numero cardinal com a noção de ordem.

Entrando em seguida no dominio da Algebra propriamente dita, o auctor principia por definir as operações algebricas por meio das suas propriedades combinatorias e occupa-se depois do methodo dos coefficientes indeterminados, do qual faz em seguida muito uso. Depois são consideradas as diversas questões de Algebra, que no nosso paiz se estudam nos Lyceus e no primeiro anno das Polytechnicas. Na exposição d'estas questões o auctor sobe gradualmente dos casos particulares simples aos casos geraes.

G. T.

E. FABRY: *Traité de Mathématiques générales*. Paris, Hermann, 1909.

Contém este livro as noções de Algebra, Geometria analytica, Calculo differencial e integral, e Mecanica que são indispensaveis aos chimicos, physicos e engenheiros. A exposição d'estas noções é feita com a simplicidade e clareza necessarias em obras que teem este destino, sem em parte alguma lhe faltar o rigor. Os alumnos das nossas Polytechnicas podem porisso tirar grande proveito do estudo d'esta obra excellente.

G. T.

C. FASSBINDER: *Théorie et pratique des approximations numériques.* Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Este opusculo é consagrado á theoria e pratica do calculo approximado. No primeiro capitulo expõe o auctor a theoria dos erros. No segundo estuda os problemas em que, sendo dadas as approximações de certos numeros, se pede a approximação do resultado de um calculo executado sobre elles. No terceiro são considerados os problemas em que, sendo dados certos numeros, se quer calcular com uma approximação dada uma expressão numerica dada. O quarto é consagrado ás operações abreviadas, e o quinto á applicação da Algebra á theoria dos erros. O livro contém ainda numerosos exercicios.

G. T.

Oeuvres de Charles Hermite, t. II. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Deu-se já nestes *Annaes* noticia do 1.° volume das Obras de C. HERMITE. O presente volume contém varios trabalhos publicados por êste grande geometra no intervallo de 1858 a 1872, e que se referem á theoria das formas, á theoria das funcções ellipticas, á applicação d'estas funcções á Arithmetica e á Algebra, á interpolação, á determinação de algumas integraes, etc.

Contém tambem este volume um excellente retrato de C. HERMITE, que o representa na idade de 50 annos.

G. T.

Festskrift til H. G. Zeuthen. Kobenhavn, 1909.

Este volume, destinado a celebrar os 70 annos de M. ZEUTHEN, contém trabalhos de BJORNBO, CHRISTENSEN, CRONE, GRAM, HEIBERG, JENSEN, JUEL, NIELSEN, VALENTINER, etc.

A edição é primorosa e é adornada com um bello retrato do geometra eminente a quem o livro é consagrado.

M. ZENTHEN tem enriquecido a Geometria e a historia das mathematicas de bellos e importantes trabalhos, e bem mereceu a homenagem que lhe foi prestada pelos seus compatriotas, á qual tomamos a liberdade de nos associar com os nossos calorosos applausos.

G. T.

Dr. E. Nannei: *Elementi di Geometria*. Milano, F. Vallardi.

Em paiz algum teem sido publicados tantos livros consagrados aos Elementos de Geometria como em Italia, entre os quaes muitos são excellentes. Entre estes está comprehendido o livro do Dr. Nannei. A sua redacção é muito clara e simples, e ao mesmo tempo rigorosa. Nota-se logo isto ao ler nas primeiras paginas a exposição dos principios fundamentaes; a leitura d'outros pontos delicados confirma a primeira impressão.

Na ordem da exposição dos assumptos o auctor seguiu o methodo mais geralmente empregado: expoz primeiramente a Planimetria, a que consagrou um volume, e depois a Stereometria em um segundo volume. Tratou porém as doutrinas de modo que um professor possa, empregando simultaneamente os dois volumes, ensinar ao mesmo tempo as duas partes da Geometria.

G. T.

G. Lemaire: *Méthodes de résolusion et de discussion des problèmes de Géométrie*. Paris, Nony, 1904.

Os problemas considerados pertencem á Geometria elementar, e são resolvidos e discutidos pelos methodos d'esta sciencia. Eis os assumptos a que se referem:

I Logares geometricos. II Intersecção de logares geometricos. III Determinação de uma recta. IV Translação de figuras. V Rotação de figuras. VI Symetria. VII e VIII Similhança. IX Inversão. X Transformação e divisão das figuras.

Além dos problemas de que o auctor dá a solução, contém o livro muitos outros que elle apenas enuncia.

G. T.

G. Papelier: *Précis de Géométrie analytique*. Paris, Vuibert et Nony, 1907.

Este excellente tratado da parte elementar de Geometria analytica a duas e a tres dimensões pode ser recommendado aos alumnos do primeiro anno das nossas Polytechnicas. Está escripto com muita clareza e contém a maior parte das doutrinas que estes alumnos são obrigados a estudar, como se pode ver pela seguinte indicação do objecto de cada capitulo.

I Homogenidade e construcção das formulas. II Das coordenadas. III Da linha recta. IV Angulos e distancias. V Feixes de rectas e coordenadas homogeneas. VI Razão anharmonica. VII Do circulo. VIII Logares geometricos. IX Homographia e involução. X Curvas cuja equação é resoluvel relativamente a uma das coordenadas. XI Curvas definidas pelas expressões das coordenadas em funcção de um parametro. XII Curvas cuja equação não é resoluvel relativamente a uma das coordenadas. XIII Theoria das envolventes. XIV Tangentes e normaes. XV Curvatura. XVI Classificação das conicas. XVII Centros e diametros das conicas. XVIII Eixos das conicas. XIX Reducção de equações do segundo gráo. XX Polos e polares. XXI a XXIII Estudo especial da ellipse, da hyperbole e da parabola. XXIV Fócos e directrizes. XXV Determinação das conicas. XXVI Intersecção de duas conicas. XXVII Equações geraes das conicas. XXVIII Propriedades homographicas das conicas. XXIX Propriedades homotheticas. XXX Coordenadas polares.

A parte consagrada á Geometria a tres dimensões é estudada em 19 capitulos, onde são considerados os principios geraes e as superficies de segunda ordem.

G. T.

J. Pionchon: *Principes et formules de Trigonométrie rectiligne et sphérique.* Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Este tratado de Trigonometria é destinado aos engenheiros; e, contém porisso só as noções e formulas que elles devem ter constantemente presentes. Como diz o auctor no prefacio, nos tratados de Trigonometria escriptos para os alumnos faltam assumptos que os engenheiros devem conhecer, e, pelo contrario, os livros sobre esta sciencia destinados aos mathematicos conteem materias de que os engenheiros se não aproveitam. As doutrinas são tambem expostas sob a forma que mais pode interessar a classe de leitores a que o livro é destinado.

G. T.

José Ruiz-Castizo: *Tratado de Mecánica racional,* tom. I. Madrid, 1907.

O Sr. Ruiz-Castizo, professor na Universidade de Madrid, está

publicando um tratado de Mecanica racional, do qual vem de apparecer o tomo primeiro. Este volume é consagrado á theoria geral dos systemas de vectores e á Cinematica. Percorrendo-o, nota-se a sua riqueza, pois que, além dos assumptos de que, pela sua importancia fundamental, o auctor teve de occupar-se, contém o livro ainda muitas questões interessantes, ou systematicamente tratadas, ou simplesmente enunciadas.

Para estudar os diversos assumptos considerados neste volume, o Sr. Ruiz-Castiro empregou os methodos analytico-geometricos, indo buscar á Analyse só o que ella pode naturalmente dar, sem perder jámais de vista a questão que pretende estudar. Os resultados obtidos são assim não só demonstrados mas explicados.

A redacção do livro é feita com todos os desenvolvimentos necessarios para que os alumnos não encontrem difficuldades na sua leitura.

G. T.

H. Poincaré: *Leçons de Mécanique céleste*, tom. II. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

Contém este volume as lições professadas na Faculdade das Sciencias de Paris por M. Poincaré sobre o desenvolvimento da funcção perturbadora e sobre a theoria da Lua. Eis os assumptos tratados nestas lições: XIV O problema da funcção perturbadora. XV Applicação das funcções de Bessel. XVI Propriedades geraes da funcção perturbadora. XVII Os coefficientes de Laplace. XVIII Os polynomios de Tisserand. XIX Os operadores de Newcomb. XX Convergencia das series. XXI Relações de recorrencia e equações differenciaes. XXII Calculo numerico dos coefficientes. XXIII Termos de ordem elevada. XXIV Generalidades sobre a theoria da Lua. XXV A variação. XXVI Movimento do nó. XXVII Movimento do perigeo. XXVIII Termos de ordem superior. XXIX Segundo methodo. XXX Acção dos planetas. XXXI Accelerações suculares.

Não é necessario fazer o elogio de uma obra de Poincaré. Todos sabem quanta originalidade, elegancia e profundeza se admiram em todas as producções d'este grande mestre.

G. T.

E. Cosserat et F. Cosserat: *Théorie des corps déformables.* Paris, Hermann, 1909.

Os auctores mostraram, em uma nota juncta á sua traducção do Tratado de Physica de Chwolson, que, no movimento de um ponto, o elemento essencial da noção de acção é a distancia euclideana de duas posições infinitamente visinhas do ponto movel, e que desta noção se deduzem as definições fundamentaes da Dynamica. No presente volume, os mesmos geometras estudam, sob o mesmo ponto de vista, a theoria da deformação dos systemas discretos de pontos e dos corpos continuos, considerando, successivamente, as linhas, as superficies e os meios deformaveis. Este trabalho, extremamente notavel, é uma introducção indispensavel, ao estudo de algumas theorias de Physica, que se propõem considerar em notas á traducção do tratado acima mencionado.

G. T.

Léon Lecornu: *Dynamique appliquée.* Paris, Doin.

Os solidos, superficies e linhas que se consideram em Mecanica technica são muito differentes dos que se consideram em Mecanica theorica, e muitos manuaes para o estudo da primeira são demasiadamente empiricos. Porisso alguns engenheiros geometras teem procurado ligar de um modo mais intimo as duas Mecanicas, e é neste espirito que está redigido o livro excellente do Sr. Lecornu.

Abre o volume por um resumo rapido das theorias da mecanica racional, e depois segue o estudo da dynamica das mólas, e de diversos movimentos que se apresentam em engenharia, e, enfim, a theoria das machinas.

Ajuntemos que o volume faz parte da Encyclopedia scientifica do Dr. de Toulouse, de que já se fallou nesta revista.

G. T.

Otto de Alencar Silva: *Physica e Electrotechnia.* Rio de Janeiro, 1906.

Estão reunidos neste volume diversos trabalhos interessantes sobre a theoria da capilaridade, sobre a formula de Stokes, so-

bre a theoria da pilha, sobre a integração de algumas equações de Physica, etc.

O trabalho que se refere á formula de STOKES, onde o auctor dá uma nova demonstração desta formula notavel, tinha já sido publicado no *Enseignement mathématique*, e o trabalho que se refere á integração de algumas equações da Physica é a parte geral de uma memoria por elle publicada no *Jornal de Sciencias Mathematicas*.

G. T.

P. ROZÉ: *Théorie et usage de la règle à calculs*. Paris, Gauthier Villars, 1907.

Encontra-se neste opusculo a theoria e modo de emprego das régoas para calculos numericos conhecidas pelo nome de *régoa das escolas* e *régoa Mannheim*. Contém ainda a applicação d'este methodo de calculo numerico a diversos problemas.

L. PUISEUX: *La Terre et la Lune. Forme extérieure et structure interne*. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Desperta vivo interesse a leitura d'este formoso livro. Nelle é, com effeito, descripto sob uma forma attrahente e accessivel a quem possue apenas uma ligeira cultura scientifica, o estado actual dos nossos conhecimentos sobre a forma axterior e estructura interna da Terra e da Lua, e a historia dos trabalhos e hypotheses que sobre estas questões teem sido apresentadas até hoje. É ainda o livro enriquecido com numerosas e bellas photographias da Lua, obtidas no Observatorio de Paris.

G. T.

JULIEN LOISEL: *Guide de l'amateur météorologiste*. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Para se conhecer detalhadamente o clima de um paiz, não bastam os Observatorios officiaes; é necessario tambem o concurso de todos os que se interessam pela meteorologia. O fim do presente opusculo é indicar aos amadores d'esta sciencia

tão interessante as observações que devem fazer, e as condições a que estas observações devem satisfazer para serem aproveitaveis.

Annuaire par l'an 1909 publié par le Bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars.

Contém o presente volume d'este bem conhecido Annuario, além das informações uteis habitualmente dadas nos volumes d'esta collecção, as seguintes noticias scientificas:

1.º As estrellas variaveis, por G. Bigourdan;

2.º Movimentos de deformação da crusta terrestre, por Ch. Lallemand.

J. Castanheira das Neves: *Subsidios para o estudo das pozzolanas e sua applicação nas construcções.*

O illustre engenheiro Sr. Castanheira das Neves, director dos estudos e ensaios dos materiaes de construcção, apresentou á Direcção Geral de Obras Publicas e Minas, uma notavel memoria sobre a applicação das pozzolanas nas construcções.

Nesta memoria faz o distincto engenheiro um estudo descriptivo e historico das pozzolanas, em geral, e sobretudo das pozzolanas dos Açores.

Mostra como as argamassas de pozzolana são empregadas nas construcções, com notavel successo, desde a mais remota antiguidade, e que o seu recente abandono se deve principalmente ao desenvolvimento e perfeição do fabrico dos cimentos artificiaes; mas, apesar d'esses progressos, a experiencia tem mostrados que os cimentos artificiaes não resistem á corrosão pelas aguas do mar.

Em seis mappas annexos á memoria, encontram-se resumidas as analyses chimicas, não só das pozzolanas dos Açores, mas ainda de varias pozzolanas extrangeiras.

Existindo nas nossas ilhas dos Açores exuberantes jazigos de pozzolana, a presente memoria tem um valor notavel, não só pelo desenvolvimento que pode tomar o emprego d'esta substancia no paiz, mas até pelo desenvolvimento que pode ter a sua exportação.

Para completar o seu trabalho promette o distincto enge-

nheiro um estudo mais completo, onde serão consignados os ensaios das resistencias mechanica e physica das hydro-argamassas pozzolanicas á flexão, compressão, tracção e corrosão pelas aguas do mar.

Fazemos votos para que possa completar o seu trabalho, que deve constituir uma obra de grande valor e utilidade nacional.

ALVES BONIFACIO

Engenheiro d'Obras Publicas e Minas.

ADOLPHO LOUREIRO: *Os portos maritimos de Portugal e ilhas adjacentes.*

Por portaria de 5 de julho de 1901, da iniciativa do ministro das Obras Publicas, o conselheiro MANOEL FRANCISCO VARGAS, foi o illustre engenheiro ADOLPHO LOUREIRO encarregado de escrever uma noticia dos nossos portos maritimos e fluviaes, tanto do continente do reino, como das ilhas adjacentes.

Do modo como o sabio engenheiro portuguez se tem desempenhado da sua patriotica missão dizem-no os seus notaveis trabalhos, desenvolvidos em cinco grossos volumes, cuja analyse, ainda que rapida, fazemos na presente noticia bibliographica.

No primeiro volume estuda o illustre engenheiro os portos de Caminha, Vianna, Esposende, Povoa de Varzim, Villa do Conde, Porto e Leixões.

Sobre cada um d'estes portos encontra-se uma noticia historica do seu commercio e navegação, a sua situação geographica, a hydrographia e a meteorologia do porto e a historia das obras executadas, bem como os diversos projectos apresentados em differentes epochas e por diversos homens technicos nacionaes ou extrangeiros.

Neste mesmo volume encontra-se uma interessante noticia historica sobre o desenvolvimento da nossa marinha de guerra e mercante; mappas do commercio geral e especial de Portugal; dos rendimentos aduaneiros, do commercio entre a metropole e as colonias e do producto da pesca.

No segundo volume estuda o distincto engenheiro os portos de Aveiro, Figueira da Foz, Entre o Liz e o Alcôa, S. Martinho, Peniche e Ericeira.

O terceiro volume comprehende tres partes, onde o Sr. Adolpho Loureiro estuda com notavel desenvolvimento o porto de Lisboa e a enseada de Cascaes.

A obra do Sr. Adolpho Loureiro é o trabalho mais notavel e completo que existe sobre os portos marïtimos portuguezes.

Em muitos dos portos estndados pelo illustre engenheiro faltam por completo elementos estatisticos, sobretudo meteorologicos; não ha estudos sobre o movimento das barras, a direcção dos ventos predominantes, influencia das correntes fluviaes e maritimas. Todos estes elementos são indispensaveis para se poder julgar da utilidade das obras a realizar num porto.

A falta de estatisticas é quasi geral no nosso paiz, e todos os homens de estudo soffrem d'esta falta que constitue um enorme embaraço para se poder fazer um trabalho completo em muitos ramos do saber humano.

Que o illustre engenheiro possa continuar a sua immortal obra é o desejo de todos os que se interessam pelos progressos do nosso paiz.

Alves Bonifacio

Engenheiro d'Obras Publicas e Minas.

INDEX